Modeller og teorier

DEF LA Σ VÆRE EN SIGNATUR

EN TEORI (OVER Σ) ER EN MENGDE Π AV LUKKEDE FORMLER.

→ FORMLENE I Π KALLES AKSIOMER

→ LUKKEDE FORMLER OVER Σ SOM ER LOGISKE KONSEKVENSER AV Π KALLES TEOREMER

AKSIOM : $\phi \in \Pi$

TEOREM : $\Pi \vdash \phi$

DEF. EN MODELL $\mathcal{M}$ FOR Σ ER EN MODELL FOR Π HVIS $\mathcal{M}$ GJØR ALLE AKSIOMENE SANNE. VI SKRIVER

$$\mathcal{M} \models \Pi$$

MERK: $\mathcal{M} \models \Pi$ OG $\Pi \vdash \phi \Rightarrow \mathcal{M} \models \phi$

EKSEMPEL $\Sigma = \langle -;-;\ R:2,\ =:2 \rangle$

Π_1 :
- $\forall x\ R(x,x)$
- $\forall x \forall y \left(R(x,y) \to R(y,x)\right)$
- $\forall x \forall y \forall z \left(R(x,y) \wedge R(y,z) \to R(x,z)\right)$

MODELL FOR Π_1 ER EN EKVIVALENSRELASJON

Π_2 :
- $\forall x\ R(x,x)$
- $\forall x \forall y \left(R(x,y) \wedge R(y,x) \to x = y\right)$
- $\forall x \forall y \forall z \left(R(x,y) \wedge R(y,z) \to R(x,z)\right)$

$\mathcal{M} \models \Pi_2$ – $\mathcal{M}$ EN PARTIELL ORDNING.

Kapittel 17

Abstraksjon med ekvivalenser og partisjoner

→ AKA " HVORDAN IDENTIFISERE TING SOM VI VIL SE PÅ SOM SAMME TING - FORMELT ? "

(ELLER " HVORDAN FÅ EN EKVIVALENSRELASJON TIL Å BLI LIKHETSRELASJONEN ? ")

Eks LOGISK EKVIVALENTE FORMLER

- φ , $\neg\neg\varphi$, $\neg\neg\neg\neg\varphi$ ... LOGISK EKVIVALENTE
- $\forall x\ R(x,x)$, $\forall z\ R(z,z)$, — " —
- $\neg(\varphi \wedge \psi)$, $\neg\varphi \vee \neg\psi$ — " —

- ØNSKER OFTE Å SE PÅ F.EKS φ OG $\neg\neg\varphi$ SOM "SAMME FORMEL" — SELV OM DE IKKE ER DET — FORDI DE "SIER DET SAMME"

HVORDAN KAN VI IDENTIFISERE (LOGISK) EKVIVALENTE, MEN SYNTAKTISK FORSKJELLIGE FORMLER?

HVORDAN IDENTIFISERE TING SOM ER EKVIVALENTE?

IDÉ: LAG OBJEKTER SOM STÅR FOR MENGDER AV EKVIVALENTE TING.

DEF LA $R \subseteq D \times D$ VÆRE EN EKVIVALENSRELASJON

- FOR $x \in D$, DEFINER EKVIVALENSKLASSEN TIL x:

$$[x] \overset{\text{def.}}{:=} \{ y \in D \mid xRy \}$$

- KVOTIENTMENGDEN, D/R, ER MENGDEN AV ALLE EKVIVALENSKLASSER

$$D/R \overset{\text{def.}}{:=} \{ [x] \mid x \in D \}$$

SETNING: FOR ALLE $x, y \in D$

$$xRy \iff [x] = [y]$$

BEVIS:

$\Rightarrow$: ANTA AT xRy. MÅ VISE AT $\{ z \in D \mid xRz \} = \{ z \in D \mid yRz \}$.

- ANTA AT $z \in [x]$. DA xRz, MEN xRy.

PER TRANSITIVITET: yRz.

OG DA $z \in [y]$.

- ANTA AT $z \in [y]$. SAMME / SYMMETRISK MED DET OVER.

$\Leftarrow$: ANTA $[x] = [y]$, MÅ VISE xRy.

HAR AT $x \in [x] = [y] = \{ z \in D \mid zRy \}$

SÅ xRy, PER DEF. AV $[y]$.

