2-sammenhengende grafer og sterkt sammenhengende komponenter

IN2010 – Algoritmer og Datastrukturer

Lars Tveito

Institutt for informatikk, Universitetet i Oslo
larstvei@ifi.uio.no

Høsten 2024

Oversikt

Oversikt

- Siste uke med grafer

Oversikt

- Siste uke med grafer
- Vi skal lære hva det vil si at en urettet graf er 2-sammenhengende

Oversikt

- Siste uke med grafer
- Vi skal lære hva det vil si at en urettet graf er 2-sammenhengende
  - og hvordan vi effektivt sjekker om den er 2-sammenhengende

Oversikt

- Siste uke med grafer
- Vi skal lære hva det vil si at en urettet graf er 2-sammenhengende
  - og hvordan vi effektivt sjekker om den er 2-sammenhengende
- Vi skal lære hva de *sterkt sammenhengende komponentene* av en rettet graf er

Oversikt

- Siste uke med grafer
- Vi skal lære hva det vil si at en urettet graf er 2-sammenhengende
  - og hvordan vi effektivt sjekker om den er 2-sammenhengende
- Vi skal lære hva de *sterkt sammenhengende komponentene* av en rettet graf er
  - og hvordan vi effektivt finner dem

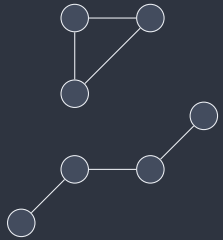
2-sammenhengende grafer

Sammenhengende

- En graf kalles *sammenhengende* hvis det finnes en sti mellom alle par av noder

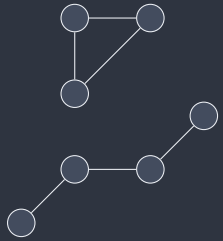
Sammenhengende

- En graf kalles *sammenhengende* hvis det finnes en sti mellom alle par av noder
- En graf som ikke er sammenhengende kan deles inn i komponenter



Sammenhengende

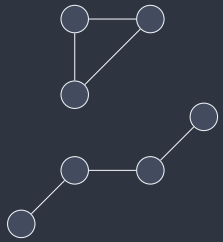
- En graf kalles *sammenhengende* hvis det finnes en sti mellom alle par av noder
- En graf som ikke er sammenhengende kan deles inn i komponenter



- Vi kan sjekke om en urettet graf er sammenhengende med et dybde først søk

Sammenhengende

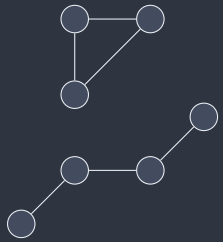
- En graf kalles *sammenhengende* hvis det finnes en sti mellom alle par av noder
- En graf som ikke er sammenhengende kan deles inn i komponenter



- Vi kan sjekke om en urettet graf er sammenhengende med et dybde først søk
  - Grafen er sammenhengende hvis `DFSVisit` besøker alle noder i grafen

Sammenhengende

- En graf kalles *sammenhengende* hvis det finnes en sti mellom alle par av noder
- En graf som ikke er sammenhengende kan deles inn i komponenter



- Vi kan sjekke om en urettet graf er sammenhengende med et dybde først søk
  - Grafen er sammenhengende hvis `DFSVisit` besøker alle noder i grafen
  - Dette er i $\mathcal{O}(|E|)$

2-sammenhengende grafer

- En graf $G = (V, E)$ er 2-sammenhengende hvis G forblir sammenhengende selv hvis en hvilken som helst node $v \in V$ fjernes fra G

2-sammenhengende grafer

- En graf $G = (V, E)$ er 2-sammenhengende hvis G forblir sammenhengende selv hvis en hvilken som helst node $v \in V$ fjernes fra G
  - Sagt annerledes, det finnes to *distinkte* stier mellom hver par av noder

2-sammenhengende grafer

- En graf $G = (V, E)$ er 2-sammenhengende hvis G forblir sammenhengende selv hvis en hvilken som helst node $v \in V$ fjernes fra G
  - Sagt annerledes, det finnes to *distinkte* stier mellom hver par av noder
  - To stier mellom u og v er *distinkte* dersom de ikke deler noen kanter og ikke deler noen noder utenom u og v

2-sammenhengende grafer

- En graf $G = (V, E)$ er 2-sammenhengende hvis G forblir sammenhengende selv hvis en hvilken som helst node $v \in V$ fjernes fra G
  - Sagt annerledes, det finnes to *distinkte* stier mellom hver par av noder
  - To stier mellom u og v er *distinkte* dersom de ikke deler noen kanter og ikke deler noen noder utenom u og v
- Mer generelt sier vi at en graf er k-sammenhengende dersom grafen forblir sammenhengende hvis man fjerner færre enn k noder

2-sammenhengende grafer

- En graf $G = (V, E)$ er 2-sammenhengende hvis G forblir sammenhengende selv hvis en hvilken som helst node $v \in V$ fjernes fra G
  - Sagt annerledes, det finnes to *distinkte* stier mellom hver par av noder
  - To stier mellom u og v er *distinkte* dersom de ikke deler noen kanter og ikke deler noen noder utenom u og v
- Mer generelt sier vi at en graf er k-sammenhengende dersom grafen forblir sammenhengende hvis man fjerner færre enn k noder
- Dette er et nyttig begrep i anvendelser der det er et ønske om redundans

