Trær, Binære Søketrær og AVL-trær

IN2010 – Algoritmer og Datastrukturer

Lars Tveito

Institutt for informatikk, Universitetet i Oslo
larstvei@ifi.uio.no

Høsten 2023

Oversikt

Oversikt

- Vi skal lære om binære søketrær

Oversikt

- Vi skal lære om binære søketrær
  - En datastruktur for raskt oppslag

Oversikt

- Vi skal lære om binære søketrær
  - En datastruktur for raskt oppslag
- Vi skal lære om AVL-trær, som er selvbalanserende varianter av binære søketrær

Oversikt

- Vi skal lære om binære søketrær
  - En datastruktur for raskt oppslag
- Vi skal lære om AVL-trær, som er selvbalanserende varianter av binære søketrær
  - Vi skal nevne rød-svarte trær, som er et alternativ til AVL-trær

Trær

Trær

- Det er to store kategorier med anvendelser av trær:

Trær

- Det er to store kategorier med anvendelser av trær:
  - Det du jobber med har en iboende hierarkisk struktur

Trær

- Det er to store kategorier med anvendelser av trær:
  - Det du jobber med har en iboende hierarkisk struktur
  - Effektiv implementasjon for datasamlinger (eksempelvis mengder og ordbøker)

Trær

- Det er to store kategorier med anvendelser av trær:
  - Det du jobber med har en iboende hierarkisk struktur
  - Effektiv implementasjon for datasamlinger (eksempelvis mengder og ordbøker)
- Dere kjenner allerede til lister, som er definert som

Trær

- Det er to store kategorier med anvendelser av trær:
  - Det du jobber med har en iboende hierarkisk struktur
  - Effektiv implementasjon for datasamlinger (eksempelvis mengder og ordbøker)
- Dere kjenner allerede til lister, som er definert som
  - en tom liste — ofte representert med `null` — eller

Trær

- Det er to store kategorier med anvendelser av trær:
  - Det du jobber med har en iboende hierarkisk struktur
  - Effektiv implementasjon for datasamlinger (eksempelvis mengder og ordbøker)
- Dere kjenner allerede til lister, som er definert som
  - en tom liste — ofte representert med `null` — eller
  - en node som består av en peker til et element og en peker til en liste

Trær

- Det er to store kategorier med anvendelser av trær:
  - Det du jobber med har en iboende hierarkisk struktur
  - Effektiv implementasjon for datasamlinger (eksempelvis mengder og ordbøker)
- Dere kjenner allerede til lister, som er definert som
  - en tom liste — ofte representert med `null` — eller
  - en node som består av en peker til et element og en peker til en liste
- Alle lister *er trær*, men ikke alle trær er lister

Trær

- Det er to store kategorier med anvendelser av trær:
  - Det du jobber med har en iboende hierarkisk struktur
  - Effektiv implementasjon for datasamlinger (eksempelvis mengder og ordbøker)
- Dere kjenner allerede til lister, som er definert som
  - en tom liste — ofte representert med `null` — eller
  - en node som består av en peker til et element og en peker til en liste
- Alle lister *er trær*, men ikke alle trær er lister
- Vi kan se på trær som en enkel utvidelse av lister

Trær

- Det er to store kategorier med anvendelser av trær:
  - Det du jobber med har en iboende hierarkisk struktur
  - Effektiv implementasjon for datasamlinger (eksempelvis mengder og ordbøker)
- Dere kjenner allerede til lister, som er definert som
  - en tom liste — ofte representert med `null` — eller
  - en node som består av en peker til et element og en peker til en liste
- Alle lister *er trær*, men ikke alle trær er lister
- Vi kan se på trær som en enkel utvidelse av lister
  - der vi tillater at en node har flere neste-pekere

Trær – eksempler

- Syntaksen i programmeringspråk utgjør trær

Trær – eksempler

- Syntaksen i programmeringspråk utgjør trær
  - Det første en kompilator gjør, er å gjøre koden din om til et *abstrakt syntakstre*

Trær – eksempler

- Syntaksen i programmeringspråk utgjør trær
  - Det første en kompilator gjør, er å gjøre koden din om til et *abstrakt syntakstre*
- HTML er et filformat som lar deg uttrykke trær

Trær – eksempler

- Syntaksen i programmeringspråk utgjør trær
  - Det første en kompilator gjør, er å gjøre koden din om til et *abstrakt syntakstre*
- HTML er et filformat som lar deg uttrykke trær
  - Så en nettside kan ses på som en bestemt måte å vise frem et tre

Trær – eksempler

- Syntaksen i programmeringspråk utgjør trær
  - Det første en kompilator gjør, er å gjøre koden din om til et *abstrakt syntakstre*
- HTML er et filformat som lar deg uttrykke trær
  - Så en nettside kan ses på som en bestemt måte å vise frem et tre
- Filsystemer er trær

Trær – eksempler

- Syntaksen i programmeringspråk utgjør trær
  - Det første en kompilator gjør, er å gjøre koden din om til et *abstrakt syntakstre*
- HTML er et filformat som lar deg uttrykke trær
  - Så en nettside kan ses på som en bestemt måte å vise frem et tre
- Filsystemer er trær
- Alle mulige sjakkpartier kan representeres som et (enormt) tre

Trær – definisjon

- Et tre er definert som

Trær – definisjon

- Et tre er definert som
  - det tomme treet — ofte representert med `null` — eller

Trær – definisjon

- Et tre er definert som
  - det tomme treet — ofte representert med `null` — eller
  - en node v med en peker til

Trær – definisjon

- Et tre er definert som
  - det tomme treet — ofte representert med `null` — eller
  - en node v med en peker til
    - et element

Trær – definisjon

- Et tre er definert som
  - det tomme treet — ofte representert med `null` — eller
  - en node v med en peker til
    - et element
    - 0 eller flere pekere til barnenoder, og

Trær – definisjon

- Et tre er definert som
  - det tomme treet — ofte representert med `null` — eller
  - en node v med en peker til
    - et element
    - 0 eller flere pekere til barnenoder, og
    - nøyaktig én foreldernode (med mindre v er roten)

Trær – definisjon

- Et tre er definert som
  - det tomme treet — ofte representert med `null` — eller
  - en node v med en peker til
    - et element
    - 0 eller flere pekere til barnenoder, og
    - nøyaktig én foreldernode (med mindre v er roten)
  - Et tre kan ikke inneholde sykler

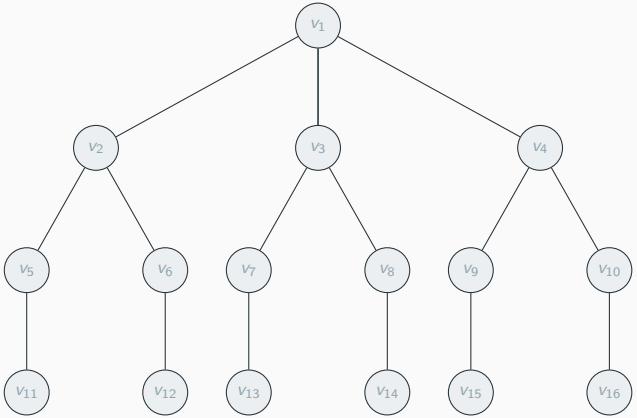
Trær – definisjon

- Et tre er definert som
  - det tomme treet — ofte representert med `null` — eller
  - en node v med en peker til
    - et element
    - 0 eller flere pekere til barnenoder, og
    - nøyaktig én foreldernode (med mindre v er roten)
  - Et tre kan ikke inneholde sykler
    - Altså: fra en node v kan du ikke nå v ved å følge pekere fra v

Trær – definisjon

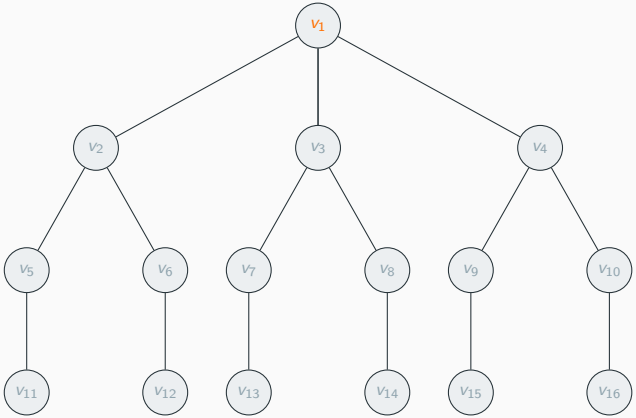
- Et tre er definert som
  - det tomme treet — ofte representert med `null` — eller
  - en node v med en peker til
    - et element
    - 0 eller flere pekere til barnenoder, og
    - nøyaktig én foreldernode (med mindre v er roten)
  - Et tre kan ikke inneholde sykler
    - Altså: fra en node v kan du ikke nå v ved å følge pekere fra v
- Merk: Boka tillater ikke tomme trær