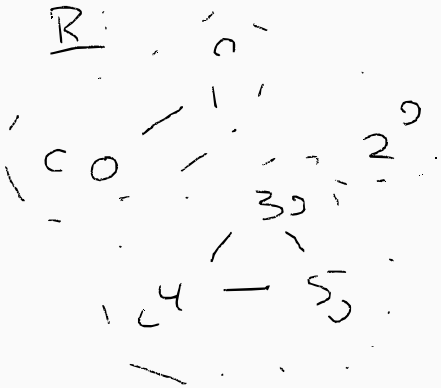
Definisjon 17.1 Ekvivalensklasse

Anta at $\sim$ er en ekvivalensrelasjon på en mengde S. Vi sier at **ekvivalensklassen** (*eng: equivalence class*) til et element $x \in S$ er mengden $\{y \in S \mid y \sim x\}$, med andre ord mengden av elementer i S som er relatert til x. Vi skriver $[x]$ for ekvivalensklassen til x og $S/\sim$ for mengden av alle ekvivalensklassene. Denne mengden kalles **kvotientmengden** (*eng: quotient set*) av S under $\sim$.

Eks: $D = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

$R = \{\langle 0,0\rangle, \langle 1,1\rangle, \langle 2,2\rangle, \langle 3,3\rangle, \langle 4,4\rangle, \langle 5,5\rangle,$
$\langle 0,1\rangle, \langle 1,0\rangle,$
$\langle 3,4\rangle, \langle 4,3\rangle, \langle 4,5\rangle, \langle 5,4\rangle,$
$\langle 3,5\rangle, \langle 5,3\rangle \}$

R:



$[0] = \{0, 1\} = [1]$

$[2] = \{2\}$

$[3] = \{3, 4, 5\} = [4] = [5]$

$D/_R = \{[0], [2], [3]\}$

Eks: Σ signatur

Lform – mengden av lukkede formler

$\phi \Leftrightarrow \psi$ – logisk ekvivalens, for alle modeller $\mathcal{M}$, $\mathcal{M} \models \phi$ hvis og bare hvis $\mathcal{M} \models \psi$.

$$[\phi] = \{ \psi \in \text{Lform} \mid \phi \Leftrightarrow \psi \}$$

$$[P(a)] = \{ P(a),\ \neg\neg P(a),\ \neg\neg\neg\neg P(a),\ \ldots$$
$$P(a) \wedge P(a),\ \ldots$$
$$P(a) \vee P(a),\ \ldots$$
$$\top \wedge P(a),\ \ldots \}$$

← uendelig mange formler

$\text{Lform}/\Leftrightarrow$ – kvotient mengden

Se på logisk konsekvens, $\phi \Rightarrow \psi$

Prè-ordning:
- Refleksiv ✓ ($\phi \Rightarrow \phi$)
- Transitiv ✓ (hvis $\phi \Rightarrow \psi$ og $\psi \Rightarrow \sigma$ så $\phi \Rightarrow \sigma$)
- Ikke anti-symmetrisk: hvis $\phi \Rightarrow \psi$ og $\psi \Rightarrow \phi$ så betyr ikke det at $\phi \equiv \psi$ (syntaktisk likhet).

Definer relasjonen $\leq \subseteq \text{Lform}/\Leftrightarrow \times \text{Lform}/\Leftrightarrow$

ved $[\phi] \leq [\psi]$ hvis $\phi \Rightarrow \psi$ (at det ikke spiller noen rolle / hvilke elementer i ekvivalensklassene vi bruker i definisjonen)

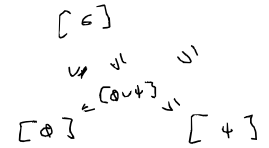
Må sjekke at dette er veldefinert: si anta at $\phi \Leftrightarrow \phi'$ og $\psi \Leftrightarrow \psi'$ og at $\phi \Rightarrow \psi$. Må vise at $\phi' \Rightarrow \psi'$

Men $\phi' \Rightarrow \phi$, og $\phi \Rightarrow \psi$, og $\psi \Rightarrow \psi'$, så ved transitivitet så $\phi' \Rightarrow \psi'$. ✓

- Refleksiv $[\phi] \leq [\phi]$ ✓ ($\phi \Rightarrow \phi$)
- Transitiv $[\phi] \leq [\psi]$, og $[\psi] \leq [\sigma]$, gir $[\phi] \leq [\sigma]$
- Anti-symmetrisk: hvis $[\phi] \leq [\psi]$ og $[\psi] \leq [\phi]$, da $\phi \Rightarrow \psi$ og $\psi \Rightarrow \phi$, dvs $\phi \Leftrightarrow \psi$, dvs $[\phi] = [\psi]$. ✓

(Dette trikset funker på alle prè-ordninger for å gjøke den om til partielle ordninger. se oppgave til sist)

– partiell ordning på $\text{Lform}/\Leftrightarrow$



(fartsfylt en skjalt boolsk algebra)

Definisjon 17.2 Partisjon

En **partisjon** (*eng: partition*) av en mengde S er en mengde X av ikke-tomme delmengder av S slik at følgende betingelser holder:

- Unionen av alle mengdene i X er lik S.
- Snittet mellom to forskjellige mengder fra X er tomt.

