Sortering: Merge, Quick, Bucket, Radix

IN2010 – Algoritmer og Datastrukturer

Lars Tveito

Institutt for informatikk, Universitetet i Oslo
larstvei@ifi.uio.no

Høsten 2022

Litt mer om sortering

Litt mer om sortering

- I forrige uke så vi fire sorteringsalgoritmer
- Denne uken skal vi se fire nye
- Men først skal vi lære to nye begreper

Stabilitet

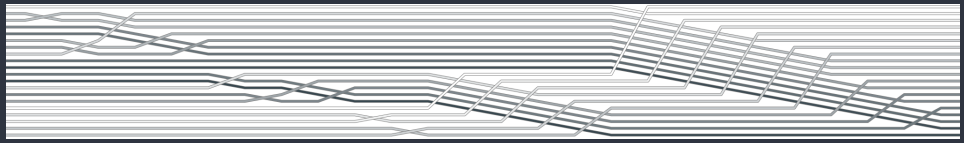
- Ofte sorterer vi på *nøkler*
  - for eksempel kan man sortere et person-objekt etter navn
- En sorteringsalgoritme kalles *stabil* dersom
  - for alle elementer *x*, *y* med samme nøkkel *k*
  - hvis *x* forekom før *y* før sortering
  - så forekommer *x* før *y* etter sortering
- Om en sorteringsalgoritme er stabil kan være implementasjonsavhengig

In-place

- En algoritme er in-place dersom den ikke bruker ekstra datastrukturer
- Å mellomlagre resultater i en annen datastruktur er ikke in-place
- I konteksten av sorteringsalgoritmer betyr det at algortimen bruker $\mathcal{O}(1)$ minne
- Alle algoritmene vi så forrige uke var in-place
  - men heapsort kan naturlig implementeres uten å være in-place
  - (lag en ny heap, push alle elementer på, pop dem av)

Merge sort

Merge sort – Idé



- Idéen bak merge sort er å splitte arrayet i to ca. like store deler
  - sortere de to mindre arrayene
  - så flette (eller «merge») de to sorterte arrayene sammen
- Litt mer presist:
  - la *n* angi størrelsen på arrayet `A`
  - hvis $n \leq 1$, returner `A`
  - la $i = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$
  - splitt arrayet i to deler `A[0..i-1]` og `A[i..n-1]`
  - anvend merge sort rekursivt på `A[0..i-1]` og `A[i..n-1]`
  - flett sammen `A[0..i-1]` og `A[i..n-1]` sortert

Merge sort – Merge

Algorithm: Sortert fletting av to arrayer

Input: To sorterte arrayer A_1 og A_2 og et array A, der $|A_1| + |A_2| = |A| = n$
Output: Et sortert array A med elementene fra A_1 og A_2

```
1  Procedure Merge(A_1, A_2, A)
2      i ← 0
3      j ← 0
4      while i < |A_1| and j < |A_2| do
5          if A_1[i] ≤ A_2[j] then
6              A[i + j] ← A_1[i]
7              i ← i + 1
8          else
9              A[i + j] ← A_2[j]
10             j ← j + 1
11     while i < |A_1| do
12         A[i + j] ← A_1[i]
13         i ← i + 1
14     while j < |A_2| do
15         A[i + j] ← A_2[j]
16         j ← j + 1
17     return A
```

Merge sort – Implementasjon

Algorithm: Merge sort

`Input:` Et array `A` med n elementer
`Output:` Et *sortert* array med de samme n elementene

```
1 Procedure MergeSort(A)
2     if n ≤ 1 then
3         return A
4     i ← ⌊n/2⌋
5     A_1 ← MergeSort(A[0..i-1])
6     A_2 ← MergeSort(A[i..n-1])
7     return Merge(A_1, A_2, A)
```

- Her angir `A[0..i-1]` å lage *et nytt* array med elementene `A[0],A[1],...,A[i-1]`

Merge sort – Kjøretidsanalyse (`Merge`)