Trær – terminologi



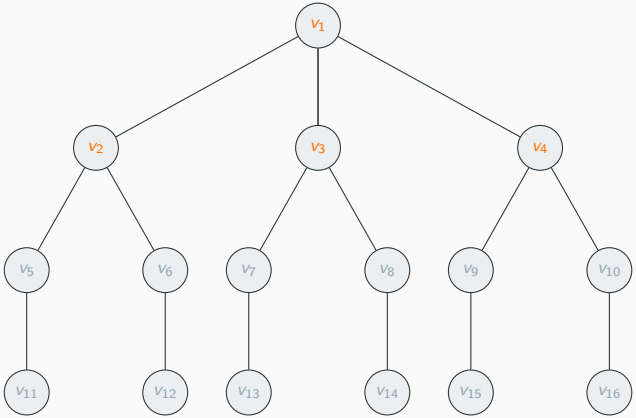
Dette er et tre, hver v_i er en node

Trær – terminologi



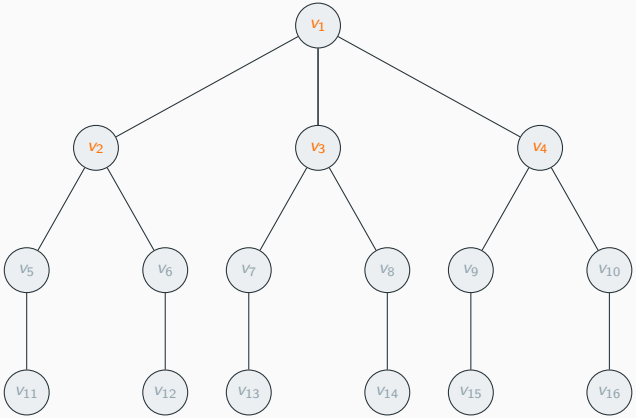
v_1 er *roten* av treet

Trær – terminologi



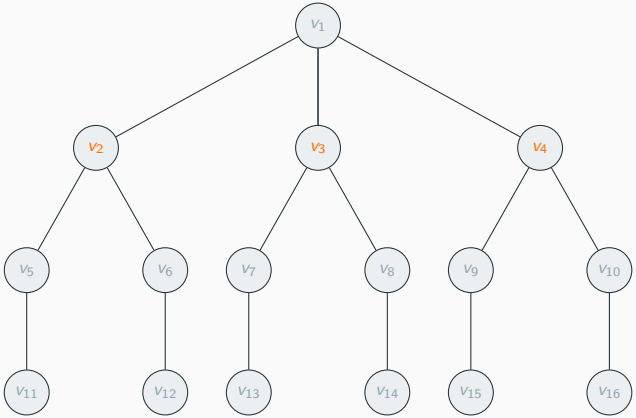
v_2, v_3 og v_4 er *barn* av v_1

Trær – terminologi



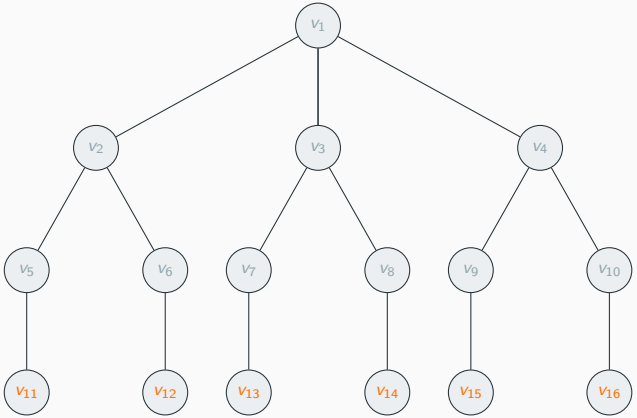
v_1 er *forelder* til v_2, v_3 og v_4

Trær – terminologi



v_2, v_3 og v_4 er *søsken*

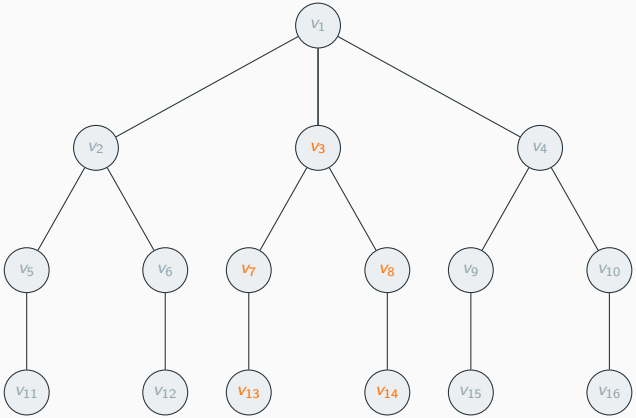
Trær – terminologi



$v_{11}, \ldots, v_{16}$ er *løvnoder*, eller *eksterne* noder

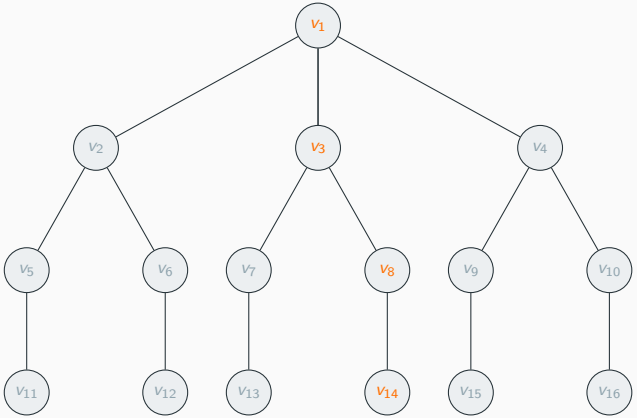
Nodene $v_1, \ldots, v_{10}$ er ikke løvnoder, eller *interne* noder

Trær – terminologi



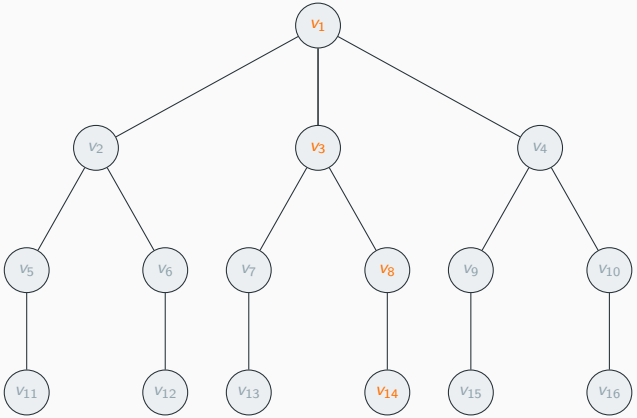
v_3, v_7, v_8, v_{13} og v_{14} utgjør et *subtre*, hvor v_3 er roten

Trær – terminologi



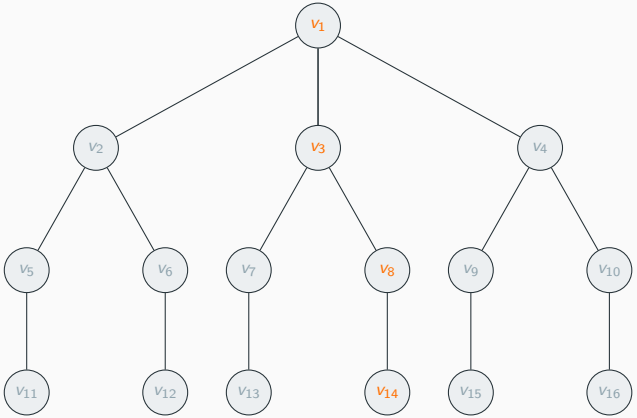
v_1, v_3, v_8 og v_{14} er *forfedre* av v_{14}

Trær – terminologi



v_1, v_3, v_8 og v_{14} er *etterkommere* av v_1

Trær – terminologi



Sekvensen v_1, v_3, v_8, v_{14} kalles en *sti*

Trær – Datastruktur

- `null` representerer et tomt tre

Trær – Datastruktur

- `null` representerer et tomt tre
- Anta at v er en node, da gir

Trær – Datastruktur

- **`null`** representerer et tomt tre
- Anta at v er en node, da gir
  - v`.element` dataen som er lagret i noden

Trær – Datastruktur

- **`null`** representerer et tomt tre
- Anta at v er en node, da gir
  - v.`element` dataen som er lagret i noden
  - v.`parent` foreldrenoden til v

Trær – Datastruktur

- **`null`** representerer et tomt tre
- Anta at v er en node, da gir
  - v`.element` dataen som er lagret i noden
  - v`.parent` foreldrenoden til v
  - v`.children` barnenodene til v

Trær – dybde

- Dybden til en node er én mer enn foreldrenoden

Trær – dybde

- Dybden til en node er én mer enn foreldrenoden
- Roten har dybde 0

Trær – dybde

- Dybden til en node er én mer enn foreldrenoden
- Roten har dybde 0
- Siden vi tillater et tomt tre gir vi det dybde -1

Trær – dybde

- Dybden til en node er én mer enn foreldrenoden
- Roten har dybde 0
- Siden vi tillater et tomt tre gir vi det dybde -1

Trær – dybde

- Dybden til en node er én mer enn foreldrenoden
- Roten har dybde 0
- Siden vi tillater et tomt tre gir vi det dybde -1

ALGORITHM: FINN DYBDEN AV EN GITT NODE

Input: En node v
Output: Dybden av noden

Trær – dybde

- Dybden til en node er én mer enn foreldrenoden
- Roten har dybde 0
- Siden vi tillater et tomt tre gir vi det dybde -1

Algorithm: Finn dybden av en gitt node

Input: En node v
Output: Dybden av noden

```
1 Procedure Depth(v)
```

Trær – dybde

- Dybden til en node er én mer enn foreldrenoden
- Roten har dybde 0
- Siden vi tillater et tomt tre gir vi det dybde -1

ALGORITHM: FINN DYBDEN AV EN GITT NODE

Input: En node v
Output: Dybden av noden

```
1 Procedure Depth(v)
2     if v = null then
3         return −1
```

Trær – dybde

- Dybden til en node er én mer enn foreldrenoden
- Roten har dybde 0
- Siden vi tillater et tomt tre gir vi det dybde -1

ALGORITHM: FINN DYBDEN AV EN GITT NODE

Input: En node v
Output: Dybden av noden

```
1 Procedure Depth(v)
2     if v = null then
3         return −1
4     return 1 + Depth(v.parent)
```

Trær – høyde

- Høyden av et tre er gitt av den høyeste avstanden til en etterkommer

Trær – høyde

- Høyden av et tre er gitt av den høyeste avstanden til en etterkommer
- Det vil si dybden av den dypeste *løvnoden*

Trær – høyde

- Høyden av et tre er gitt av den høyeste avstanden til en etterkommer
- Det vil si dybden av den dypeste *løvnoden*

Trær – høyde

- Høyden av et tre er gitt av den høyeste avstanden til en etterkommer
- Det vil si dybden av den dypeste *løvnoden*

ALGORITHM: FINN HØYDEN AV EN GITT NODE

Input: En node v
Output: Høyden av noden
1 **Procedure** `height`(v)

Trær – høyde

- Høyden av et tre er gitt av den høyeste avstanden til en etterkommer
- Det vil si dybden av den dypeste *løvnoden*

Algorithm: Finn høyden av en gitt node

Input: En node v
Output: Høyden av noden

```
1 Procedure height(v)
2     h ← −1
3     if v = null then
4         return h
```

Trær – høyde

- Høyden av et tre er gitt av den høyeste avstanden til en etterkommer
- Det vil si dybden av den dypeste *løvnoden*

ALGORITHM: FINN HØYDEN AV EN GITT NODE

Input: En node v
Output: Høyden av noden

```
1 Procedure height(v)
2     h ← −1
3     if v = null then
4         return h
5     for c ∈ v.children do
6         h ← Max(h, height(c))
```

Trær – høyde

- Høyden av et tre er gitt av den høyeste avstanden til en etterkommer
- Det vil si dybden av den dypeste *løvnoden*

ALGORITHM: FINN HØYDEN AV EN GITT NODE

Input: En node v
Output: Høyden av noden

```
1 Procedure height(v)
2     h ← −1
3     if v = null then
4         return h
5     for c ∈ v.children do
6         h ← Max(h, height(c))
7     return 1 + h
```

Trær – traversering

- Vi har måter for å systematisk gå gjennom (traversere) et tre på

Trær – traversering

- Vi har måter for å systematisk gå gjennom (traversere) et tre på
- Underveis har vi en operasjon vi ønsker å utføre

Trær – traversering

- Vi har måter for å systematisk gå gjennom (traversere) et tre på
- Underveis har vi en operasjon vi ønsker å utføre
- For mange operasjoner har *rekkefølgen* vi utfører operasjonen i en betydning