$D = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ $X = \{\{0, 1\}, \{2\}, \{3, 4, 5\}\}$

SAMMENHENG MELLOM PARTISJONER OG EKVIVALENSRELASJONER

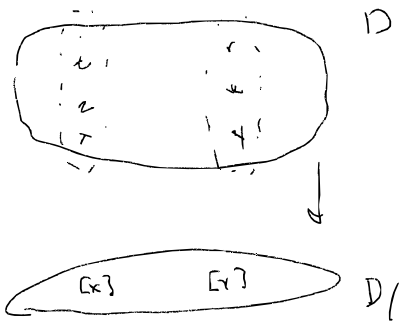
SETNING

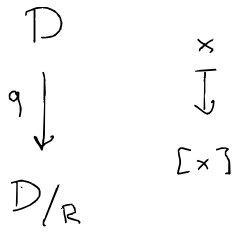
- HVIS $R \subseteq D \times D$ ER EN EKVIVALENSRELASJON, SÅ ER D/R EN PARTISJON AV D
- HVIS X ER EN PARTISJON AV D, DA FINNS EKVIVALENSRELASJON $R \subseteq D \times D$ SLIK AT $X = D/R$

R ER GITT VED $x R y$ HVIS DET FINNS $Y \in X$ SLIK AT BÅDE x OG y ER MED I Y.

ET TREDJE PERSPEKTIV

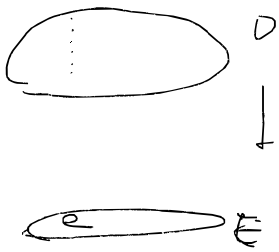
$R \subseteq D \times D$ EKVIVALENSRELASJON





q ER EN SURJEKSJON

LA $D \xrightarrow{f} E$ VÆRE EN SURJEKSJON



DEF FOR $e \in E$,

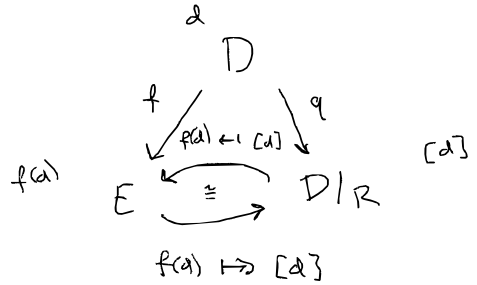
LA $f^{-1}(e) = \{ d \in D \mid f(d) = e \}$

MENGDEN

$\{ f^{-1}(e) \mid e \in E \}$

ER EN PARTISJON.

DEFINER $R \subseteq D \times D$ VED $x R y$ HVIS $f(x) = f(y)$.

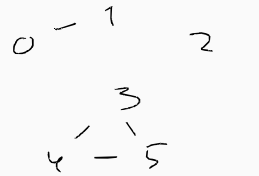


ELLER $e \longmapsto f^{-1}(e)$

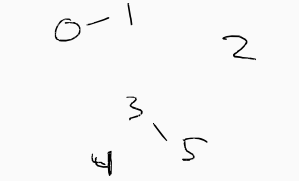
Definisjon 17.3 Forfining av partisjon
La X og Y være partisjoner av en mengde M. Hvis ethvert element i X er en delmengde av et element i Y, skriver vi $X \leqslant Y$ og sier at X er en **forfining** (*eng: refinement*) av Y og er **finere** (*eng: finer*) enn Y.

Eks $M = \{0,1,2,3,4,5\}$

$Y = \{\{0,1\}, \{2\}, \{3,4,5\}\}$



$X = \{\{0,1\}, \{2\}, \{3,5\}, \{4\}\}$



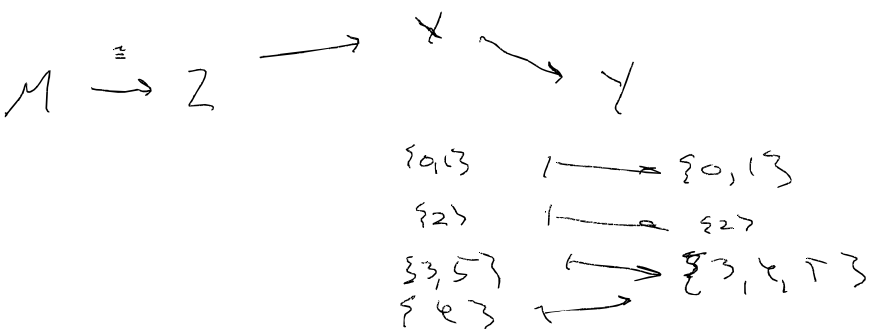
$Z = \{\{0\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4,5\}\}$