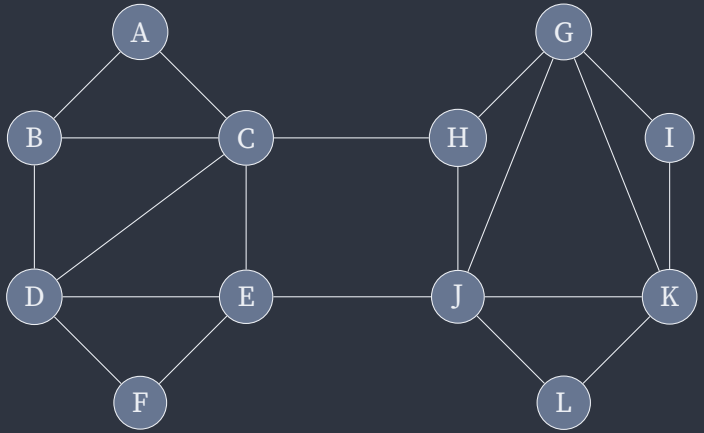
2-sammenhengende grafer

- En graf $G = (V, E)$ er 2-sammenhengende hvis G forblir sammenhengende selv hvis en hvilken som helst node $v \in V$ fjernes fra G
  - Sagt annerledes, det finnes to *distinkte* stier mellom hver par av noder
  - To stier mellom u og v er *distinkte* dersom de ikke deler noen kanter og ikke deler noen noder utenom u og v
- Mer generelt sier vi at en graf er k-sammenhengende dersom grafen forblir sammenhengende hvis man fjerner færre enn k noder
- Dette er et nyttig begrep i anvendelser der det er et ønske om redundans
  - I et nettverk betyr det at en hvilken som helst maskin kan gå ned, og pakker vil fremdeles nå frem

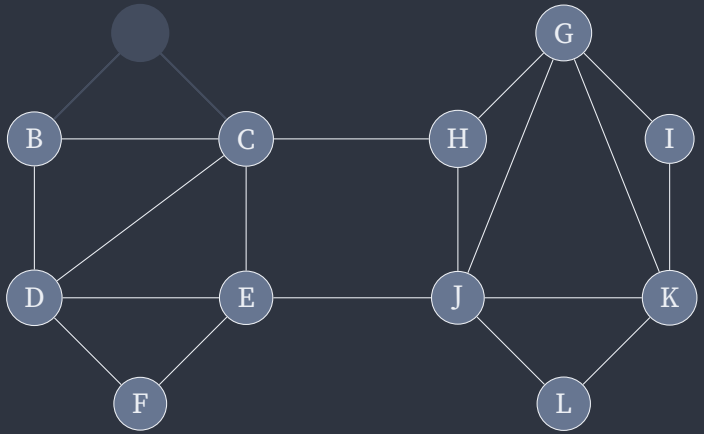
2-sammenhengende grafer

- En graf $G = (V, E)$ er 2-sammenhengende hvis G forblir sammenhengende selv hvis en hvilken som helst node $v \in V$ fjernes fra G
  - Sagt annerledes, det finnes to *distinkte* stier mellom hver par av noder
  - To stier mellom u og v er *distinkte* dersom de ikke deler noen kanter og ikke deler noen noder utenom u og v
- Mer generelt sier vi at en graf er k-sammenhengende dersom grafen forblir sammenhengende hvis man fjerner færre enn k noder
- Dette er et nyttig begrep i anvendelser der det er et ønske om redundans
  - I et nettverk betyr det at en hvilken som helst maskin kan gå ned, og pakker vil fremdeles nå frem
  - Hos Ruter kan det bety at det kan være full stans rundt en holdeplass, men at det finnes en alternativ rute for alle reisende

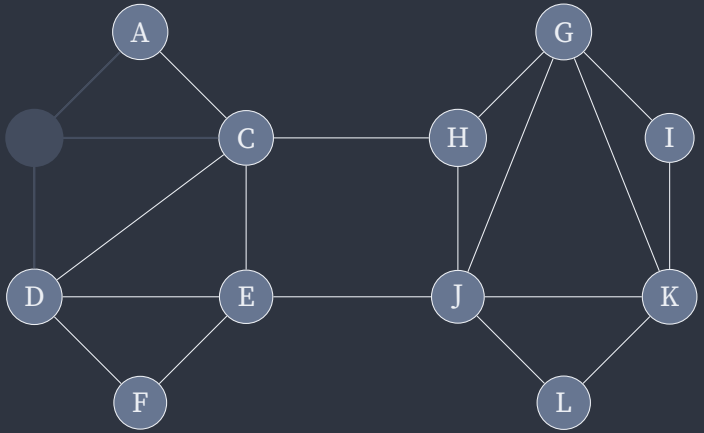
En 2-sammenhengende graf (eksempel)



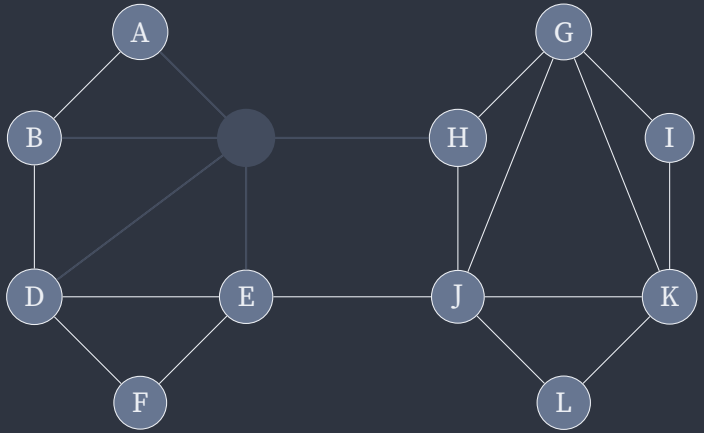
En 2-sammenhengende graf (eksempel)