Trær – traversering

- Vi har måter for å systematisk gå gjennom (traversere) et tre på
- Underveis har vi en operasjon vi ønsker å utføre
- For mange operasjoner har *rekkefølgen* vi utfører operasjonen i en betydning
  - *preorder* utfører operasjonen på seg selv først, og barna etterpå

Trær – traversering

- Vi har måter for å systematisk gå gjennom (traversere) et tre på
- Underveis har vi en operasjon vi ønsker å utføre
- For mange operasjoner har *rekkefølgen* vi utfører operasjonen i en betydning
  - *preorder* utfører operasjonen på seg selv først, og barna etterpå
  - *postorder* utfører operasjonen på barna først, og seg selv etterpå

Trær – traversering

- Vi har måter for å systematisk gå gjennom (traversere) et tre på
- Underveis har vi en operasjon vi ønsker å utføre
- For mange operasjoner har *rekkefølgen* vi utfører operasjonen i en betydning
  - *preorder* utfører operasjonen på seg selv først, og barna etterpå
  - *postorder* utfører operasjonen på barna først, og seg selv etterpå
- For å kopiere et tre kan man bruke *preorder*, men ikke *postorder*

Trær – traversering

- Vi har måter for å systematisk gå gjennom (traversere) et tre på
- Underveis har vi en operasjon vi ønsker å utføre
- For mange operasjoner har *rekkefølgen* vi utfører operasjonen i en betydning
  - *preorder* utfører operasjonen på seg selv først, og barna etterpå
  - *postorder* utfører operasjonen på barna først, og seg selv etterpå
- For å kopiere et tre kan man bruke *preorder*, men ikke *postorder*
- For å slette et tre kan man bruke *postorder*, men ikke *preorder*

Trær – preorder og postorder

ALGORITHM: PREORDER TRAVERSERING

Input: En node v (som ikke er **null**)

Output: Utfør en operasjon på v først og barna til v etterpå

```
1 Procedure Preorder(v)
2     if v = null then
3         return
```

Trær – preorder og postorder

ALGORITHM: PREORDER TRAVERSERING

Input: En node v (som ikke er **null**)

Output: Utfør en operasjon på v først og barna til v etterpå

```
1 Procedure Preorder(v)
2     if v = null then
3         return
4     Operate on v
```

Trær – preorder og postorder

Algorithm: Preorder traversering

Input: En node v (som ikke er `null`)

Output: Utfør en operasjon på v først og barna til v etterpå

```
1 Procedure Preorder(v)
2     if v = null then
3         return
4     Operate on v
5     for c ∈ v.children do
6         Preorder(c)
```

Trær – preorder og postorder

ALGORITHM: PREORDER TRAVERSERING

Input: En node v (som ikke er **null**)
Output: Utfør en operasjon på v først og barna til v etterpå

```
1 Procedure Preorder(v)
2     if v = null then
3         return
4     Operate on v
5     for c ∈ v.children do
6         Preorder(c)
```

ALGORITHM: POSTORDER TRAVERSERING

Input: En node v (som ikke er **null**)
Output: Utfør en operasjon på barna til v først og v etterpå

```
1 Procedure Postorder(v)
2     if v = null then
3         return
```

Trær – preorder og postorder

ALGORITHM: PREORDER TRAVERSERING

Input: En node v (som ikke er **null**)
Output: Utfør en operasjon på v først og barna til v etterpå

```
1 Procedure Preorder(v)
2     if v = null then
3         return
4     Operate on v
5     for c ∈ v.children do
6         Preorder(c)
```

ALGORITHM: POSTORDER TRAVERSERING

Input: En node v (som ikke er **null**)
Output: Utfør en operasjon på barna til v først og v etterpå

```
1 Procedure Postorder(v)
2     if v = null then
3         return
4     for c ∈ v.children do
5         Postorder(c)
```

Trær – preorder og postorder

ALGORITHM: PREORDER TRAVERSERING

Input: En node v (som ikke er `null`)
Output: Utfør en operasjon på v først og barna til v etterpå

```
1 Procedure Preorder(v)
2     if v = null then
3         return
4     Operate on v
5     for c ∈ v.children do
6         Preorder(c)
```

ALGORITHM: POSTORDER TRAVERSERING

Input: En node v (som ikke er `null`)
Output: Utfør en operasjon på barna til v først og v etterpå

```
1 Procedure Postorder(v)
2     if v = null then
3         return
4     for c ∈ v.children do
5         Postorder(c)
6     Operate on v
```

Binære søketrær

Binære trær

- Et binærtre er et tre hvor hver node har maksimalt to barn

Binære trær

- Et binærtre er et tre hvor hver node har maksimalt to barn
- I binære trær referer vi til *venstre* og *høyre* barn

Binære trær

- Et binærtre er et tre hvor hver node har maksimalt to barn
- I binære trær referer vi til *venstre* og *høyre* barn
- Hvis v er en node i et binærtre, så gir

Binære trær

- Et binærtre er et tre hvor hver node har maksimalt to barn
- I binære trær referer vi til *venstre* og *høyre* barn
- Hvis v er en node i et binærtre, så gir
  - v.`element` dataen som er lagret i noden

Binære trær

- Et binærtre er et tre hvor hver node har maksimalt to barn
- I binære trær referer vi til *venstre* og *høyre* barn
- Hvis v er en node i et binærtre, så gir
  - v.`element` dataen som er lagret i noden
  - v.`left` venstre barn av v

Binære trær

- Et binærtre er et tre hvor hver node har maksimalt to barn
- I binære trær referer vi til *venstre* og *høyre* barn
- Hvis v er en node i et binærtre, så gir
  - v.`element` dataen som er lagret i noden
  - v.`left` venstre barn av v
  - v.`right` høyre barn av v

Binære søketrær

- Et binært søketre er et binærtre som oppfyller følgende egenskap

Binære søketrær

- Et binært søketre er et binærtre som oppfyller følgende egenskap
  - For hver node v så er v.`element`

Binære søketrær

- Et binært søketre er et binærtre som oppfyller følgende egenskap
  - For hver node v så er v.`element`
    - større enn alle elementer i venstre subtre, og

Binære søketrær

- Et binært søketre er et binærtre som oppfyller følgende egenskap
  - For hver node v så er v.`element`
    - større enn alle elementer i venstre subtre, og
    - mindre enn alle elementer i høyre subtre

Binære søketrær

- Et binært søketre er et binærtre som oppfyller følgende egenskap
  - For hver node v så er v.`element`
    - større enn alle elementer i venstre subtre, og
    - mindre enn alle elementer i høyre subtre
- Merk at vi kan si større *eller lik* dersom vi ønsker å tillate duplikater

Binære søketrær

- Et binært søketre er et binærtre som oppfyller følgende egenskap
  - For hver node v så er v.`element`
    - større enn alle elementer i venstre subtre, og
    - mindre enn alle elementer i høyre subtre
- Merk at vi kan si større *eller lik* dersom vi ønsker å tillate duplikater
- For at vi skal kunne bruke binære søketrær må elementene være *sammenlignbare*

Binære søketrær

- Et binært søketre er et binærtre som oppfyller følgende egenskap
  - For hver node v så er v.`element`
    - større enn alle elementer i venstre subtre, og
    - mindre enn alle elementer i høyre subtre
- Merk at vi kan si større *eller lik* dersom vi ønsker å tillate duplikater
- For at vi skal kunne bruke binære søketrær må elementene være *sammenlignbare*
- Binære trær er spesielt gode når de er *balanserte*

Sammenheng mellom binærsøk og binære søketrær

- Idéen bak binærsøk er å *halvere søkerommet* hver gang vi gjør en sammenligning, som gir $\mathcal{O}(log(n))$ tid på oppslag

Sammenheng mellom binærsøk og binære søketrær

- Idéen bak binærsøk er å *halvere søkerommet* hver gang vi gjør en sammenligning, som gir $\mathcal{O}(log(n))$ tid på oppslag
- Det fungerer strålende, men det forutsetter at vi jobbber på et *sortert* array

Sammenheng mellom binærsøk og binære søketrær

- Idéen bak binærsøk er å *halvere søkerommet* hver gang vi gjør en sammenligning, som gir $\mathcal{O}(log(n))$ tid på oppslag
- Det fungerer strålende, men det forutsetter at vi jobbber på et *sortert* array
- Et problem oppstår når vi trenger en *dynamisk struktur*

Sammenheng mellom binærsøk og binære søketrær

- Idéen bak binærsøk er å *halvere søkerommet* hver gang vi gjør en sammenligning, som gir $\mathcal{O}(log(n))$ tid på oppslag
- Det fungerer strålende, men det forutsetter at vi jobbber på et *sortert* array
- Et problem oppstår når vi trenger en *dynamisk struktur*
  - En datastruktur hvor vi stadig legger til og fjerner elementer

Sammenheng mellom binærsøk og binære søketrær

- Idéen bak binærsøk er å *halvere søkerommet* hver gang vi gjør en sammenligning, som gir $\mathcal{O}(log(n))$ tid på oppslag
- Det fungerer strålende, men det forutsetter at vi jobbber på et *sortert* array
- Et problem oppstår når vi trenger en *dynamisk struktur*
  - En datastruktur hvor vi stadig legger til og fjerner elementer
- Et binært søketre er en datastruktur

Sammenheng mellom binærsøk og binære søketrær

- Idéen bak binærsøk er å *halvere søkerommet* hver gang vi gjør en sammenligning, som gir $\mathcal{O}(log(n))$ tid på oppslag
- Det fungerer strålende, men det forutsetter at vi jobbber på et *sortert* array
- Et problem oppstår når vi trenger en *dynamisk struktur*
  - En datastruktur hvor vi stadig legger til og fjerner elementer
- Et binært søketre er en datastruktur
  - som gjør binærsøk *enkelt*

Sammenheng mellom binærsøk og binære søketrær

- Idéen bak binærsøk er å *halvere søkerommet* hver gang vi gjør en sammenligning, som gir $\mathcal{O}(log(n))$ tid på oppslag
- Det fungerer strålende, men det forutsetter at vi jobbber på et *sortert* array
- Et problem oppstår når vi trenger en *dynamisk struktur*
  - En datastruktur hvor vi stadig legger til og fjerner elementer
- Et binært søketre er en datastruktur
  - som gjør binærsøk *enkelt*
  - støtter effektiv innsetting og sletting

Innsetting

ALGORITHM: INNSETTING I ET BINÆRT SØKETRE

Input: En node v og et element x
Output: En oppdatert node v der en node som inneholder x er en etterkommer av v

Innsetting

ALGORITHM: INNSETTING I ET BINÆRT SØKETRE

Input: En node v og et element x
Output: En oppdatert node v der en node som inneholder x er en etterkommer av v

```
1 Procedure Insert(v, x)
```