Algorithm: Sortert fletting av to arrayer

```
1  Procedure Merge(A_1, A_2, A)
2      i ← 0
3      j ← 0
4
5      while i < |A_1| and j < |A_2| do
6          if A_1[i] ≤ A_2[j] then
7              A[i + j] ← A_1[i]
8              i ← i + 1
9          else
10             A[i + j] ← A_2[j]
11             j ← j + 1
12
13     while i < |A_1| do
14         A[i + j] ← A_1[i]
15         i ← i + 1
16
17     while j < |A_2| do
18         A[i + j] ← A_2[j]
19         j ← j + 1
20
21     return A
```

- Vi analyserer hvor mange iterasjoner som gjøres totalt
- Merk at hver iterasjon øker i eller j med én
  - Og at vi terminerer når $i = |A_1|$ og $j = |A_2|$
- Videre er $|A_1| + |A_2| = |A| = n$
- Da har vi at `Merge` er i $\mathcal{O}(n)$

Merge sort – Kjøretidsanalyse (`MergeSort`)

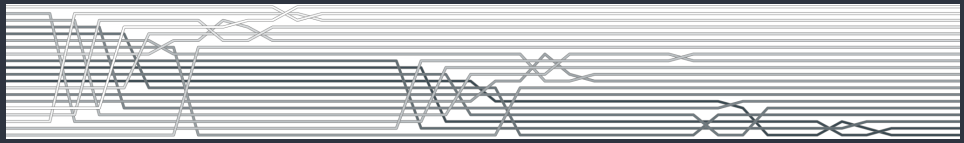
- Merk at vi får to rekursive kall for hvert kall
- Samtidig halverer vi input i hvert kall
- Vi gjør en $\mathcal{O}(n)$ operasjoner for hvert kall
- Dybden på rekursjonen er $\mathcal{O}(\log(n))$
  - fordi det er så mange ganger vi kan halvere input
- Da har vi at `MergeSort` er i $\mathcal{O}(n \log(n))$

Algorithm: Merge sort

```
1 Procedure MergeSort(A)
2     if n ≤ 1 then
3         return A
4     i ← ⌊n/2⌋
5     A_1 ← MergeSort(A[0..i-1])
6     A_2 ← MergeSort(A[i..n-1])
7     return Merge(A_1, A_2, A)
```

Quicksort

Quicksort – Idé



- Idéen bak quicksort er å velge et element, så
  - samle alt som er mindre enn elementet til venstre for det
  - samle alt som er større enn elementet til høyre for det
  - gjør dette rekursivt
- Litt mer presist:
  - vi velger en $0 \leq i < n$ som kalles pivot-elementet
    - søk fra venstre mot høyre etter et element som er større enn `A[i]`
    - søk fra høyre mot venstre etter et element som er mindre enn `A[i]`
    - bytt plass på disse, og søk etter nye som kan byttes
    - avslutt når høyre og venstre søkene krysser
  - fortsett rekursivt på alle som er hhv. til venstre og høyre for pivot

Quicksort – Haskell (ikke pensum)

```
qs []     = []
qs (x:xs) = qs ys ++ [x] ++ qs zs
    where (ys, zs) = partition (<x) xs
```

- En enkel (men ikke *veldig* rask) implementasjon av quicksort i Haskell
- Første linje sier at quicksort (`qs`) av en tom liste gir en tom liste
- Andre linje sier at
  - `x` er første elementet i en liste, og `xs` er resten av elementene
  - vi skal rekursivt kalle `qs` på `ys` og `zs`, og plassere `x` i midten
- Tredje linje sier at
  - `xs` splittes opp i to lister `ys` og `zs`
  - der alt i `ys` er mindre enn `x`
  - og alt i `zs` er ikke mindre enn `x`