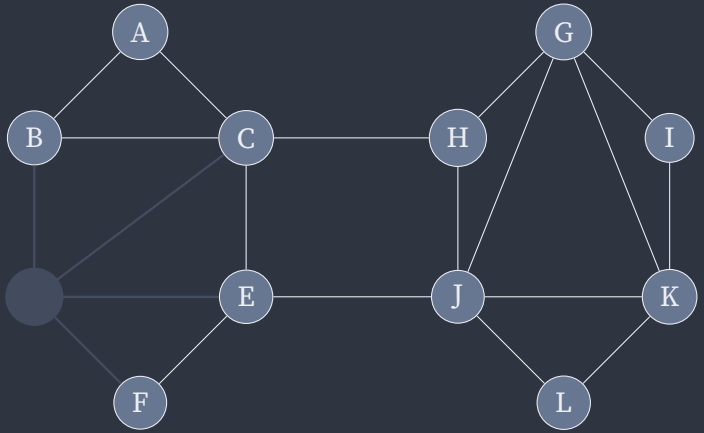
En 2-sammenhengende graf (eksempel)



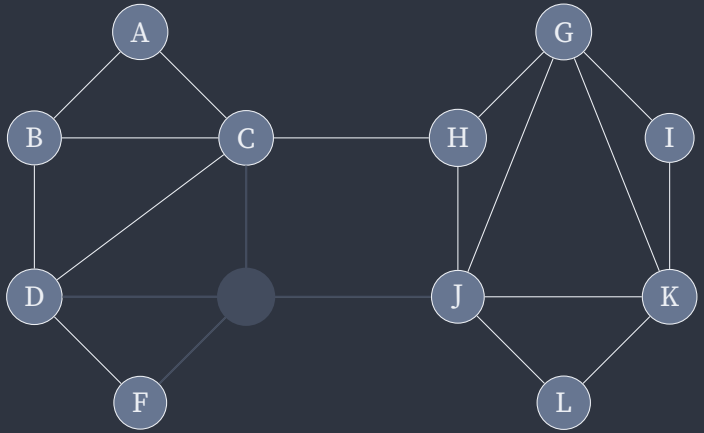
En 2-sammenhengende graf (eksempel)



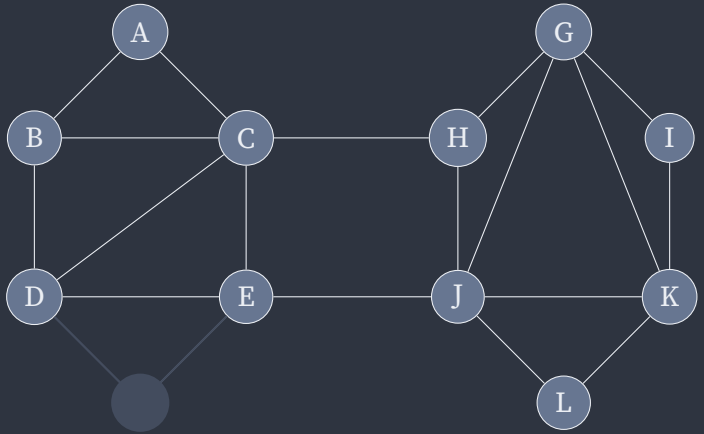
En 2-sammenhengende graf (eksempel)



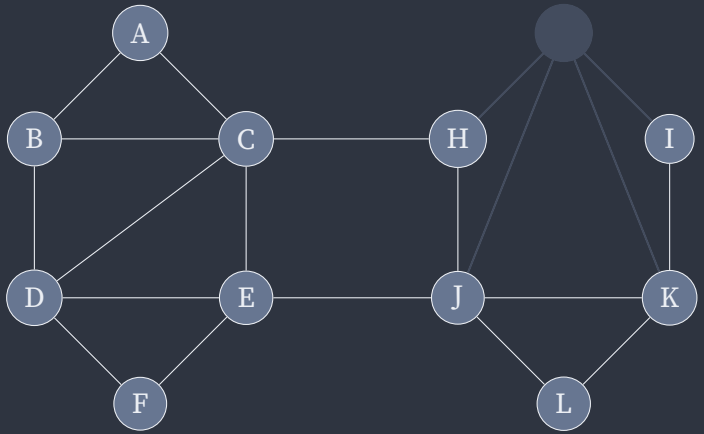
En 2-sammenhengende graf (eksempel)



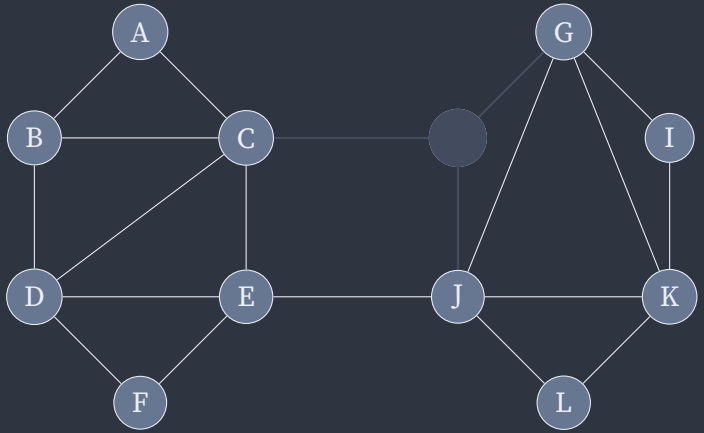
En 2-sammenhengende graf (eksempel)