Innsetting

ALGORITHM: INNSETTING I ET BINÆRT SØKETRE

Input: En node v og et element x
Output: En oppdatert node v der en node som inneholder x er en etterkommer av v

```
1 Procedure Insert(v, x)
2     if v = null then
3         v ← new Node(x)
```

Innsetting

ALGORITHM: INNSETTING I ET BINÆRT SØKETRE

Input: En node v og et element x
Output: En oppdatert node v der en node som inneholder x er en etterkommer av v

```
1 Procedure Insert(v, x)
2     if v = null then
3         v ← new Node(x)
4     else if x < v.element then
5         v.left ← Insert(v.left, x)
```

Innsetting

ALGORITHM: INNSETTING I ET BINÆRT SØKETRE

Input: En node v og et element x
Output: En oppdatert node v der en node som inneholder x er en etterkommer av v

```
1 Procedure Insert(v, x)
2     if v = null then
3         v ← new Node(x)
4     else if x < v.element then
5         v.left ← Insert(v.left, x)
6     else if x > v.element then
7         v.right ← Insert(v.right, x)
```

Innsetting

ALGORITHM: INNSETTING I ET BINÆRT SØKETRE

Input: En node v og et element x
Output: En oppdatert node v der en node som inneholder x er en etterkommer av v

```
1 Procedure Insert(v, x)
2     if v = null then
3         v ← new Node(x)
4     else if x < v.element then
5         v.left ← Insert(v.left, x)
6     else if x > v.element then
7         v.right ← Insert(v.right, x)
8     return v
```

Innsetting

ALGORITHM: INNSETTING I ET BINÆRT SØKETRE

Input: En node v og et element x
Output: En oppdatert node v der en node som inneholder x er en etterkommer av v

```
1 Procedure Insert(v, x)
2     if v = null then
3         v ← new Node(x)
4     else if x < v.element then
5         v.left ← Insert(v.left, x)
6     else if x > v.element then
7         v.right ← Insert(v.right, x)
8     return v
```

- Denne algoritmen har kompleksitet $\mathcal{O}(h)$

Innsetting

ALGORITHM: INNSETTING I ET BINÆRT SØKETRE

Input: En node v og et element x
Output: En oppdatert node v der en node som inneholder x er en etterkommer av v

```
1 Procedure Insert(v, x)
2     if v = null then
3         v ← new Node(x)
4     else if x < v.element then
5         v.left ← Insert(v.left, x)
6     else if x > v.element then
7         v.right ← Insert(v.right, x)
8     return v
```

- Denne algoritmen har kompleksitet $\mathcal{O}(h)$
  - der h er høyden på treet

Innsetting

ALGORITHM: INNSETTING I ET BINÆRT SØKETRE

Input: En node v og et element x
Output: En oppdatert node v der en node som inneholder x er en etterkommer av v

```
1 Procedure Insert(v, x)
2     if v = null then
3         v ← new Node(x)
4     else if x < v.element then
5         v.left ← Insert(v.left, x)
6     else if x > v.element then
7         v.right ← Insert(v.right, x)
8     return v
```

- Denne algoritmen har kompleksitet $\mathcal{O}(h)$
  - der h er høyden på treet
- Dersom n er antall noder i treet har vi $\mathcal{O}(n)$ i verste tilfelle

Innsetting

ALGORITHM: INNSETTING I ET BINÆRT SØKETRE

Input: En node v og et element x
Output: En oppdatert node v der en node som inneholder x er en etterkommer av v

```
1 Procedure Insert(v, x)
2     if v = null then
3         v ← new Node(x)
4     else if x < v.element then
5         v.left ← Insert(v.left, x)
6     else if x > v.element then
7         v.right ← Insert(v.right, x)
8     return v
```

- Denne algoritmen har kompleksitet $\mathcal{O}(h)$
  - der h er høyden på treet
- Dersom n er antall noder i treet har vi $\mathcal{O}(n)$ i verste tilfelle
  - men hvis treet er balansert,

Innsetting

ALGORITHM: INNSETTING I ET BINÆRT SØKETRE

Input: En node v og et element x
Output: En oppdatert node v der en node som inneholder x er en etterkommer av v

```
1 Procedure Insert(v, x)
2     if v = null then
3         v ← new Node(x)
4     else if x < v.element then
5         v.left ← Insert(v.left, x)
6     else if x > v.element then
7         v.right ← Insert(v.right, x)
8     return v
```

- Denne algoritmen har kompleksitet $\mathcal{O}(h)$
  - der h er høyden på treet
- Dersom n er antall noder i treet har vi $\mathcal{O}(n)$ i verste tilfelle
  - men hvis treet er balansert,
  - så er kompleksiteten $\mathcal{O}(log(n))$

Oppslag

ALGORITHM: OPPSLAG I ET BINÆRT SØKETRE

`Input:` En node v og et element x
`Output:` Dersom x forekommer i en node u som en etterkommer av v, returner u, ellers **`null`**.

Oppslag

ALGORITHM: OPPSLAG I ET BINÆRT SØKETRE

Input: En node v og et element x
Output: Dersom x forekommer i en node u som en etterkommer av v, returner u, ellers **null**.

```
1 Procedure Search(v, x)
```

Oppslag

Algorithm: Oppslag i et binært søketre

Input: En node v og et element x

Output: Dersom x forekommer i en node u som en etterkommer av v, returner u, ellers **null**.

```
1 Procedure Search(v, x)
2     if v = null then
3         return null
```

Oppslag

ALGORITHM: OPPSLAG I ET BINÆRT SØKETRE

Input: En node v og et element x

Output: Dersom x forekommer i en node u som en etterkommer av v, returner u, ellers **null**.

```
1 Procedure Search(v, x)
2     if v = null then
3         return null
4     if v.element = x then
5         return v
```

Oppslag

ALGORITHM: OPPSLAG I ET BINÆRT SØKETRE

Input: En node v og et element x

Output: Dersom x forekommer i en node u som en etterkommer av v, returner u, ellers **null**.

```
1 Procedure Search(v, x)
2     if v = null then
3         return null
4     if v.element = x then
5         return v
6     if x < v.element then
7         return Search(v.left, x)
```

Oppslag

ALGORITHM: OPPSLAG I ET BINÆRT SØKETRE

Input: En node v og et element x
Output: Dersom x forekommer i en node u som en etterkommer av v, returner u, ellers **null**.

```
1 Procedure Search(v, x)
2     if v = null then
3         return null
4     if v.element = x then
5         return v
6     if x < v.element then
7         return Search(v.left, x)
8     if x > v.element then
9         return Search(v.right, x)
```

Oppslag

ALGORITHM: OPPSLAG I ET BINÆRT SØKETRE

Input: En node v og et element x
Output: Dersom x forekommer i en node u som en etterkommer av v, returner u, ellers **null**.

```
1 Procedure Search(v, x)
2     if v = null then
3         return null
4     if v.element = x then
5         return v
6     if x < v.element then
7         return Search(v.left, x)
8     if x > v.element then
9         return Search(v.right, x)
```

- Oppslag i et binærtre har samme kompleksitet som innsetting

Sletting

- Sletting fra et binærtre er litt vanskeligere enn innsetting og oppslag

Sletting

- Sletting fra et binærtre er litt vanskeligere enn innsetting og oppslag
  - men har samme kompleksitet!

Sletting

- Sletting fra et binærtre er litt vanskeligere enn innsetting og oppslag
  - men har samme kompleksitet!
- Vi må passe på å tette eventuelle «hull»

Sletting

- Sletting fra et binærtre er litt vanskeligere enn innsetting og oppslag
  - men har samme kompleksitet!
- Vi må passe på å tette eventuelle «hull»
- Vi skiller mellom tre tilfeller

Sletting

- Sletting fra et binærtre er litt vanskeligere enn innsetting og oppslag
  - men har samme kompleksitet!
- Vi må passe på å tette eventuelle «hull»
- Vi skiller mellom tre tilfeller
  - Noden vi vil slette har ingen barn

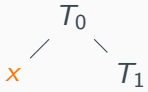
Sletting

- Sletting fra et binærtre er litt vanskeligere enn innsetting og oppslag
  - men har samme kompleksitet!
- Vi må passe på å tette eventuelle «hull»
- Vi skiller mellom tre tilfeller
  - Noden vi vil slette har ingen barn
  - Noden vi vil slette har ett barn

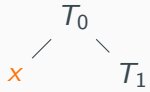
Sletting

- Sletting fra et binærtre er litt vanskeligere enn innsetting og oppslag
  - men har samme kompleksitet!
- Vi må passe på å tette eventuelle «hull»
- Vi skiller mellom tre tilfeller
  - Noden vi vil slette har ingen barn
  - Noden vi vil slette har ett barn
  - Noden vi vil slette har to barn

Sletting – ingen barn

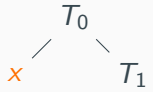


Sletting – ingen barn





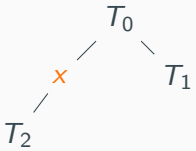
Sletting – ingen barn



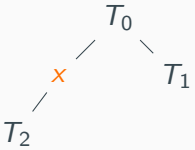


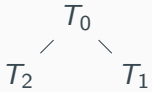
- Når det ikke er noen barn er det tilstrekkelig å fjerne pekeren til x

Sletting – ett barn (venstre)



Sletting – ett barn (venstre)



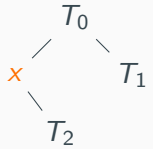


Sletting – ett barn (venstre)

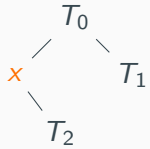


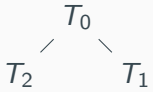
- Når noden har ett barn på venstre side, erstatt x med T_2

Sletting – ett barn (høyre)



Sletting – ett barn (høyre)



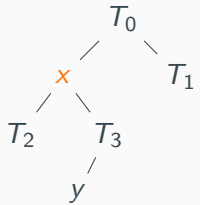


Sletting – ett barn (høyre)

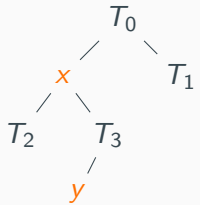


- Helt tilsvarende, når noden har ett barn på høyre side, erstatt x med T_2

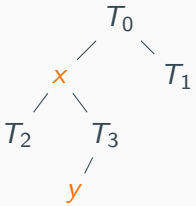
Sletting – to barn

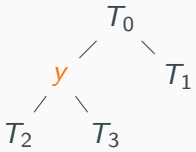


Sletting – to barn

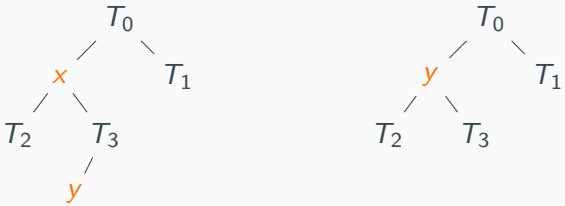


Sletting – to barn





Sletting – to barn



- Når noden har to barn, erstatt x med det minste elementet y i høyre subtre

Finn minste

- For sletting trenger vi en prosedyre for å finne minste element

ALGORITHM: FINN MINSTE NODE

Input: En node v
Output: Returner noden som inneholder den minste etterkommeren av v

Finn minste

- For sletting trenger vi en prosedyre for å finne minste element

ALGORITHM: FINN MINSTE NODE

Input: En node v
Output: Returner noden som inneholder den minste etterkommeren av v

Finn minste

- For sletting trenger vi en prosedyre for å finne minste element

ALGORITHM: FINN MINSTE NODE

Input: En node v
Output: Returner noden som inneholder den minste etterkommeren av v

```
1 Procedure FindMin(v)
2 |   Etterlatt som øvelse!
```

Sletting

Algorithm: Slett en node i et binært søketre

Input: En node v og et element x
Output: Dersom x forekommer i en node u som en etterkommer av v, fjern u.

