Oppgaver til kapittel 7

7.1 La følgende relasjoner være definert fra S til T, der $S = \{1, 2, 3\}$ og $T = \{a, b, c, d\}$. For hver relasjon, avgjør om den er en funksjon. Dersom den er en funksjon, avgjør om den er injektiv, surjektiv, begge deler eller ingen av delene.

(a) $g = \{\langle 1, a\rangle, \langle 2, c\rangle\}$
(b) $h = \{\langle 1, d\rangle, \langle 2, d\rangle, \langle 3, d\rangle\}$
(c) $i = \{\langle 2, b\rangle, \langle 1, a\rangle, \langle 3, c\rangle\}$
(d) $j = \{\langle 3, c\rangle, \langle 2, a\rangle, \langle 3, b\rangle, \langle 1, d\rangle\}$

7.2 La $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{\spadesuit, \heartsuit, \clubsuit\}$ og $C = \{a, b, c\}$. La $f : A \to B$ og $g : B \to C$ være definert ved at $f = \{\langle 1, \spadesuit\rangle, \langle 2, \heartsuit\rangle, \langle 3, \heartsuit\rangle\}$ og $g = \{\langle \spadesuit, c\rangle, \langle \heartsuit, a\rangle, \langle \clubsuit, b\rangle\}$. Vi definerer $h : A \to C$ til å være sammensetningen av f og g, det vil si at $h(x) = g(f(x))$ for alle x.

(a) Definer h som en mengde av tupler.
(b) Hva er bildemengden til h, altså $h[A]$?

7.3 La $f : A \to A$ være definert ved $f(x) = \mathrm{id}_A(x)$. Husk at id_A er identitetsfunksjonen på A; det vil si at $\mathrm{id}_A(x) = x$ for alle $x \in A$. Fordi f er en funksjon, er den også en relasjon, og vi kan undersøke hvilke egenskaper den har.

(a) Er f en *operasjon*? Forklar.
(b) Er f en symmetrisk relasjon? Forklar.
(c) Er f en partiell ordning på A? Vis hvorfor eller hvorfor ikke.

7.4 Vi lar $\mathcal{U}$ være mengden av alle utsagnslogiske formler (se side 22). Vi definerer funksjonen $Z : \mathcal{U} \times \mathcal{U} \to \mathcal{U}$ ved

$$Z(F, G) = (F \wedge G).$$

Merk at vi ser på $(F \wedge G)$ rent *syntaktisk*, og vi ser altså ikke på tolkningen av formelen. For eksempel er $(P \wedge Q)$ *ikke* den samme formelen som $(Q \wedge P)$, selv om de er logisk ekvivalente. Det står noen flere hint etter deloppgavene.

(a) Hva er $Z((\neg P \wedge \neg Q), \neg\neg R)$ og $Z((R \vee \neg P), (P \wedge (P \wedge R)))$?
(b) Er Z injektiv? Forklar.
(c) Hva er bildemengden til Z?
(d) Er Z surjektiv? Forklar.

Hint: Vi lar altså F og G kunne være *hvilke som helst utsagnslogiske formler*. For eksempel kan vi ha at $F = \neg(P \wedge Q)$ og $G = (P \to Q)$. Da får vi:

$$Z(\neg(P \wedge Q), (P \to Q)) = (\neg(P \wedge Q) \wedge (P \to Q))$$

Vi kan også ha:

$$Z((P \vee Q), \neg Q) = ((P \vee Q) \wedge \neg Q) \quad \text{og} \quad Z(\neg\neg\neg M, (P \wedge P)) = (\neg\neg\neg M \wedge (P \wedge P))$$

Vi ser altså bare på symbolene i formelen (syntaksen) og bryr oss *ikke* om sannhetsverdien og tolkningen (semantikken).

Oppgaver til kapittel 8

8.1 Regn ut følgende mengder.

(a) $\mathcal{P}(\{2, a\})$ (b) $\{\emptyset, 2\} \cup \mathcal{P}(\{1\})$ (c) $\mathcal{P}(\{\emptyset, 4\})$ (d) $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\{57\}))$

8.2 I denne oppgaven skal vi bevise en av De Morgans lover, nemlig at $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ er sant for alle mengder A og B. Det gjør vi ved å først vise at $\overline{A \cup B} \subseteq \overline{A} \cap \overline{B}$, så vise $\overline{A} \cap \overline{B} \subseteq \overline{A \cup B}$. Vi skal ikke bruke Venn-diagrammer eller andre illustrasjoner i dette beviset, men derimot ord, symboler og setninger. Det holder med korte forklaringer, så lenge man får med essensen i beviset.

(a) Anta at x er et vilkårlig element i $\overline{A \cup B}$. Vis at x må være et element i $\overline{A} \cap \overline{B}$.
(b) Anta at x er et vilkårlig element i $\overline{A} \cap \overline{B}$. Vis at x må være et element i $\overline{A \cup B}$.
(c) Bruk resultatene i (a) og (b) til å konkludere med at $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ er sant for alle mengder A og B.

8.3 La $\mathcal{H}$ være mengden av alle positive halv-tall. Vi har altså at

$$\mathcal{H} = \{0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, \ldots\}.$$

Vis at $\mathcal{H}$ har samme kardinalitet som de naturlig tallene, altså at $|\mathcal{H}| = |\mathbb{N}|$.

8.4 Husk at en multimengde $[a_0, a_1, ..., a_n]$ er en samling objekter der rekkefølgen, men ikke antall forekomster av hvert element, ignoreres. Vi har altså at $[1, 2, 2] \neq [1, 2]$. Vi sier at **kardinaliteten** til en multimengde er antall elementer i den. Hver multimengde M gir opphav til en mengde $F(M)$ av alle tupler på formen $\langle x, n \rangle$, der x angir et element i M, og n angir hvor mange ganger x forekommer i M. For eksempel har vi at $F([a, a, b, c, c, c]) = \{ \langle a, 2 \rangle, \langle b, 1 \rangle, \langle c, 3 \rangle \}$. Generelt har vi at dersom et element x forekommer fem ganger i multimengden M, vil tuppelet $\langle x, 5 \rangle$ være med i $F(M)$.

(a) Hva blir $F([0, 1, 2, 3, 2, 3, 2, 5, 5])$?
(b) La M være en multimengde. Hvilken mengde har størst kardinalitet av M og $F(M)$? Gi en kort begrunnelse.
(c) Er $F(M)$ en funksjon? Forklar. Vi lurer altså *ikke* på om F er en funksjon, men på om $F(M)$ er en funksjon, altså det elementet som funksjonen F returnerer for argumentet M.