Så

M

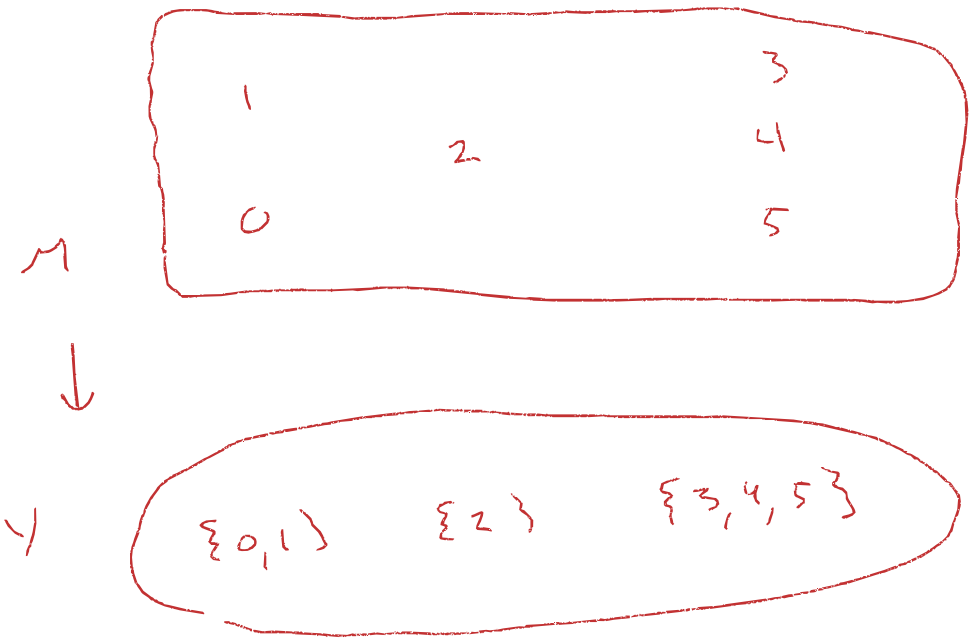


MERK: KVOTIENT FUNKSJONENE GÅR ~~MOTSATT~~ SAMME VEI



OBS! JEG SA "MOTSATT", MEN DET VAR EN FEIL-SNAKKELSE, DE GÅR SAMME VEI SOM FORFININGS-RELASJONEN, SOM ←TEGNINGEN VISER.

BILDE AV KVOTIENT FUNKSJONEN $M \longrightarrow Y$:



NOEN TRENINGSOPPGAVER

1) LA D VÆRE EN MENGDE, OG $P \subseteq D \times D$ EN PRE-ORDNING PÅ D, DET VIL SI EN REFLEKSIV OG TRANSITIV RELASJON.

DEFINER RELASJONEN $\sim$ PÅ D VED:

$$x \sim y \iff x P y \text{ OG } y P x$$

a) VIS AT $\sim$ ER EN EKVIVALENSRELASJON.

b) VIS AT RELASJONEN $\leq$ PÅ $D/_\sim$ DEFINERT VED

$$[x] \leq [y] \iff x P y$$

ER VELDEFINERT. (DET VIL SI AT HVIS $w \in [x]$ OG $v \in [y]$ OG $x P y$ SÅ MÅ OGSÅ $w P v$.)

c) VIS AT $\leq$ ER EN PARTIELL ORDNING.

2) LA $f : A \longrightarrow B$ VÆRE EN FUNKSJON SOM IKKE ER SURJEKTIV. HVORFOR ER IKKE $\{ f^{-1}(b) \mid b \in B \}$ EN PARTISJON AV A?

3) GJØR OPPGAVE 17.6 I BOKA. SKRIV NED ALLE DE 5 PARTISJONENE AV $\{1,2,3\}$ OG ORDNE DEM UNDER FORFININGS RELASJONEN.

FOR HVER PARTISJON SKRIV OGSÅ UT EKVIVALENSRELASJONEN PÅ $\{1,2,3\}$ SOM DEN SVARER TIL.

ORDNE EKVIVALENSRELASJONENE UNDER DELMENGDEREKASJONEN.

HVA SER DU?