Sletting

ALGORITHM: SLETT EN NODE I ET BINÆRT SØKETRE

Input: En node v og et element x

Output: Dersom x forekommer i en node u som en etterkommer av v, fjern u.

```
1 Procedure Remove(v, x)
2     if v = null then
3         return null
```

Sletting

ALGORITHM: SLETT EN NODE I ET BINÆRT SØKETRE

Input: En node v og et element x

Output: Dersom x forekommer i en node u som en etterkommer av v, fjern u.

```
1 Procedure Remove(v, x)
2     if v = null then
3         return null
4     if x < v.element then
5         v.left ← Remove(v.left, x)
6         return v
```

Sletting

ALGORITHM: SLETT EN NODE I ET BINÆRT SØKETRE

Input: En node v og et element x

Output: Dersom x forekommer i en node u som en etterkommer av v, fjern u.

```
1 Procedure Remove(v, x)
2     if v = null then
3         return null
4     if x < v.element then
5         v.left ← Remove(v.left, x)
6         return v
7     if x > v.element then
8         v.right ← Remove(v.right, x)
9         return v
```

Sletting

ALGORITHM: SLETT EN NODE I ET BINÆRT SØKETRE

Input: En node v og et element x

Output: Dersom x forekommer i en node u som en etterkommer av v, fjern u.

```
1  Procedure Remove(v, x)
2      if v = null then
3          return null
4      if x < v.element then
5          v.left ← Remove(v.left, x)
6          return v
7      if x > v.element then
8          v.right ← Remove(v.right, x)
9          return v
10     if v.left = null then
11         return v.right
```

Sletting

ALGORITHM: SLETT EN NODE I ET BINÆRT SØKETRE

Input: En node v og et element x

Output: Dersom x forekommer i en node u som en etterkommer av v, fjern u.

```
1  Procedure Remove(v, x)
2      if v = null then
3          return null
4      if x < v.element then
5          v.left ← Remove(v.left, x)
6          return v
7      if x > v.element then
8          v.right ← Remove(v.right, x)
9          return v
10     if v.left = null then
11         return v.right
12     if v.right = null then
13         return v.left
```

Sletting

ALGORITHM: SLETT EN NODE I ET BINÆRT SØKETRE

Input: En node v og et element x
Output: Dersom x forekommer i en node u som en etterkommer av v, fjern u.

```
1  Procedure Remove(v, x)
2      if v = null then
3          return null
4      if x < v.element then
5          v.left ← Remove(v.left, x)
6          return v
7      if x > v.element then
8          v.right ← Remove(v.right, x)
9          return v
10     if v.left = null then
11         return v.right
12     if v.right = null then
13         return v.left
14     u ← FindMin(v.right)
15     v.element ← u.element
16     v.right ← Remove(v.right, u.element)
17     return v
```

AVL-trær

AVL-trær

- AVL-trær oppfyller de samme egenskapene som ordinære binære søketrær

AVL-trær

- AVL-trær oppfyller de samme egenskapene som ordinære binære søketrær
- I *tillegg* må de oppfyle følgende egenskap:

AVL-trær

- AVL-trær oppfyller de samme egenskapene som ordinære binære søketrær
- I *tillegg* må de oppfyle følgende egenskap:
  - for hver node i et AVL-tre, så må høydeforskjellen på venstre og høyre subtre være mindre eller lik 1

AVL-trær

- AVL-trær oppfyller de samme egenskapene som ordinære binære søketrær
- I *tillegg* må de oppfyle følgende egenskap:
  - for hver node i et AVL-tre, så må høydeforskjellen på venstre og høyre subtre være mindre eller lik 1
- Denne invarianten må opprettholdes ved innsetting og sletting

AVL-trær

- AVL-trær oppfyller de samme egenskapene som ordinære binære søketrær
- I *tillegg* må de oppfyle følgende egenskap:
  - for hver node i et AVL-tre, så må høydeforskjellen på venstre og høyre subtre være mindre eller lik 1
- Denne invarianten må opprettholdes ved innsetting og sletting
  - (oppslag er helt uforandret)

Høyde

- Fordi vi ofte vil referere til høyden i treet, utvider vi nodene i treet

Høyde

- Fordi vi ofte vil referere til høyden i treet, utvider vi nodene i treet
- Hvis v er en node i et AVL-tre, så gir

Høyde

- Fordi vi ofte vil referere til høyden i treet, utvider vi nodene i treet
- Hvis v er en node i et AVL-tre, så gir
  - v.`element` dataen som er lagret i noden

Høyde

- Fordi vi ofte vil referere til høyden i treet, utvider vi nodene i treet
- Hvis v er en node i et AVL-tre, så gir
  - v.`element` dataen som er lagret i noden
  - v.`left` venstre barn av v

Høyde

- Fordi vi ofte vil referere til høyden i treet, utvider vi nodene i treet
- Hvis v er en node i et AVL-tre, så gir
  - v.`element` dataen som er lagret i noden
  - v.`left` venstre barn av v
  - v.`right` høyre barn av v

Høyde

- Fordi vi ofte vil referere til høyden i treet, utvider vi nodene i treet
- Hvis v er en node i et AVL-tre, så gir
  - v.`element` dataen som er lagret i noden
  - v.`left` venstre barn av v
  - v.`right` høyre barn av v
  - v.`height` høyden til v

Høyde

- Fordi vi ofte vil referere til høyden i treet, utvider vi nodene i treet
- Hvis v er en node i et AVL-tre, så gir
  - v.`element` dataen som er lagret i noden
  - v.`left` venstre barn av v
  - v.`right` høyre barn av v
  - v.`height` høyden til v
- Husk at høyden til et tomt tre er definert som -1

Høyde

- Fordi vi ofte vil referere til høyden i treet, utvider vi nodene i treet
- Hvis v er en node i et AVL-tre, så gir
  - v.`element` dataen som er lagret i noden
  - v.`left` venstre barn av v
  - v.`right` høyre barn av v
  - v.`height` høyden til v
- Husk at høyden til et tomt tre er definert som -1
  - og at høyden til en node er én mer enn sitt høyeste subtre

Høyde

- Fordi vi ofte vil referere til høyden i treet, utvider vi nodene i treet
- Hvis v er en node i et AVL-tre, så gir
  - v.`element` dataen som er lagret i noden
  - v.`left` venstre barn av v
  - v.`right` høyre barn av v
  - v.`height` høyden til v
- Husk at høyden til et tomt tre er definert som -1
  - og at høyden til en node er én mer enn sitt høyeste subtre
- Ved innsetting og sletting må vi vedlikeholde høydene

Høyde

- Fordi vi ofte vil referere til høyden i treet, utvider vi nodene i treet
- Hvis v er en node i et AVL-tre, så gir
  - v.`element` dataen som er lagret i noden
  - v.`left` venstre barn av v
  - v.`right` høyre barn av v
  - v.`height` høyden til v
- Husk at høyden til et tomt tre er definert som -1
  - og at høyden til en node er én mer enn sitt høyeste subtre
- Ved innsetting og sletting må vi vedlikeholde høydene
- Vi antar at vi har en prosedyre `Height` som for en en gitt node v:

Høyde

- Fordi vi ofte vil referere til høyden i treet, utvider vi nodene i treet
- Hvis v er en node i et AVL-tre, så gir
  - v.`element` dataen som er lagret i noden
  - v.`left` venstre barn av v
  - v.`right` høyre barn av v
  - v.`height` høyden til v
- Husk at høyden til et tomt tre er definert som -1
  - og at høyden til en node er én mer enn sitt høyeste subtre
- Ved innsetting og sletting må vi vedlikeholde høydene
- Vi antar at vi har en prosedyre `Height` som for en en gitt node v:
  - returnerer -1 dersom $v =$ **`null`**

Høyde

- Fordi vi ofte vil referere til høyden i treet, utvider vi nodene i treet
- Hvis v er en node i et AVL-tre, så gir
  - v.`element` dataen som er lagret i noden
  - v.`left` venstre barn av v
  - v.`right` høyre barn av v
  - v.`height` høyden til v
- Husk at høyden til et tomt tre er definert som -1
  - og at høyden til en node er én mer enn sitt høyeste subtre
- Ved innsetting og sletting må vi vedlikeholde høydene
- Vi antar at vi har en prosedyre `Height` som for en en gitt node v:
  - returnerer -1 dersom $v =$ **`null`**
  - returnerer v.`height` ellers

Høyde

- Fordi vi ofte vil referere til høyden i treet, utvider vi nodene i treet
- Hvis v er en node i et AVL-tre, så gir
  - v.`element` dataen som er lagret i noden
  - v.`left` venstre barn av v
  - v.`right` høyre barn av v
  - v.`height` høyden til v
- Husk at høyden til et tomt tre er definert som -1
  - og at høyden til en node er én mer enn sitt høyeste subtre
- Ved innsetting og sletting må vi vedlikeholde høydene
- Vi antar at vi har en prosedyre `Height` som for en en gitt node v:
  - returnerer -1 dersom $v =$ **`null`**
  - returnerer v.`height` ellers
- Vi antar at vi har en prosedyre `SetHeight` som for en gitt node v:

Høyde

- Fordi vi ofte vil referere til høyden i treet, utvider vi nodene i treet
- Hvis v er en node i et AVL-tre, så gir
  - v.`element` dataen som er lagret i noden
  - v.`left` venstre barn av v
  - v.`right` høyre barn av v
  - v.`height` høyden til v
- Husk at høyden til et tomt tre er definert som -1
  - og at høyden til en node er én mer enn sitt høyeste subtre
- Ved innsetting og sletting må vi vedlikeholde høydene
- Vi antar at vi har en prosedyre `Height` som for en en gitt node v:
  - returnerer -1 dersom $v =$ **`null`**
  - returnerer v.`height` ellers
- Vi antar at vi har en prosedyre `SetHeight` som for en gitt node v:
  - ikke gjør noe hvis $v =$ **`null`**