Quicksort – Velge pivot

- Valget av pivot er avgjørende for at quicksort skal være effektiv
- Man har ingen *effektiv* måte å finne det *beste* pivot-elementet
  - Det ideelle pivot-elementet er medianverdien av arrayet
  - Å finne medianverdien krever sortering, så vinninga går opp i spinninga
- Vanlige strategier er
  - Velg tilfeldig
  - Velg medianverdien av `A[0]`, `A[`$\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$`]` og `A[n-1]`
- Å velge første eller siste som pivot gir verste tilfelle for arrayer som allerede er sortert
- Vi antar en funksjon `ChoosePivot` som velger pivot etter en rimelig strategi

Quicksort – Partition

Algorithm: Partition

Input: Et array A med n elementer, low og high er indekser
Output: Flytter elementer som er hhv. mindre og større til venstre og høyre enn en gitt index som returneres

```
1  Procedure Partition(A, low, high)
2      p ← ChoosePivot(A, low, high)
3      A[p], A[high] ← A[high], A[p]
4      pivot ← A[high]
5      left ← low
6      right ← high − 1
7      while left ≤ right do
8          while left ≤ right and A[left] ≤ pivot do
9              left ← left + 1
10         while right ≥ left and A[right] ≥ pivot do
11             right ← right − 1
12         if left < right then
13             A[left], A[right] ← A[right], A[left]
14     A[left], A[high] ← A[high], A[left]
15     return left
```

Quicksort – Implementasjon

Algorithm: Quicksort

Input: Et array A med *n* elementer, low og high er indekser
Output: Et *sortert* array med de samme *n* elementene

```
1 Procedure Quicksort(A, low, high)
2     if low ≥ high then
3         return A
4     p ← Partition(A, low, high)
5     Quicksort(A, low, p - 1)
6     Quicksort(A, p + 1, high)
7     return A
```

- Vi kaller på `Quicksort`$(A, 0, n-1)$ for å sortere hele arrayet

Quicksort – Kjøretidsanalyse

- `Partition` er i $\mathcal{O}(high - low)$
  - lineær tid med hensyn til den delen av arrayet vi ser på
- Vi gjør rekursive kall der $high - low$ stadig blir mindre
- I *verste tilfelle* er $p = low$ eller $p = high$ i hvert kall
  - Dette skjer hvis vi velger første element som pivot på et array som allerede er sortert
- Verste tilfelle er $\mathcal{O}(n^2)$ fordi vi får $\mathcal{O}(n)$ rekursive kall
  - og hvert rekursive kall har lineær tid
- I beste tilfelle er pivot-elementet den «midterste» verdien i arrayet
  - da halverer vi arbeidet for hvert rekursive kall, som gir $\mathcal{O}(n \log(n))$
- Quicksort har $\mathcal{O}(n^2)$ i verste tilfellet
  - Men dette skjer sjeldent, så den er *som regel* svært effektiv

Algorithm: Quicksort

```
1 Procedure Quicksort(A, low, high)
2   if low ≥ high then
3     return A
4   p ← Partition(A, low, high)
5   Quicksort(A, low, p - 1)
6   Quicksort(A, p + 1, high)
7   return A
```

Bucket sort

Bucket sort – Introduksjon

- Alle sorteringsalgoritmene vi har sett til nå er basert på sammenligning
  - slike sorteringsalgoritmer kan ikke bli bedre en $\mathcal{O}(n \log(n))$!
- Hvis vi vet mer om verdiene som skal sorteres, kan vi få til noe bedre
- Bucket sort går ut på å lage *N* bøtter
  - hvor hver bøtte svarer til en kategori eller sort, der kategoriene er ordnet
- Elementene vi skal sortere har en kategori, som vi kaller nøkkelen
- I bucket sort plasserer vi hvert element i riktig bøtte basert på nøkkelen
- Så løper vi gjennom hver bøtte og plasserer elementene tilbake i arrayet
- Merk at man noen ganger ønsker å sortere bøttene hver for seg
  - De lærde virker til å strides på dette punktet