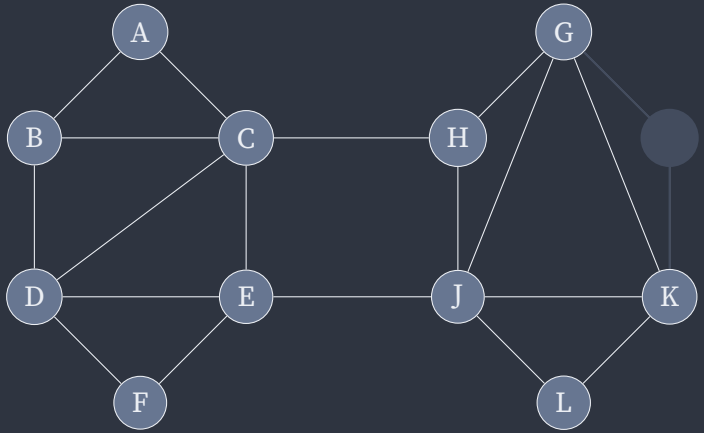
En 2-sammenhengende graf (eksempel)



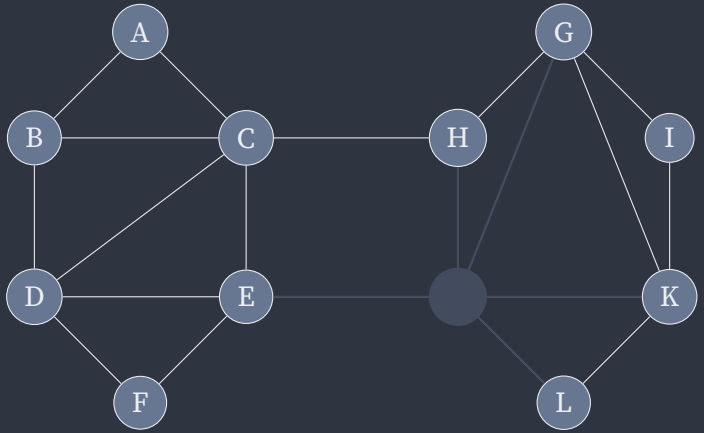
En 2-sammenhengende graf (eksempel)



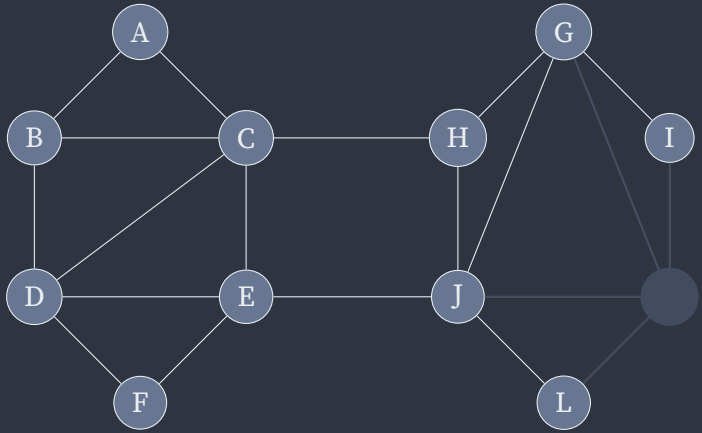
En 2-sammenhengende graf (eksempel)



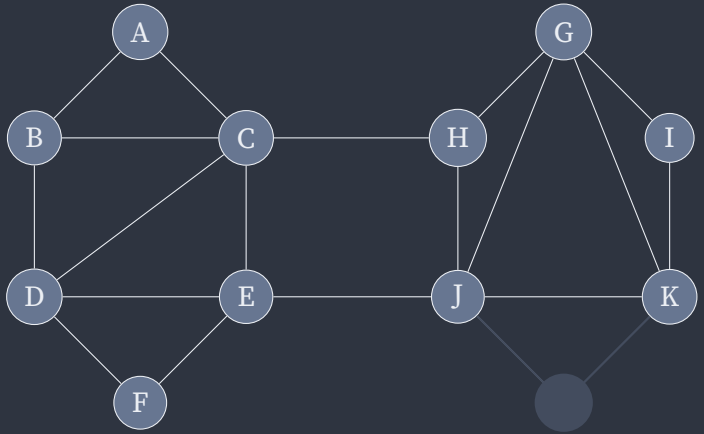
En 2-sammenhengende graf (eksempel)



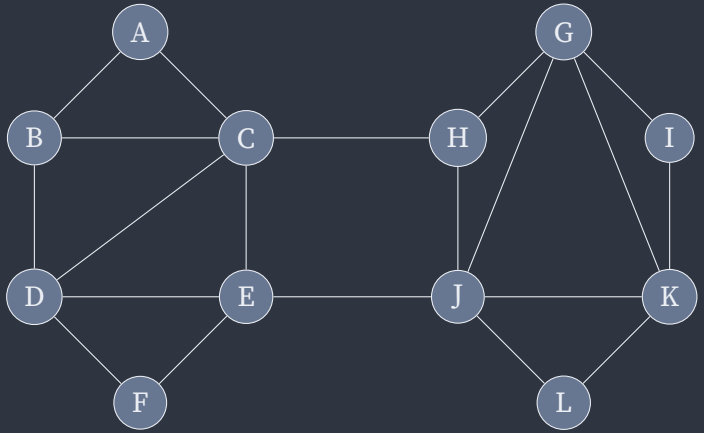
En 2-sammenhengende graf (eksempel)



En 2-sammenhengende graf (eksempel)



En 2-sammenhengende graf (eksempel)



Er G 2-sammenhengende? (naiv)

- Definisjonen gir opphav til en enkel (men ineffektiv) løsning

Er G 2-sammenhengende? (naiv)

- Definisjonen gir opphav til en enkel (men ineffektiv) løsning

Er G 2-sammenhengende? (naiv)