Høyde

- Fordi vi ofte vil referere til høyden i treet, utvider vi nodene i treet
- Hvis v er en node i et AVL-tre, så gir
  - v.`element` dataen som er lagret i noden
  - v.`left` venstre barn av v
  - v.`right` høyre barn av v
  - v.`height` høyden til v
- Husk at høyden til et tomt tre er definert som -1
  - og at høyden til en node er én mer enn sitt høyeste subtre
- Ved innsetting og sletting må vi vedlikeholde høydene
- Vi antar at vi har en prosedyre `Height` som for en en gitt node v:
  - returnerer -1 dersom $v =$ **`null`**
  - returnerer v.`height` ellers
- Vi antar at vi har en prosedyre `SetHeight` som for en gitt node v:
  - ikke gjør noe hvis $v =$ **`null`**
  - setter v.`height` til $1 +$ `Max`(`Height`(v.`left`), `Height`(v.`right`)) ellers

Overordnet idé

- Vi bruker metodene for sletting og innsetting fra ordinære binære søketrær

Overordnet idé

- Vi bruker metodene for sletting og innsetting fra ordinære binære søketrær
- Etter operasjonen er utført, balanserer vi hver node lokalt fra der operasjonen ble utført og opp til roten (hvis det er nødvendig)

Overordnet idé

- Vi bruker metodene for sletting og innsetting fra ordinære binære søketrær
- Etter operasjonen er utført, balanserer vi hver node lokalt fra der operasjonen ble utført og opp til roten (hvis det er nødvendig)
  - Vi balanserer når høydeforskjellen mellom venstre og høyre subtre er mer enn 1

Overordnet idé

- Vi bruker metodene for sletting og innsetting fra ordinære binære søketrær
- Etter operasjonen er utført, balanserer vi hver node lokalt fra der operasjonen ble utført og opp til roten (hvis det er nødvendig)
  - Vi balanserer når høydeforskjellen mellom venstre og høyre subtre er mer enn 1
- For å balansere en node, vil vi anvende *rotasjoner*

Overordnet idé

- Vi bruker metodene for sletting og innsetting fra ordinære binære søketrær
- Etter operasjonen er utført, balanserer vi hver node lokalt fra der operasjonen ble utført og opp til roten (hvis det er nødvendig)
  - Vi balanserer når høydeforskjellen mellom venstre og høyre subtre er mer enn 1
- For å balansere en node, vil vi anvende *rotasjoner*
- Underveis må vi passe på å oppdatere høydene

Overordnet idé

- Vi bruker metodene for sletting og innsetting fra ordinære binære søketrær
- Etter operasjonen er utført, balanserer vi hver node lokalt fra der operasjonen ble utført og opp til roten (hvis det er nødvendig)
  - Vi balanserer når høydeforskjellen mellom venstre og høyre subtre er mer enn 1
- For å balansere en node, vil vi anvende *rotasjoner*
- Underveis må vi passe på å oppdatere høydene
- Husk at AVL innsetting og sletting bare fungerer på AVL-trær!

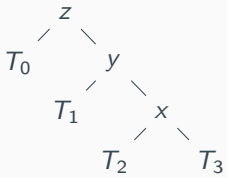
Overordnet idé

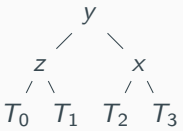
- Vi bruker metodene for sletting og innsetting fra ordinære binære søketrær
- Etter operasjonen er utført, balanserer vi hver node lokalt fra der operasjonen ble utført og opp til roten (hvis det er nødvendig)
  - Vi balanserer når høydeforskjellen mellom venstre og høyre subtre er mer enn 1
- For å balansere en node, vil vi anvende *rotasjoner*
- Underveis må vi passe på å oppdatere høydene
- Husk at AVL innsetting og sletting bare fungerer på AVL-trær!
  - Altså kan vi anta at treet ikke har høydeforskjeller større enn 1

Overordnet idé

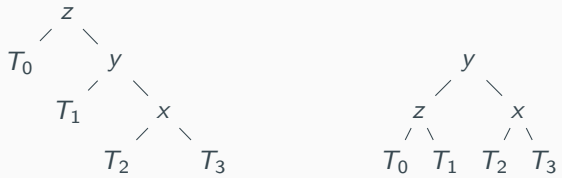
- Vi bruker metodene for sletting og innsetting fra ordinære binære søketrær
- Etter operasjonen er utført, balanserer vi hver node lokalt fra der operasjonen ble utført og opp til roten (hvis det er nødvendig)
  - Vi balanserer når høydeforskjellen mellom venstre og høyre subtre er mer enn 1
- For å balansere en node, vil vi anvende *rotasjoner*
- Underveis må vi passe på å oppdatere høydene
- Husk at AVL innsetting og sletting bare fungerer på AVL-trær!
  - Altså kan vi anta at treet ikke har høydeforskjeller større enn 1
  - Ved én innsetting eller sletting i et AVL-tre vil vi bare forårsake en midlertidig høydeforskjell på 2

Rotasjoner – venstrerotasjon





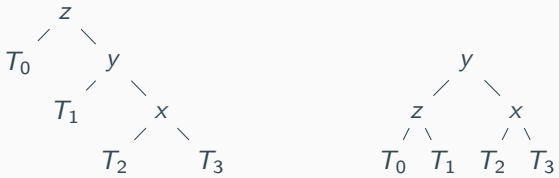
Rotasjoner – venstrerotasjon



ALGORITHM: VENSTREROTASJON AV ET BINÆRTRE

Input: En node z
Output: Roter treet til venstre, slik at y blir den nye roten

Rotasjoner – venstrerotasjon



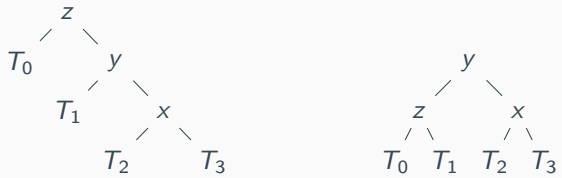
ALGORITHM: VENSTREROTASJON AV ET BINÆRTRE

Input: En node z

Output: Roter treet til venstre, slik at y blir den nye roten

```
1 Procedure LeftRotate(z)
```

Rotasjoner – venstrerotasjon

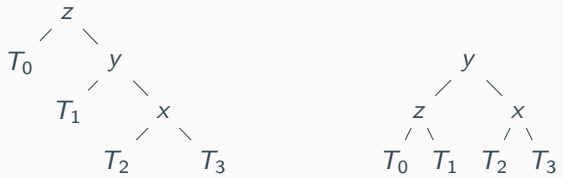


ALGORITHM: VENSTREROTASJON AV ET BINÆRTRE

Input: En node z
Output: Roter treet til venstre, slik at y blir den nye roten

```
1 Procedure LeftRotate(z)
2     y ← z.right
3     T1 ← y.left
```

Rotasjoner – venstrerotasjon

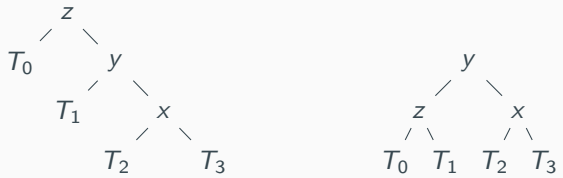


ALGORITHM: VENSTREROTASJON AV ET BINÆRTRE

Input: En node z
Output: Roter treet til venstre, slik at y blir den nye roten

```
1 Procedure LeftRotate(z)
2     y ← z.right
3     T1 ← y.left
4     y.left ← z
5     z.right ← T1
```

Rotasjoner – venstrerotasjon

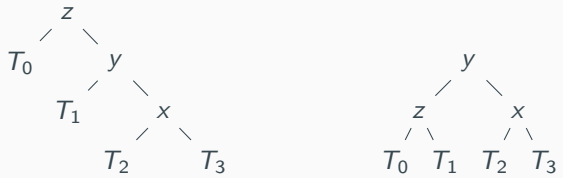


Algorithm: Venstrerotasjon av et Binærtre

Input: En node z
Output: Roter treet til venstre, slik at y blir den nye roten

```
1 Procedure LeftRotate(z)
2     y ← z.right
3     T1 ← y.left
4     y.left ← z
5     z.right ← T1
6     SetHeight(z)
7     SetHeight(y)
```

Rotasjoner – venstrerotasjon

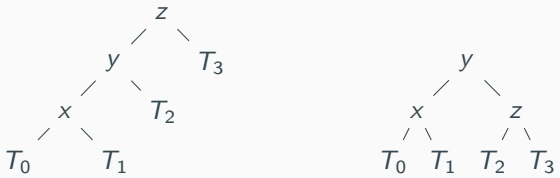


Algorithm: Venstrerotasjon av et Binærtre

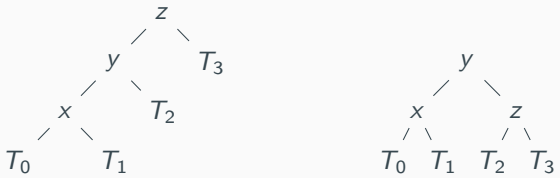
Input: En node z
Output: Roter treet til venstre, slik at y blir den nye roten

```
1 Procedure LeftRotate(z)
2     y ← z.right
3     T1 ← y.left
4     y.left ← z
5     z.right ← T1
6     SetHeight(z)
7     SetHeight(y)
8     return y
```

Rotasjoner – høyrerotasjon



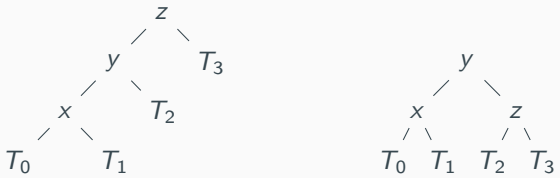
Rotasjoner – høyrerotasjon



ALGORITHM: HØYREROTASJON AV ET BINÆRTRE

Input: En node z
Output: Roter treet til høyre, slik at y blir den nye roten

Rotasjoner – høyrerotasjon



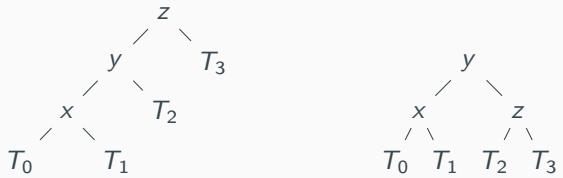
Algorithm: Høyrerotasjon av et Binærtre

Input: En node z

Output: Roter treet til høyre, slik at y blir den nye roten

1 **Procedure** `RightRotate(`z`)`

Rotasjoner – høyrerotasjon

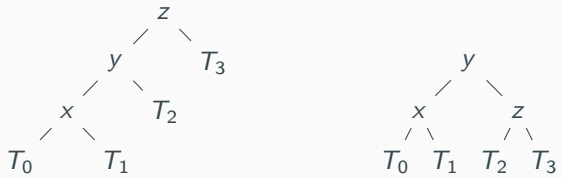


ALGORITHM: HØYREROTASJON AV ET BINÆRTRE

Input: En node z
Output: Roter treet til høyre, slik at y blir den nye roten

```
1 Procedure RightRotate(z)
2     y ← z.left
3     T2 ← y.right
```

