Oppgaver til kapittel 13

13.1 La en signatur være $\langle a, b ; f, g ; P, R, Q \rangle$, der ariteten til f og P er én, ariteten til g og R er to, og ariteten til Q er null. Avgjør om følgende uttrykk er førsteordens *termer* eller ikke, ved å følge definisjonen av termer til punkt og prikke, det vil si med alle parenteser og kommaer på plass. Gi en kort begrunnelse for hvert svar.

(a) $R(a, h(a))$ (b) $P(x)$ (c) (a) (d) $f(a, g(a, b))$

13.2 La signaturen være den samme som i forrige oppgave. Avgjør om følgende utrykk er førsteordens *formler* eller ikke, ved å følge definisjonen av formler til punkt og prikke, det vil si med alle parenteser og kommaer på plass. Gi en kort begrunnelse for hvert svar.

(a) $\forall x \exists y$ (b) $g(x, a)$ (c) $(P(a))$ (d) $(Q \wedge P(z))$

13.3 Formlene under har ingen parenteser, men på grunn av presedensreglene kan vi tolke dem presist. Sett alle parenteser og kommaer på rett plass slik at formlene er korrekte. Alle formlene skal være i tråd med den induktivt definerte mengden av førsteordens formler. Ingenting annet skal endres, og betydningen av formelene skal ikke forandres.

(a) $Rxy \rightarrow Pa \wedge \neg \forall x Px$ (b) $\exists x \forall y \neg Px \vee Rxy$

13.4 Vi har lov til å droppe parenteser når vi skriver termer, men det må i så fall være helt entydig hva termene betyr. For eksempel skriver vi ofte hha i stedet for $h(h(a))$. Det er nokså uproblematisk, særlig om vi på forhånd vet hva ariteten til alle symbolene er. Men, se på følgende term med fire symboler. Den kan tolkes på tre forskjellige måter, avhengig av *ariteten* til de ulike symbolene. Vi antar at vi bruker prefiksnotasjon her. Forklar og finn de tre måtene å tolke termen på.

$$free$$

Oppgaver til kapittel 14

14.1 Anta $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ og $\mathfrak{c}$ er konstantsymboler som tolkes som Arne, Bjarne og Carl. Anta vi har relasjonssymbolene P, U, S og F der Px tolkes som *x er populær*, Ux tolkes som *x er usikker*, Sxy tolkes som *x er sjalu på y* og Fxy tolkes som *x er forelsket i y*. Finn førsteordens formler som representerer følgende utsagn:

(a) Bjarne er usikker.
(b) Carl er sjalu på noen.
(c) Carl er forelsket i Arne, men ikke i Bjarne.
(d) Alle er forelsket i noen.
(e) Arne er sjalu på noen som både er usikker og populær.
(f) Ingen er forelsket i Carl.
(g) Arne er sjalu på alle, men Bjarne er ikke det.
(h) De som er forelsket i seg selv er populære, men usikre.

14.2 Anta at konstantsymbolene $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$ og $\mathfrak{c}$ tolkes som Astrid, Bodil og Camilla. Anta at K, O, S og F er relasjonssymboler slik at Kx tolkes som x *har et stort kontor*, Ox tolkes som x *jobber overtid*, Sxy tolkes som x *er sjefen til* y og Fxy tolkes som x *er flinkere enn* y. Finn *gode* og *naturlige* norske setninger for følgende førsteordens formler.

(a) $(Kb \wedge \neg O\mathfrak{a})$
(b) $\forall x Ox$
(c) $\exists x(Ox \wedge Sxc)$
(d) $\forall x(Fbx \to \neg Kx)$
(e) $\forall x \exists y Fyx$
(f) $(\forall x Scx \wedge \exists y Ky)$
(g) $\exists x \forall y(Oy \to Fxy)$
(h) $\forall x \forall y(Sxy \to \exists z Szx)$

14.3 Avgjør om følgende formler er lukkede eller ikke. Hvis de ikke er det, oppgi de frie variablene. Kun $\mathfrak{a}$ og $\mathfrak{b}$ er konstantsymboler.

(a) $\forall x(Px \wedge \neg Px)$
(b) $\forall x P\mathfrak{a}$
(c) $\exists x \exists y Px \vee Py$
(d) $\forall x \exists y(Rxy \to \neg \exists z Ryb)$
(e) $\forall x(Py \wedge \neg Px)$
(f) $(\forall x Px \wedge Qx)$
(g) $P\mathfrak{a} \to Px$
(h) $\forall x \forall y \forall x(Rxy \to Ryz)$

14.4 La Fx bety at «x er en forsker». Uttrykk følgende utsagn ved hjelp av førsteordens formler, hvor vi kun har lov til å bruke F, og eventuelt $=$ eller $\neq$, som relasjonssymboler.

(a) Det finnes to personer som er forskere.
(b) Det finnes nøyaktig én forsker.