# IN1150: Logiske metoder

## Forelesning 2

## Kapittel 3 og 4:

Semantikk for utsagnslogikk og utsagnslogiske begreper

Luna Artemis Midttun Hukkelberg (hun/henne) arthuk@uio.no

# Tolkning av utsagnslogiske formler

$(P \wedge Q)$

$P$

0 betyr usant

1 betyr sant

$(\wedge \rightarrow \neg)$

$(P \wedge Q($

# Sannhetsverdier til atomære formler

M: "Jeg kan se månen"

Vi kan si at M har sannhetsverdi: 0

G: Jeg er glad

G har verd: 1

G

# Sannhetsverdier til sammensatte formler

| F | ¬F |
|---|---|
| 0 | 1 |
| 1 | 0 |

| F | G | (F ∧ G) |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 |

| F | G | (F ∨ G) |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 |

| F | G | (F → G) |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 |

$(P \wedge \neg Q)$: 1

P: 1
Q: 0

$\neg Q$: 1

# Sannhetsverdien til implikasjoner

G: Jeg bor i Gøteborg
S: Jeg bor i Sverige

$G \to S$ "Hvis jeg bor i gøteborg, så bor jeg i sverige"

| G | S | $(G \to S)$ | |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | "Jeg bor ikke i G, ikke i S" |
| 0 | 1 | 1 | "Jog bor ikke i G, men bor i S" |
| 1 | 0 | 0 | "Jeg bor i G, men ikke i S" |
| 1 | 1 | 1 | "Jeg bor i G og bor i S" |

# Valuasjoner

Tilordning $P:1$
$Q:0$

Vi har da en valuasjon $v$

$v$ gjør $P$ sann
$v$ gjør $Q$ usann

$v$ gjør $\neg Q$ sann

$v$ gjør $(P \wedge \neg Q)$ sann

Tilordning $P:1$
$Q:1$

↓

Valuasjon $v'$

$v'$ gjør $P$ sann

$v'$ gjør $\neg Q$ usann

$v'$ gjør $(P \wedge \neg Q)$ usann

# Sannhetsverditabeller

| P | Q | (P | ∧ | ¬ | Q) |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 |

$5 + (3 \cdot 7)$

$$P \Longleftrightarrow \neg\neg P$$

# Logisk ekvivalens

Eksempel: $P$ og $\neg\neg P$ er ekvivalente

Si vi har en valuasjon $v$

Hvis $v$ gjør $P$ sann, så gjør $v$ $\neg P$ usann

så gjør $v$ $\neg\neg P$ sann

Hvis $v$ gjør $\neg\neg P$ sann, så gjør $v$ $\neg P$ usann

så gjør $v$ $P$ sann

Eksempel: $(P \wedge Q)$ og $(P \vee Q)$ er ikke ekvivalente

v gjør $(P \wedge Q)$ sann

v gjør P sann
Q sann

v gjør $(P \vee Q)$ sann

v gjør $(P \vee Q)$ sann

det kan hende v gjør

P sann
Q usann

da gjør v $(P \wedge Q)$ usann

# Vanlige og nyttige ekvivalenser

$(A \wedge B) \Longleftrightarrow (B \wedge A)$

$(A \vee B) \Longleftrightarrow (B \vee A)$

$\neg(A \vee B) \Longleftrightarrow (\neg A \wedge \neg B)$

$\neg(A \wedge B) \Longleftrightarrow (\neg A \vee \neg B)$

Flere på s. 36

# Logisk konsekvens

Si vi har to formler, F og G.

Hvis alle valuasjoner som gjør F sann også gjør G sann, så er G en logisk konsekvens av F.

$F \Rightarrow G$

$$(P \wedge Q) \Rightarrow (P \vee Q)$$

Si vi har en mengde M som inneholder formler.

Hvis alle valuasjoner som gjør alle formlene i M sanne også gjør F sann, så er F en logisk konsekvens av M.

$M \models F$

$\{P, (P \to Q)\} \models Q$

| P | Q | P | (P → Q) | Q |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

✓

$(P \to Q) \implies (P \to (Q \vee R))$

| P | Q | R | $(P \to Q)$ | $(P \to (Q \vee R))$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

# Gyldige argumenter

# Gyldige argumenter

| | |
|---|---|
| Hvis jeg ser månen, så er jeg glad | $M \rightarrow G$ |
| Jeg ser månen | $M$ |
| Jeg er glad | $G$ |

$\{(M \rightarrow G), M\} \models G$

| | |
|---|---|
| Hvis jeg ser månen, så er jeg glad | $M \rightarrow G$ |
| Jeg er ikke glad | $\neg G$ |
| Jeg ser ikke månen | $\neg M$ |

$$\{(M \rightarrow G), \neg G\} \models \neg M$$

| M | G | $(M \rightarrow G)$ | $\neg G$ | $\neg M$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 0 | 0 |