Rotasjoner – høyrerotasjon

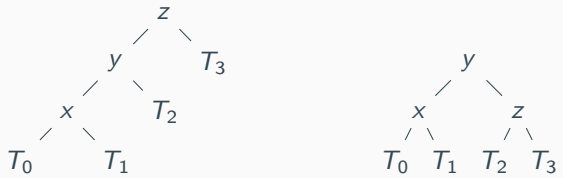


Algorithm: Høyrerotasjon av et Binærtre

Input: En node z
Output: Roter treet til høyre, slik at y blir den nye roten

```
1 Procedure RightRotate(z)
2     y ← z.left
3     T2 ← y.right
4     y.right ← z
5     z.left ← T2
```

Rotasjoner – høyrerotasjon

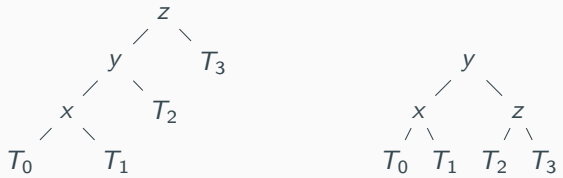


Algorithm: Høyrerotasjon av et Binærtre

Input: En node z
Output: Roter treet til høyre, slik at y blir den nye roten

```
1 Procedure RightRotate(z)
2     y ← z.left
3     T2 ← y.right
4     y.right ← z
5     z.left ← T2
6     SetHeight(z)
7     SetHeight(y)
```

Rotasjoner – høyrerotasjon

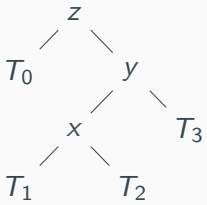


Algorithm: Høyrerotasjon av et Binærtre

Input: En node z
Output: Roter treet til høyre, slik at y blir den nye roten

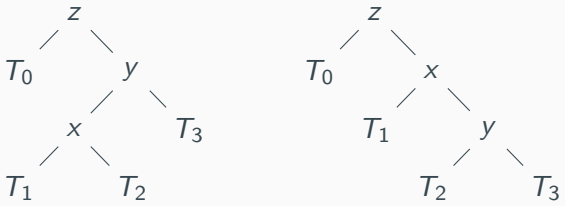
```
1 Procedure RightRotate(z)
2     y ← z.left
3     T2 ← y.right
4     y.right ← z
5     z.left ← T2
6     SetHeight(z)
7     SetHeight(y)
8     return y
```

Rotasjoner – doble rotasjoner



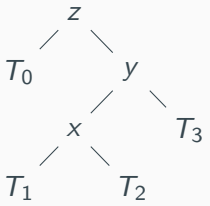
Rotasjoner – doble rotasjoner

`RightRotate`(y)

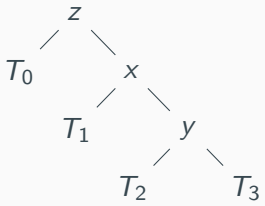


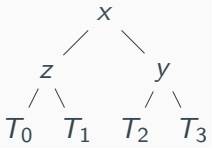
Rotasjoner – doble rotasjoner

`RightRotate`(y)

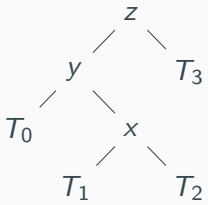


`LeftRotate`(z)



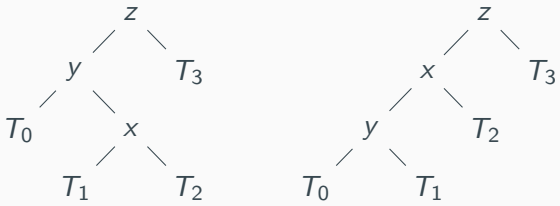


Rotasjoner – doble rotasjoner



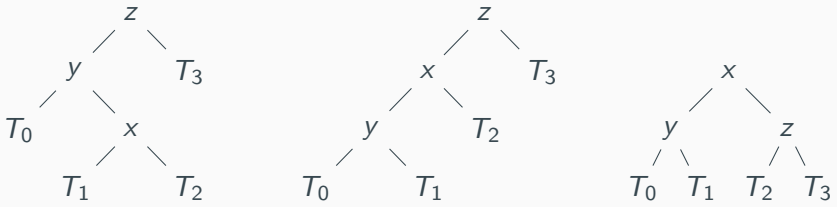
Rotasjoner – doble rotasjoner

`LeftRotate`(y)



Rotasjoner – doble rotasjoner

`LeftRotate`(y) `RightRotate`(z)



Balansefaktor

Algorithm: Balansefaktoren av en node

Input: En node v
Output: Returner høydeforskjellen på v sitt venstre- og høyrebarn

Balansefaktor

Algorithm: Balansefaktoren av en node

Input: En node v
Output: Returner høydeforskjellen på v sitt venstre- og høyrebarn

```
1 Procedure BalanceFactor(v)
2     if v = null then
3         return 0
4     return Height(v.left) − Height(v.right)
```

- En hjelpeprosedyre som sier hvor vestre- eller høyretungt v er

Balansefaktor

Algorithm: Balansefaktoren av en node

Input: En node v
Output: Returner høydeforskjellen på v sitt venstre- og høyrebarn

```
1 Procedure BalanceFactor(v)
2     if v = null then
3         return 0
4     return Height(v.left) − Height(v.right)
```

- En hjelpeprosedyre som sier hvor vestre- eller høyretungt v er
- 0 betyr at v er balansert

Balansefaktor

Algorithm: Balansefaktoren av en node

Input: En node v
Output: Returner høydeforskjellen på v sitt venstre- og høyrebarn

```
1 Procedure BalanceFactor(v)
2     if v = null then
3         return 0
4     return Height(v.left) − Height(v.right)
```

- En hjelpeprosedyre som sier hvor vestre- eller høyretungt v er
- 0 betyr at v er balansert
- Et positivt tall betyr at treet er venstretungt

Balansefaktor

Algorithm: Balansefaktoren av en node

Input: En node v
Output: Returner høydeforskjellen på v sitt venstre- og høyrebarn

```
1 Procedure BalanceFactor(v)
2     if v = null then
3         return 0
4     return Height(v.left) − Height(v.right)
```

- En hjelpeprosedyre som sier hvor vestre- eller høyretungt v er
- 0 betyr at v er balansert
- Et positivt tall betyr at treet er venstretungt
- Et negativt tall betyr at treet er høyretungt

Balansering

Algorithm: Balansering av et AVL-tre

Input: En node v
Output: En balansert node

Balansering

Algorithm: Balansering av et AVL-tre

Input: En node v
Output: En balansert node
1 **Procedure** `Balance`(v)

Balansering

Algorithm: Balansering av et AVL-tre

Input: En node v
Output: En balansert node

```
1 Procedure Balance(v)
2     if BalanceFactor(v) < −1 then
```

Balansering

ALGORITHM: BALANSERING AV ET AVL-TRE

Input: En node v
Output: En balansert node

```
1 Procedure Balance(v)
2     if BalanceFactor(v) < −1 then
3         if BalanceFactor(v.right) > 0 then
4             v.right = RightRotate(v.right)
5         return LeftRotate(v)
```

Balansering

ALGORITHM: BALANSERING AV ET AVL-TRE

Input: En node v
Output: En balansert node

```
1 Procedure Balance(v)
2     if BalanceFactor(v) < −1 then
3         if BalanceFactor(v.right) > 0 then
4             v.right = RightRotate(v.right)
5         return LeftRotate(v)
6     if BalanceFactor(v) > 1 then
```

Balansering

ALGORITHM: BALANSERING AV ET AVL-TRE

Input: En node v
Output: En balansert node

```
1 Procedure Balance(v)
2     if BalanceFactor(v) < −1 then
3         if BalanceFactor(v.right) > 0 then
4             v.right = RightRotate(v.right)
5         return LeftRotate(v)
6     if BalanceFactor(v) > 1 then
7         if BalanceFactor(v.left) < 0 then
8             v.left = LeftRotate(v.left)
```

Balansering

ALGORITHM: BALANSERING AV ET AVL-TRE

Input: En node v
Output: En balansert node

```
1 Procedure Balance(v)
2     if BalanceFactor(v) < −1 then
3         if BalanceFactor(v.right) > 0 then
4             v.right = RightRotate(v.right)
5         return LeftRotate(v)
6     if BalanceFactor(v) > 1 then
7         if BalanceFactor(v.left) < 0 then
8             v.left = LeftRotate(v.left)
9         return RightRotate(v)
```

Balansering

Algorithm: Balansering av et AVL-tre

Input: En node v
Output: En balansert node

```
1  Procedure Balance(v)
2      if BalanceFactor(v) < −1 then
3          if BalanceFactor(v.right) > 0 then
4              v.right = RightRotate(v.right)
5          return LeftRotate(v)
6      if BalanceFactor(v) > 1 then
7          if BalanceFactor(v.left) < 0 then
8              v.left = LeftRotate(v.left)
9          return RightRotate(v)
10     return v
```

Innsetting

ALGORITHM: INNSETTING I ET AVL-TRE

Input: En node v og et element x
Output: En oppdatert node v der en node som inneholder x er en etterkommer av v

Innsetting

ALGORITHM: INNSETTING I ET AVL-TRE

Input: En node v og et element x

Output: En oppdatert node v der en node som inneholder x er en etterkommer av v

```
1 Procedure Insert(v, x)
```

Innsetting

Algorithm: Innsetting i et AVL-tre

Input: En node v og et element x
Output: En oppdatert node v der en node som inneholder x er en etterkommer av v

```
1 Procedure Insert(v, x)
2     if v = null then
3         v ← new Node(x)
```

Innsetting

ALGORITHM: INNSETTING I ET AVL-TRE

Input: En node v og et element x
Output: En oppdatert node v der en node som inneholder x er en etterkommer av v

```
1 Procedure Insert(v, x)
2     if v = null then
3         v ← new Node(x)
4     else if x < v.element then
5         v.left ← Insert(v.left, x)
```

Innsetting

ALGORITHM: INNSETTING I ET AVL-TRE

Input: En node v og et element x
Output: En oppdatert node v der en node som inneholder x er en etterkommer av v

```
1 Procedure Insert(v, x)
2     if v = null then
3         v ← new Node(x)
4     else if x < v.element then
5         v.left ← Insert(v.left, x)
6     else if x > v.element then
7         v.right ← Insert(v.right, x)
```

Innsetting

ALGORITHM: INNSETTING I ET AVL-TRE

Input: En node v og et element x
Output: En oppdatert node v der en node som inneholder x er en etterkommer av v

```
1 Procedure Insert(v, x)
2     if v = null then
3         v ← new Node(x)
4     else if x < v.element then
5         v.left ← Insert(v.left, x)
6     else if x > v.element then
7         v.right ← Insert(v.right, x)
8     SetHeight(v)
9     return Balance(v)
```

Sletting

Algorithm: Sletting i et AVL-tre

Input: En node v og et element x
Output: Dersom x forekommer i en node u som en etterkommer av v, fjern u.

