Oppgaver til kapittel 21

21.1 Anta at vi har en enkel graf G med følgende noder og kanter:

$$V = \{a, b, c, d, e\} \qquad E = \{\{a, b\}, \{a, c\}, \{e, c\}, \{e, b\}, \{c, d\}, \{d, e\}\}$$

(a) Tegn denne grafen.
(b) Er dette en komplett graf? Hvis ja, hvorfor? Hvis nei, hva mangler?
(c) Hva er nodene og kantene til $\overline{G}$, komplementet til G?

21.2 (a) Hva er summen av gradene i en graf med fem noder og tre kanter?
(b) Hva er summen av gradene i en graf med tre noder og fem kanter?
(c) Hva er summen av gradene i K_4, den komplette grafen med fire noder?
(d) Hva er summen av gradene til $\overline{K_5}$, komplementet til K_5?

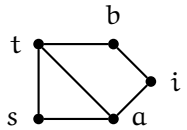
21.3 (a) Finn en *rettet* graf med nøyaktig fire noder og tre kanter, og definer denne presist som en mengde med noder og en mengde med kanter. Tegn deretter grafen.
(b) Anta at en enkel, rettet graf har nodene $\{a, b, c\}$. Hvor mange forskjellige rettede grafer kan denne gi opphav til? Du trenger kun å oppgi tallet. (Vi tillater altså ikke løkker eller parallelle kanter, men to noder kan ha to kanter mellom seg dersom de har forskjellig retning.)
(c) Hva er svaret på (b) dersom vi ikke tillater at to noder har to kanter mellom seg?
(d) Hva er svaret på (b) for en graf med n noder (hvor $n \geqslant 2$)?

21.4 La G være grafen med nodene $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ og kantene

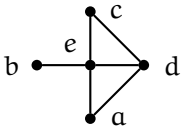
$$\{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{2, 5\}, \{3, 4\}, \{4, 5\}\}.$$

For hver av grafene nedenfor, avgjør om denne grafen er isomorf med G. Hvis den er det, gi en isomorfi fra G til grafen. Hvis ikke, forklar hvorfor de ikke er isomorfe.

(a) Grafen H_1 med noder $\{a, b, c, d\}$ og kanter $\{\{a, b\}, \{b, a\}, \{a, c\}, \{c, d\}, \{d, a\}, \{b, c\}\}$.
(b) Grafen H_2 med noder $\{e, f, s, o, i\}$ og kanter $\{\{o, s\}, \{f, s\}, \{i, f\}, \{e, i\}, \{o, e\}, \{o, f\}\}$.
(c) Grafen H_3:

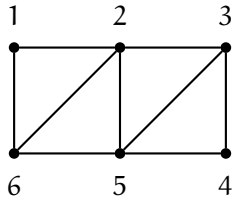


(d) Grafen H_4:



Oppgaver til kapittel 22

22.1 Se på følgende graf.

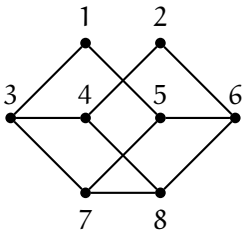


(a) Har denne grafen en *eulerkrets*?
Hvis ja, gi minst ett eksempel; hvis nei, forklar hvorfor det ikke kan finnes en slik.

(b) Har denne en *eulervei*?
Hvis ja, gi minst ett eksempel; hvis nei, forklar hvorfor det ikke kan finnes en slik.

(c) Har denne grafen en *hamiltonsti* eller en *hamiltonsykel*?
Hvis ja, gi minst ett eksempel; hvis nei, forklar hvorfor det ikke kan finnes en slik.

22.2 Se på følgende graf.



(a) Har denne grafen en *eulerkrets*?
Hvis ja, gi minst ett eksempel; hvis nei, forklar hvorfor det ikke kan finnes en slik.

(b) Har denne en *eulervei*?
Hvis ja, gi minst ett eksempel; hvis nei, forklar hvorfor det ikke kan finnes en slik.

(c) Har denne grafen en *hamiltonsti* eller en *hamiltonsykel*?
Hvis ja, gi minst ett eksempel; hvis nei, forklar hvorfor det ikke kan finnes en slik.

22.3 La $u \leftrightsquigarrow v$ bety at det finnes en *sti* fra u til v, for en gitt urettet graf. Bevis at $\leftrightsquigarrow$ er en *ekvivalensrelasjon*, det vil si at den er refleksiv, symmetrisk og transitiv. Hvilke ekvivalensklasser gir denne relasjonen gir opphav til? Det vil si, hva er det som skiller en ekvivalensklasse fra en annen?

Tips: Legg merke til at det står *sti* og ikke *vandring* her. Dersom du bruker LaTeX, får du $\leftrightsquigarrow$ ved å skrive `\leftrightsquigarrow`.

22.4 (a) Anta at T_1 og T_2 er trær. La N_1 og N_2 stå for nodene og E_1 og E_2 stå for kantene i disse trærne. Anta at N_1 og N_2 ikke har noen noder til felles og at E_1 og E_2 ikke har noen kanter til felles. La $n_1 \in N_1$ og $n_2 \in N_2$. La T være grafen som består av nodene $N_1 \cup N_2$ og kantene $E_1 \cup E_2$ i tillegg til kanten $\{n_1, n_2\}$. Vis at T er et tre.

(b) Bevis at alle komplette grafer med minst tre noder har en hamiltonsykel.