# Ikke et gyldig argument

| | |
|---|---|
| Hvis jeg ser månen, så er jeg glad | $M \to G$ |
| Jeg ser ikke månen | $\neg M$ |
| Jeg er ikke glad | $\neg G$ |

| $M$ | $G$ | $M \to G$ | $\neg M$ | $\neg G$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 0 | 0 |

Oppfyllbar,

Falsifiserbar,

Tautologi,

Kontradiksjon

Oppfyllbar: F er oppfyllbar hvis det finnes en valuasjon som gjør den sann

$(P \to Q)$ er oppfyllbar

$(P \wedge \neg P)$ er ikke oppfyllbar

Falsifiserbar: F er falsifiserbar hvis det finnes en valuasjon som gjør den usann

$(P \to Q)$ er falsifiserbar

$(P \vee \neg P)$ er ikke falsifiserbar

F er en tautologi hvis alle valuasjoner gjør den sann

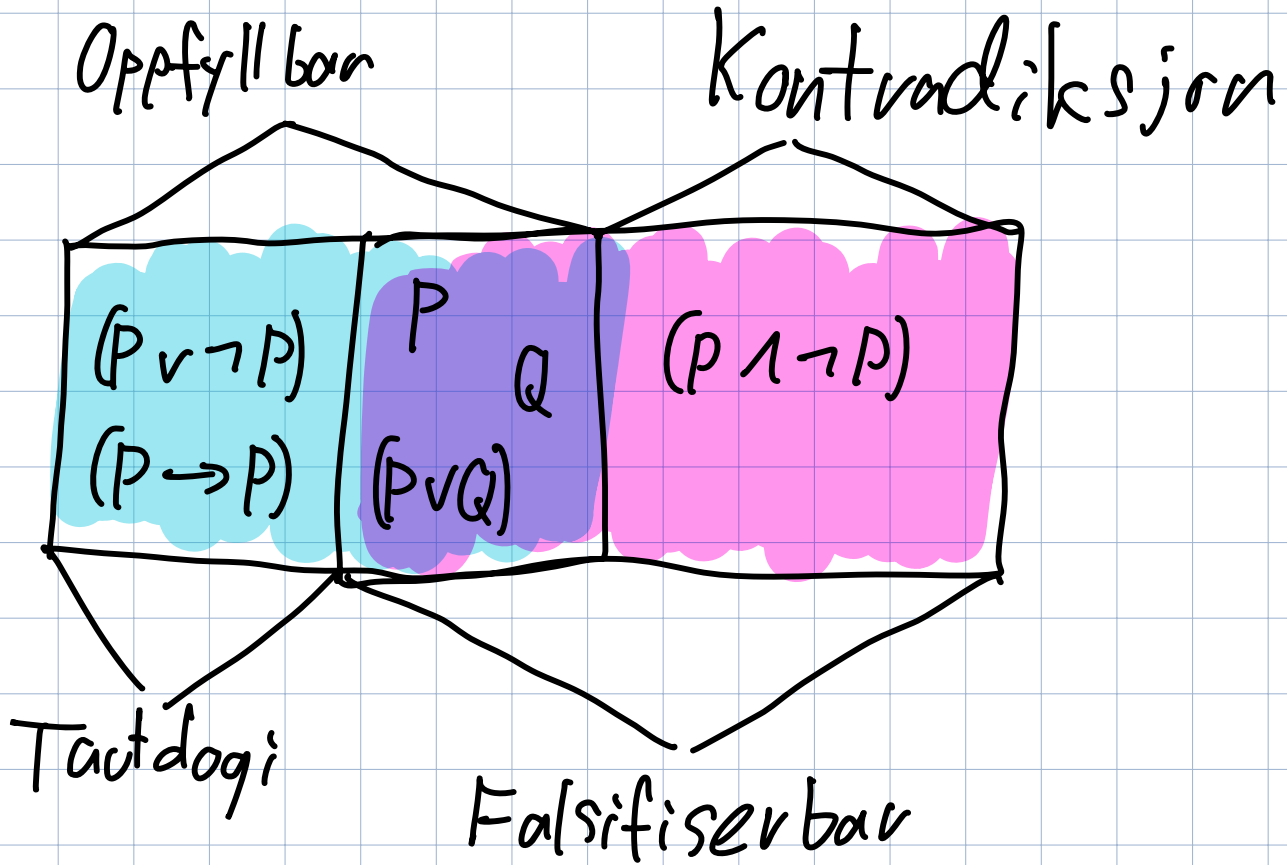
$(P \vee \neg P)$ er en tautologi

P er ikke en tautdogi

F er en kontradiksjon hvis alle valuasjoner gjør den usann

$(P \wedge \neg P)$ er en kontradiksjon

P er ikke


Oppfyllbar
Kontradiksjon
(P v ¬P)
(P → P)
P
Q
(P v Q)
(P ∧ ¬P)
Tautologi
Falsifiserbar