- Definisjonen gir opphav til en enkel (men ineffektiv) løsning

Algorithm: Naiv algoritme for å sjekke om en graf er 2-sammenhengende

Input: En sammenhengende graf $G = (V, E)$
Output: Gir **true** hvis grafen er 2-sammenhengende, **false** ellers

```
1 Procedure IsBiconnectedNaive(G)
2     for v ∈ V do
3         G' = (V', E') ← G with v removed
```

Er G 2-sammenhengende? (naiv)

- Definisjonen gir opphav til en enkel (men ineffektiv) løsning

ALGORITHM: NAIV ALGORITME FOR Å SJEKKE OM EN GRAF ER 2-SAMMENHENGENDE

Input: En sammenhengende graf $G = (V, E)$
Output: Gir **true** hvis grafen er 2-sammenhengende, **false** ellers

```
1 Procedure IsBiconnectedNaive(G)
2     for v ∈ V do
3         G' = (V', E') ← G with v removed
4         visited ← empty set
5         u ← any vertex u ∈ V'
6         DFSVisit(G', u, visited)
```

Er G 2-sammenhengende? (naiv)

- Definisjonen gir opphav til en enkel (men ineffektiv) løsning

ALGORITHM: NAIV ALGORITME FOR Å SJEKKE OM EN GRAF ER 2-SAMMENHENGENDE

Input: En sammenhengende graf $G = (V, E)$
Output: Gir **true** hvis grafen er 2-sammenhengende, **false** ellers

```
1 Procedure IsBiconnectedNaive(G)
2     for v ∈ V do
3         G' = (V', E') ← G with v removed
4         visited ← empty set
5         u ← any vertex u ∈ V'
6         DFSVisit(G', u, visited)
7         if visited ≠ V' then
8             return false
```

Er G 2-sammenhengende? (naiv)

- Definisjonen gir opphav til en enkel (men ineffektiv) løsning

ALGORITHM: NAIV ALGORITME FOR Å SJEKKE OM EN GRAF ER 2-SAMMENHENGENDE

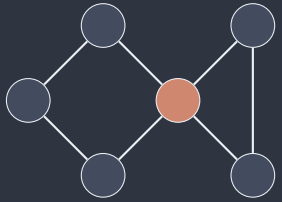
Input: En sammenhengende graf $G = (V, E)$
Output: Gir **true** hvis grafen er 2-sammenhengende, **false** ellers

```
1 Procedure IsBiconnectedNaive(G)
2     for v ∈ V do
3         G' = (V', E') ← G with v removed
4         visited ← empty set
5         u ← any vertex u ∈ V'
6         DFSVisit(G', u, visited)
7         if visited ≠ V' then
8             return false
9     return true
```

- Algoritmen er i $\mathcal{O}(|V| \cdot (|V| + |E|))$
  - som kan forenkles til $\mathcal{O}(|V|^3)$

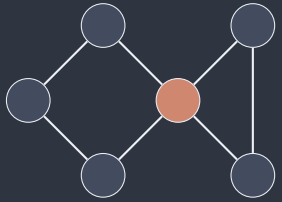
Separasjonsnoder

- Intuitivt er en separasjonsnode en node som holder grafen sammenhengende



Separasjonsnoder

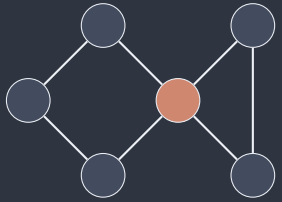
- Intuitivt er en separasjonsnode en node som holder grafen sammenhengende



- Hvis en separasjonsnode fjernes, så får grafen flere komponenter

Separasjonsnoder

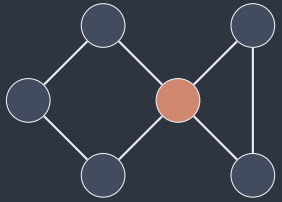
- Intuitivt er en separasjonsnode en node som holder grafen sammenhengende



- Hvis en separasjonsnode fjernes, så får grafen flere komponenter
- Dersom alle stier mellom to noder går gjennom den samme noden $v \in V$, så er v en separasjonsnode

Separasjonsnoder

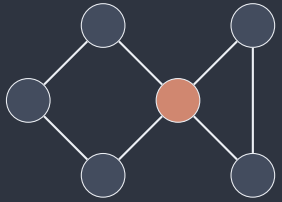
- Intuitivt er en separasjonsnode en node som holder grafen sammenhengende



- Hvis en separasjonsnode fjernes, så får grafen flere komponenter
- Dersom alle stier mellom to noder går gjennom den samme noden $v \in V$, så er v en separasjonsnode
- Vi skal se en algoritme som finner alle separasjonsnoder i $\mathcal{O}(|V| + |E|)$

Separasjonsnoder

- Intuitivt er en separasjonsnode en node som holder grafen sammenhengende



- Hvis en separasjonsnode fjernes, så får grafen flere komponenter
- Dersom alle stier mellom to noder går gjennom den samme noden $v \in V$, så er v en separasjonsnode
- Vi skal se en algoritme som finner alle separasjonsnoder i $\mathcal{O}(|V| + |E|)$
  - Da får vi også en effektiv algoritme for å sjekke om en graf er 2-sammenhengende

Separasjonsnoder fra DFS

- Vi gjør et dybde-først søk, som gir opphav til et spenntre T

Separasjonsnoder fra DFS

- Vi gjør et dybde-først søk, som gir opphav til et spenntre T
  - Dersom vi gikk fra u til v i søket lager vi en kant fra u til v i treet (discovery-edge)