Bucket sort – Kortstokk

- Vi kan definere en ordning på kort, slik at

$$A < 2 < 3 < \cdots < 10 < J < Q < K$$

- Videre har vi at

$$\clubsuit < \diamondsuit < \spadesuit < \heartsuit$$

- Vi ønsker å sortere kort vi får på hånden, slik at
  - alle med samme sort kommer sammen
  - hver sort er innbyrdes sortert
- Det kan vi oppnå ved å gjøre to bucket sort
  - sorter først på verdi
  - så sorter på sort

Bucket sort – Kortstokk (eksempel)

A♡ 2♡ A♣ J♣ 9♠ 6♢ 7♢ 7♣ K♡ 8♡

[A♡ A♣] [2♡] [] [] [] [6♢] [7♢ 7♣] [8♡] [9♠] [] [J♣] [] [K♡]

A♡ A♣ 2♡ 6♢ 7♢ 7♣ 8♡ 9♠ J♣ K♡

[A♣ 7♣ J♣] [6♢ 7♢] [9♠] [A♡ 2♡ 8♡ K♡]

A♣ 7♣ J♣ 6♢ 7♢ 9♠ A♡ 2♡ 8♡ K♡

Bucket sort – Implementasjon

Algorithm: Bucket sort

Input: Et array A med n elementer
Output: Et array med de samme n elementene *sortert etter nøkler*

```
1  Procedure BucketSort(A)
2      La B være et array med N tomme lister
3      for i ← 0 to n − 1 do
4          La k være nøkkelen assosiert med A[i]
5          Legg til A[i] på slutten av listen B[k]
6      j ← 0
7      for k ← 0 to N − 1 do
8          for hver x i listen B[k] do
9              A[j] ← x
10             j ← j + 1
11     return A
```

Bucket sort – Kjøretidsanalyse

- Først må vi gå gjennom alle elementene
  - Dette er $\mathcal{O}(n)$
- Vi går gjennom alle bøttene
  - Dette er $\mathcal{O}(N)$
- For hver bøtte, går vi gjennom elementene i bøtta
- Men det er bare n elementer i bøttene!
  - Kun n elementer i *alle bøttene tilsammen*
- Som gir $\mathcal{O}(N + n)$
- Hvis N er liten er dette strålende!

Algorithm: Bucket sort

```
1  Procedure BucketSort(A)
2      La B være et array med N tomme lister
3      for i ← 0 to n − 1 do
4          La k være nøkkelen assosiert med A[i]
5          Legg til A[i] på slutten av listen B[k]
6      j ← 0
7      for k ← 0 to N − 1 do
8          for hver x i listen B[k] do
9              A[j] ← x
10             j ← j + 1
11     return A
```

Radix sort

Radix sort – Idé

- Radix sort er nært beslektet bucket sort
  - (noen vil ikke engang skille mellom disse algoritmene)
- Eksempelet vi så med å sortere kort, er faktisk en type radix sort
- En svært god intuisjon for radix sort er at det er
  - *suksessiv anvendelse av bucket sort*
- Radix sort kan brukes for data som kan ordnes *leksikografisk*

Radix sort – Leksikografiske ordninger

- Leksikografiske ordninger er en generalisering av alfabetisk rekkefølge
  - Vi kan ordne ord etter bokstavene (som i seg selv er ordnet)
    - der første bokstav prioriteres over andre, som prioriteres over tredje, osv…
  - Vi kan ordne tall på samme måte
    - der første siffer prioriteres over andre, som prioriteres over tredje, osv…
- Mer generelt kan vi tenke oss tupler med symboler $(a_1, a_2, \ldots, a_d)$
- Vi sier at $(a_1, a_2, \ldots, a_d) < (b_1, b_2, \ldots, b_d)$ hvis
  - $a_1 < b_1$ eller
  - $a_1 = b_1$ og $(a_2, \ldots, a_d) < (b_2, \ldots, b_d)$
- Fra korteksempelet har vi for eksempel at $7\clubsuit < J\clubsuit$
  - fordi $\clubsuit = \clubsuit$, men $7 < J$