Sletting

ALGORITHM: SLETTING I ET AVL-TRE

Input: En node v og et element x
Output: Dersom x forekommer i en node u som en etterkommer av v, fjern u.

```
1 Procedure Remove(v, x)
2     if v = null then
3         return null
```

Sletting

ALGORITHM: SLETTING I ET AVL-TRE

Input: En node v og et element x

Output: Dersom x forekommer i en node u som en etterkommer av v, fjern u.

```
1 Procedure Remove(v, x)
2     if v = null then
3         return null
4     if x < v.element then
5         v.left ← Remove(v.left, x)
```

Sletting

ALGORITHM: SLETTING I ET AVL-TRE

Input: En node v og et element x
Output: Dersom x forekommer i en node u som en etterkommer av v, fjern u.

```
1 Procedure Remove(v, x)
2     if v = null then
3         return null
4     if x < v.element then
5         v.left ← Remove(v.left, x)
6     else if x > v.element then
7         v.right ← Remove(v.right, x)
```

Sletting

Algorithm: Sletting i et AVL-tre

Input: En node v og et element x

Output: Dersom x forekommer i en node u som en etterkommer av v, fjern u.

```
1 Procedure Remove(v, x)
2     if v = null then
3         return null
4     if x < v.element then
5         v.left ← Remove(v.left, x)
6     else if x > v.element then
7         v.right ← Remove(v.right, x)
8     else if v.left = null then
9         v ← v.right
```

Sletting

ALGORITHM: SLETTING I ET AVL-TRE

Input: En node v og et element x

Output: Dersom x forekommer i en node u som en etterkommer av v, fjern u.

```
1  Procedure Remove(v, x)
2      if v = null then
3          return null
4      if x < v.element then
5          v.left ← Remove(v.left, x)
6      else if x > v.element then
7          v.right ← Remove(v.right, x)
8      else if v.left = null then
9          v ← v.right
10     else if v.right = null then
11         v ← v.left
```

Sletting

ALGORITHM: SLETTING I ET AVL-TRE

Input: En node v og et element x
Output: Dersom x forekommer i en node u som en etterkommer av v, fjern u.

```
1  Procedure Remove(v, x)
2      if v = null then
3          return null
4      if x < v.element then
5          v.left ← Remove(v.left, x)
6      else if x > v.element then
7          v.right ← Remove(v.right, x)
8      else if v.left = null then
9          v ← v.right
10     else if v.right = null then
11         v ← v.left
12     else
13         u ← FindMin(v.right)
14         v.element ← u.element
15         v.right ← Remove(v.right, u.element)
```

Sletting

ALGORITHM: SLETTING I ET AVL-TRE

Input: En node v og et element x
Output: Dersom x forekommer i en node u som en etterkommer av v, fjern u.

```
1  Procedure Remove(v, x)
2      if v = null then
3          return null
4      if x < v.element then
5          v.left ← Remove(v.left, x)
6      else if x > v.element then
7          v.right ← Remove(v.right, x)
8      else if v.left = null then
9          v ← v.right
10     else if v.right = null then
11         v ← v.left
12     else
13         u ← FindMin(v.right)
14         v.element ← u.element
15         v.right ← Remove(v.right, u.element)
16     SetHeight(v)
17     return Balance(v)
```

Rød-svarte trær

Rød-svarte trær

- Rød-svarte trær er, i likhet med AVL-trær, *balanserte* binære søketrær

Rød-svarte trær

- Rød-svarte trær er, i likhet med AVL-trær, *balanserte* binære søketrær
- Likhetene mellom rød-svarte- og AVL-trær er:

Rød-svarte trær

- Rød-svarte trær er, i likhet med AVL-trær, *balanserte* binære søketrær
- Likhetene mellom rød-svarte- og AVL-trær er:
  - De er begge selvbalanserende binære søketrær

Rød-svarte trær

- Rød-svarte trær er, i likhet med AVL-trær, *balanserte* binære søketrær
- Likhetene mellom rød-svarte- og AVL-trær er:
  - De er begge selvbalanserende binære søketrær
  - De har begge $\mathcal{O}(log(n))$ på innsetting, sletting og oppslag

Rød-svarte trær

- Rød-svarte trær er, i likhet med AVL-trær, *balanserte* binære søketrær
- Likhetene mellom rød-svarte- og AVL-trær er:
  - De er begge selvbalanserende binære søketrær
  - De har begge $\mathcal{O}(log(n))$ på innsetting, sletting og oppslag
  - De anvender begge rotasjoner for å bevare et krav om balanse

Rød-svarte trær

- Rød-svarte trær er, i likhet med AVL-trær, *balanserte* binære søketrær
- Likhetene mellom rød-svarte- og AVL-trær er:
  - De er begge selvbalanserende binære søketrær
  - De har begge $\mathcal{O}(log(n))$ på innsetting, sletting og oppslag
  - De anvender begge rotasjoner for å bevare et krav om balanse
- De store forskjellene mellom rød-svarte- og AVL-trær er:

Rød-svarte trær

- Rød-svarte trær er, i likhet med AVL-trær, *balanserte* binære søketrær
- Likhetene mellom rød-svarte- og AVL-trær er:
  - De er begge selvbalanserende binære søketrær
  - De har begge $\mathcal{O}(log(n))$ på innsetting, sletting og oppslag
  - De anvender begge rotasjoner for å bevare et krav om balanse
- De store forskjellene mellom rød-svarte- og AVL-trær er:
  - Rød-svarte trær har *svakere* krav om balanse enn AVL-trær

Rød-svarte trær

- Rød-svarte trær er, i likhet med AVL-trær, *balanserte* binære søketrær
- Likhetene mellom rød-svarte- og AVL-trær er:
  - De er begge selvbalanserende binære søketrær
  - De har begge $\mathcal{O}(log(n))$ på innsetting, sletting og oppslag
  - De anvender begge rotasjoner for å bevare et krav om balanse
- De store forskjellene mellom rød-svarte- og AVL-trær er:
  - Rød-svarte trær har *svakere* krav om balanse enn AVL-trær
  - Rød-svarte trær bruker *litt* mindre minne, siden vi ikke trenger å lagre høydene

Rød-svarte trær

- Rød-svarte trær er, i likhet med AVL-trær, *balanserte* binære søketrær
- Likhetene mellom rød-svarte- og AVL-trær er:
  - De er begge selvbalanserende binære søketrær
  - De har begge $\mathcal{O}(log(n))$ på innsetting, sletting og oppslag
  - De anvender begge rotasjoner for å bevare et krav om balanse
- De store forskjellene mellom rød-svarte- og AVL-trær er:
  - Rød-svarte trær har *svakere* krav om balanse enn AVL-trær
  - Rød-svarte trær bruker *litt* mindre minne, siden vi ikke trenger å lagre høydene
  - Rød-svarte trær gjør færre rotasjoner

Rød-svarte trær vs. AVL-trær

- Rød-svarte trær er raskere enn AVL-trær når innsetting og sletting forekommer ofte, til sammenligning med oppslag

Rød-svarte trær vs. AVL-trær

- Rød-svarte trær er raskere enn AVL-trær når innsetting og sletting forekommer ofte, til sammenligning med oppslag
  - Dette er fordi rød-svarte trær trenger færre rotasjoner

Rød-svarte trær vs. AVL-trær

- Rød-svarte trær er raskere enn AVL-trær når innsetting og sletting forekommer ofte, til sammenligning med oppslag
  - Dette er fordi rød-svarte trær trenger færre rotasjoner
- AVL-trær er raskere enn rød-svarte trær når oppslag forekommer ofte, til sammenligning med innsetting og sletting

Rød-svarte trær vs. AVL-trær

- Rød-svarte trær er raskere enn AVL-trær når innsetting og sletting forekommer ofte, til sammenligning med oppslag
  - Dette er fordi rød-svarte trær trenger færre rotasjoner
- AVL-trær er raskere enn rød-svarte trær når oppslag forekommer ofte, til sammenligning med innsetting og sletting
  - Dette er fordi AVL-trær er mer balanserte

Invarianter for rød-svarte trær

1. Hver node fargelegges *rød* eller *svart* (derav navnet)

Invarianter for rød-svarte trær

1. Hver node fargelegges *rød* eller *svart* (derav navnet)
2. Roten til treet er svart

Invarianter for rød-svarte trær

1. Hver node fargelegges *rød* eller *svart* (derav navnet)
2. Roten til treet er svart
3. En rød node kan ikke ha et rødt barn

Invarianter for rød-svarte trær

1. Hver node fargelegges *rød* eller *svart* (derav navnet)
2. Roten til treet er svart
3. En rød node kan ikke ha et rødt barn
4. Hver gren fra roten av treet til et tomt tre (eller **`null`**) inneholder *like mange svarte noder*

Intuisjon

- Verste tilfellet (med hensyn til balanse) for et rødsvart tre er at vi har

Intuisjon

- Verste tilfellet (med hensyn til balanse) for et rødsvart tre er at vi har
  - en gren med bare svarte noder

Intuisjon

- Verste tilfellet (med hensyn til balanse) for et rødsvart tre er at vi har
  - en gren med bare svarte noder
  - en annen gren med annenhver svarte og røde noder

Intuisjon

- Verste tilfellet (med hensyn til balanse) for et rødsvart tre er at vi har
  - en gren med bare svarte noder
  - en annen gren med annenhver svarte og røde noder
- Da har vi en gren som er dobbelt så lang som en annen!

Intuisjon

- Verste tilfellet (med hensyn til balanse) for et rødsvart tre er at vi har
  - en gren med bare svarte noder
  - en annen gren med annenhver svarte og røde noder
- Da har vi en gren som er dobbelt så lang som en annen!
  - Men dobbelt så langt er ikke så mye lenger

Intuisjon

- Verste tilfellet (med hensyn til balanse) for et rødsvart tre er at vi har
  - en gren med bare svarte noder
  - en annen gren med annenhver svarte og røde noder
- Da har vi en gren som er dobbelt så lang som en annen!
  - Men dobbelt så langt er ikke så mye lenger
  - Så vi bevarer $\mathcal{O}(log(n))$ på innsetting, sletting og oppslag