Separasjonsnoder fra DFS

- Vi gjør et dybde-først søk, som gir opphav til et spenntre T
  - Dersom vi gikk fra u til v i søket lager vi en kant fra u til v i treet (discovery-edge)
- I tillegg holder vi styr på hvilke noder som kan nås som allerede er oppdaget (back-edge)

Separasjonsnoder fra DFS

- Vi gjør et dybde-først søk, som gir opphav til et spenntre T
  - Dersom vi gikk fra u til v i søket lager vi en kant fra u til v i treet (discovery-edge)
- I tillegg holder vi styr på hvilke noder som kan nås som allerede er oppdaget (back-edge)
- En node u er en separasjonsnode hvis:

Separasjonsnoder fra DFS

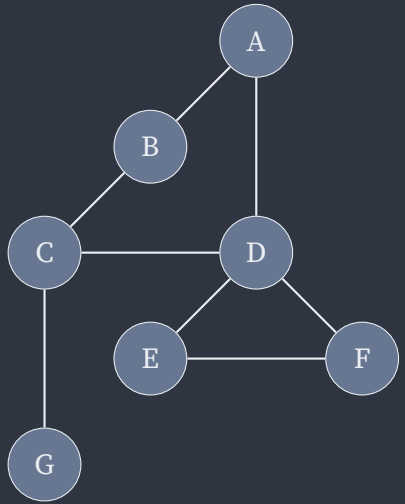
- Vi gjør et dybde-først søk, som gir opphav til et spenntre T
  - Dersom vi gikk fra u til v i søket lager vi en kant fra u til v i treet (discovery-edge)
- I tillegg holder vi styr på hvilke noder som kan nås som allerede er oppdaget (back-edge)
- En node u er en separasjonsnode hvis:
  - u er rot i T og har mer enn ett barn, eller

Separasjonsnoder fra DFS

- Vi gjør et dybde-først søk, som gir opphav til et spenntre T
  - Dersom vi gikk fra u til v i søket lager vi en kant fra u til v i treet (discovery-edge)
- I tillegg holder vi styr på hvilke noder som kan nås som allerede er oppdaget (back-edge)
- En node u er en separasjonsnode hvis:
  - u er rot i T og har mer enn ett barn, eller
  - u ikke er roten, og har et barn v, slik at ingen etterkommere av v (inkludert v selv) har en back-edge til en forgjenger av u

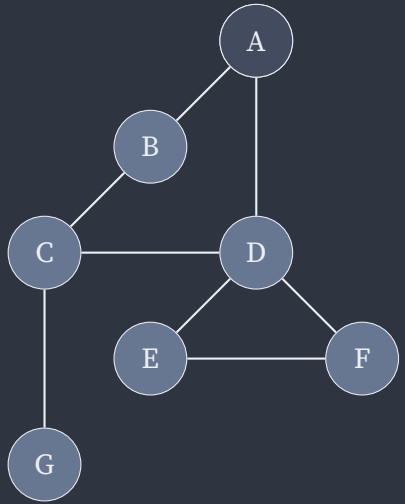
Separasjonsnoder fra DFS

- Vi gjør et dybde-først søk, som gir opphav til et spenntre T
  - Dersom vi gikk fra u til v i søket lager vi en kant fra u til v i treet (discovery-edge)
- I tillegg holder vi styr på hvilke noder som kan nås som allerede er oppdaget (back-edge)
- En node u er en separasjonsnode hvis:
  - u er rot i T og har mer enn ett barn, eller
  - u ikke er roten, og har et barn v, slik at ingen etterkommere av v (inkludert v selv) har en back-edge til en forgjenger av u



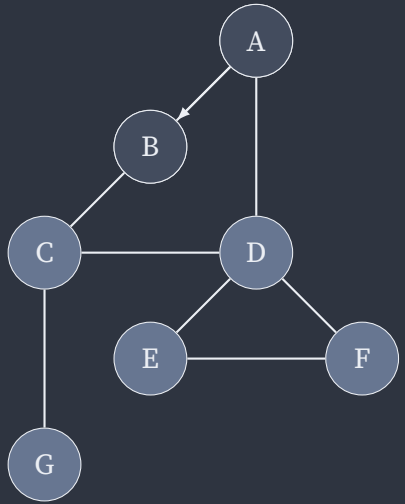
Separasjonsnoder fra DFS

- Vi gjør et dybde-først søk, som gir opphav til et spenntre T
  - Dersom vi gikk fra u til v i søket lager vi en kant fra u til v i treet (discovery-edge)
- I tillegg holder vi styr på hvilke noder som kan nås som allerede er oppdaget (back-edge)
- En node u er en separasjonsnode hvis:
  - u er rot i T og har mer enn ett barn, eller
  - u ikke er roten, og har et barn v, slik at ingen etterkommere av v (inkludert v selv) har en back-edge til en forgjenger av u



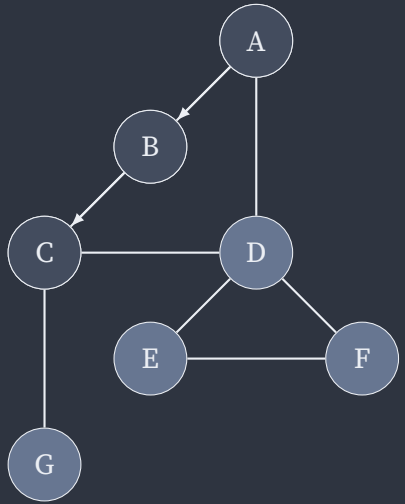
Separasjonsnoder fra DFS

- Vi gjør et dybde-først søk, som gir opphav til et spenntre T
  - Dersom vi gikk fra u til v i søket lager vi en kant fra u til v i treet (discovery-edge)
- I tillegg holder vi styr på hvilke noder som kan nås som allerede er oppdaget (back-edge)
- En node u er en separasjonsnode hvis:
  - u er rot i T og har mer enn ett barn, eller
  - u ikke er roten, og har et barn v, slik at ingen etterkommere av v (inkludert v selv) har en back-edge til en forgjenger av u