Radix sort – Eksempel (heltall)

$$1814, 232, 2888, 31, 1455, 2242, 4345, 1470, 515, 3632$$

$$181\underline{4}, 023\underline{2}, 288\underline{8}, 003\underline{1}, 145\underline{5}, 224\underline{2}, 434\underline{5}, 147\underline{0}, 051\underline{5}, 363\underline{2}$$

$$[147\underline{0}]\ [003\underline{1}]\ [023\underline{2}, 224\underline{2}, 363\underline{2}]\ []\ [181\underline{4}]\ [145\underline{5}, 434\underline{5}, 051\underline{5}]\ []\ []\ [288\underline{8}]\ []$$

$$14\underline{7}0, 00\underline{3}1, 02\underline{3}2, 22\underline{4}2, 36\underline{3}2, 18\underline{1}4, 14\underline{5}5, 43\underline{4}5, 05\underline{1}5, 28\underline{8}8$$

$$[]\ [18\underline{1}4, 05\underline{1}5]\ []\ [00\underline{3}1, 02\underline{3}2, 36\underline{3}2]\ [22\underline{4}2, 43\underline{4}5]\ [14\underline{5}5]\ []\ [14\underline{7}0]\ [28\underline{8}8]\ []$$

$$1\underline{8}14, 0\underline{5}15, 0\underline{0}31, 0\underline{2}32, 3\underline{6}32, 2\underline{2}42, 4\underline{3}45, 1\underline{4}55, 1\underline{4}70, 2\underline{8}88$$

$$[00\underline{3}1]\ []\ [02\underline{3}2, 22\underline{4}2]\ [43\underline{4}5]\ [14\underline{5}5, 14\underline{7}0]\ [05\underline{1}5]\ [36\underline{3}2]\ []\ [18\underline{1}4, 28\underline{8}8]\ []$$

$$\underline{0}031, \underline{0}232, \underline{2}242, \underline{4}345, \underline{1}455, \underline{1}470, \underline{0}515, \underline{3}632, \underline{1}814, \underline{2}888$$

$$[\underline{0}031, \underline{0}232, \underline{0}515]\ [\underline{1}455, \underline{1}470, \underline{1}814]\ [\underline{2}242, \underline{2}888]\ [\underline{3}632]\ [\underline{4}345]\ []\ []\ []\ []\ []$$

$$0031, 0232, 0515, 1455, 1470, 1814, 2242, 2888, 3632, 4345$$

$$31, 232, 515, 1455, 1470, 1814, 2242, 2888, 3632, 4345$$

Radix sort – Implementasjon for positive heltall

Algorithm: Radix sort for positive heltall

Input: Et array A med n positive heltall
Output: Et *sortert* array med de samme n positive heltallene

```
1 Procedure RadixSort(A)
2     d ← antall siffer i det største tallet
3     for i ← d − 1 down to 0 do
4         A ← BucketSort(A) etter det ite sifferet
5     return A
```

Radix sort – Kjøretidsanalyse

- Vi vet allerede at `BucketSort` er i $\mathcal{O}(N+n)$
- Radix sort må gjøre d antall bucket sort
  - I tillegg må man beregne d (som tar $\mathcal{O}(n)$ tid)
- Generelt er radix sort i $\mathcal{O}(d(N+n))$
- For heltall kan vi sette $N = 10$
  - (dersom vi bruker titallsystemet)
- Da får vi $\mathcal{O}(d(10+n)) = \mathcal{O}(d \cdot n)$
- Hvis vi vet at tallene ikke blir større enn 10^9
  - Et naturlig valg, siden $10^9 < 2^{32}$
- Så får vi $\mathcal{O}(9 \cdot n) = \mathcal{O}(n)$

Algorithm: Radix sort

```
1 Procedure RadixSort(A)
2     d ← antall siffer i det største tallet
3     for i ← d − 1 down to 0 do
4         A ← BucketSort(A) etter det ite sifferet
5     return A
```