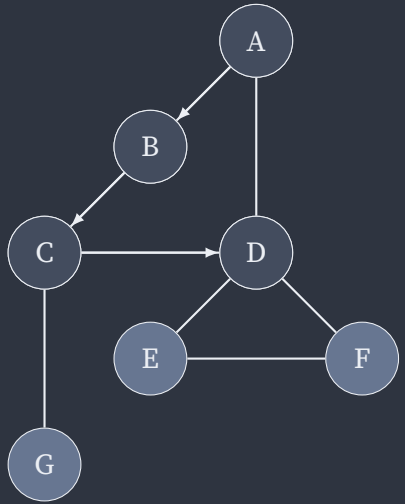
Separasjonsnoder fra DFS

- Vi gjør et dybde-først søk, som gir opphav til et spenntre T
  - Dersom vi gikk fra u til v i søket lager vi en kant fra u til v i treet (discovery-edge)
- I tillegg holder vi styr på hvilke noder som kan nås som allerede er oppdaget (back-edge)
- En node u er en separasjonsnode hvis:
  - u er rot i T og har mer enn ett barn, eller
  - u ikke er roten, og har et barn v, slik at ingen etterkommere av v (inkludert v selv) har en back-edge til en forgjenger av u



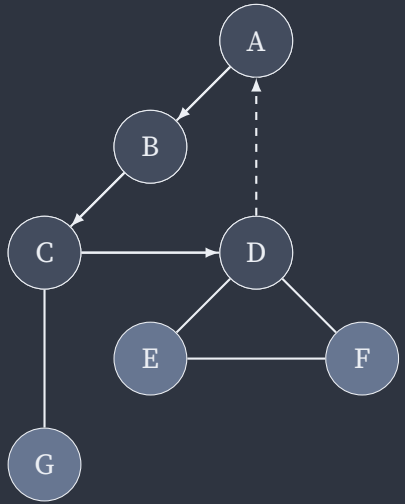
Separasjonsnoder fra DFS

- Vi gjør et dybde-først søk, som gir opphav til et spenntre T
  - Dersom vi gikk fra u til v i søket lager vi en kant fra u til v i treet (discovery-edge)
- I tillegg holder vi styr på hvilke noder som kan nås som allerede er oppdaget (back-edge)
- En node u er en separasjonsnode hvis:
  - u er rot i T og har mer enn ett barn, eller
  - u ikke er roten, og har et barn v, slik at ingen etterkommere av v (inkludert v selv) har en back-edge til en forgjenger av u



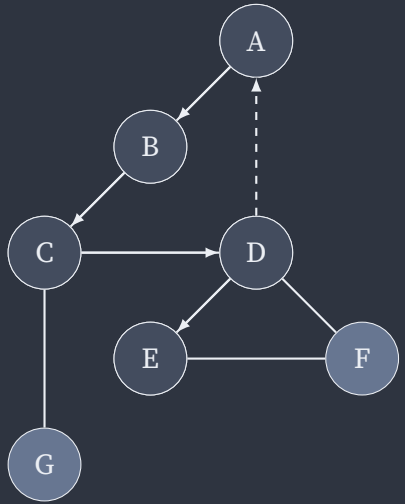
Separasjonsnoder fra DFS

- Vi gjør et dybde-først søk, som gir opphav til et spenntre T
  - Dersom vi gikk fra u til v i søket lager vi en kant fra u til v i treet (discovery-edge)
- I tillegg holder vi styr på hvilke noder som kan nås som allerede er oppdaget (back-edge)
- En node u er en separasjonsnode hvis:
  - u er rot i T og har mer enn ett barn, eller
  - u ikke er roten, og har et barn v, slik at ingen etterkommere av v (inkludert v selv) har en back-edge til en forgjenger av u



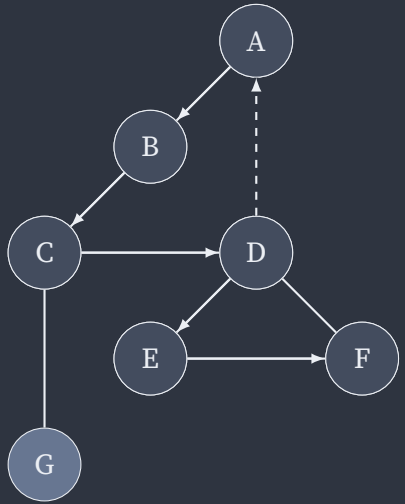
Separasjonsnoder fra DFS

- Vi gjør et dybde-først søk, som gir opphav til et spenntre T
  - Dersom vi gikk fra u til v i søket lager vi en kant fra u til v i treet (discovery-edge)
- I tillegg holder vi styr på hvilke noder som kan nås som allerede er oppdaget (back-edge)
- En node u er en separasjonsnode hvis:
  - u er rot i T og har mer enn ett barn, eller
  - u ikke er roten, og har et barn v, slik at ingen etterkommere av v (inkludert v selv) har en back-edge til en forgjenger av u



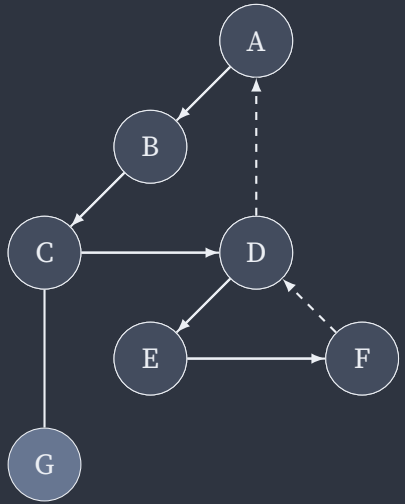
Separasjonsnoder fra DFS

- Vi gjør et dybde-først søk, som gir opphav til et spenntre T
  - Dersom vi gikk fra u til v i søket lager vi en kant fra u til v i treet (discovery-edge)
- I tillegg holder vi styr på hvilke noder som kan nås som allerede er oppdaget (back-edge)
- En node u er en separasjonsnode hvis:
  - u er rot i T og har mer enn ett barn, eller
  - u ikke er roten, og har et barn v, slik at ingen etterkommere av v (inkludert v selv) har en back-edge til en forgjenger av u



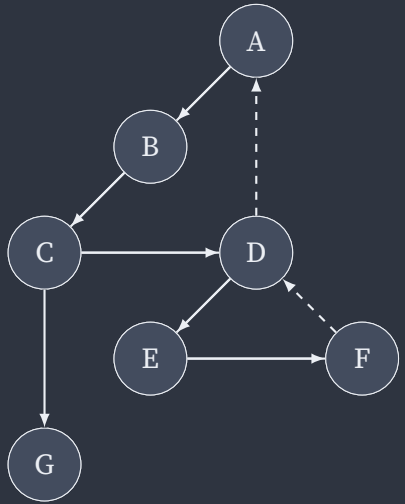
Separasjonsnoder fra DFS

- Vi gjør et dybde-først søk, som gir opphav til et spenntre T
  - Dersom vi gikk fra u til v i søket lager vi en kant fra u til v i treet (discovery-edge)
- I tillegg holder vi styr på hvilke noder som kan nås som allerede er oppdaget (back-edge)
- En node u er en separasjonsnode hvis:
  - u er rot i T og har mer enn ett barn, eller
  - u ikke er roten, og har et barn v, slik at ingen etterkommere av v (inkludert v selv) har en back-edge til en forgjenger av u



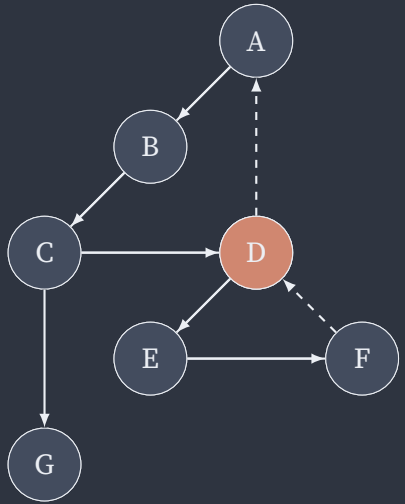
Separasjonsnoder fra DFS

- Vi gjør et dybde-først søk, som gir opphav til et spenntre T
  - Dersom vi gikk fra u til v i søket lager vi en kant fra u til v i treet (discovery-edge)
- I tillegg holder vi styr på hvilke noder som kan nås som allerede er oppdaget (back-edge)
- En node u er en separasjonsnode hvis:
  - u er rot i T og har mer enn ett barn, eller
  - u ikke er roten, og har et barn v, slik at ingen etterkommere av v (inkludert v selv) har en back-edge til en forgjenger av u



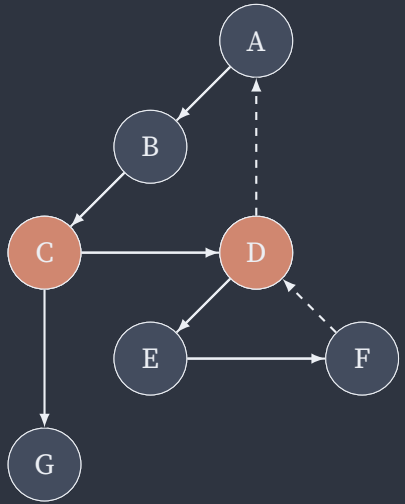
Separasjonsnoder fra DFS

- Vi gjør et dybde-først søk, som gir opphav til et spenntre T
  - Dersom vi gikk fra u til v i søket lager vi en kant fra u til v i treet (discovery-edge)
- I tillegg holder vi styr på hvilke noder som kan nås som allerede er oppdaget (back-edge)
- En node u er en separasjonsnode hvis:
  - u er rot i T og har mer enn ett barn, eller
  - u ikke er roten, og har et barn v, slik at ingen etterkommere av v (inkludert v selv) har en back-edge til en forgjenger av u



Separasjonsnoder fra DFS

- Vi gjør et dybde-først søk, som gir opphav til et spenntre T
  - Dersom vi gikk fra u til v i søket lager vi en kant fra u til v i treet (discovery-edge)
- I tillegg holder vi styr på hvilke noder som kan nås som allerede er oppdaget (back-edge)
- En node u er en separasjonsnode hvis:
  - u er rot i T og har mer enn ett barn, eller
  - u ikke er roten, og har et barn v, slik at ingen etterkommere av v (inkludert v selv) har en back-edge til en forgjenger av u



Finn separasjonsnoder fra DFS med `depth` og `low`

- Vi gjør et dybde-først søk

Finn separasjonsnoder fra DFS med `depth` og `low`

- Vi gjør et dybde-først søk
- For hver node u noterer vi:

Finn separasjonsnoder fra DFS med `depth` og `low`

- Vi gjør et dybde-først søk
- For hver node u noterer vi:
  `depth`[u] *dybden* til u i T

Finn separasjonsnoder fra DFS med `depth` og `low`

- Vi gjør et dybde-først søk
- For hver node u noterer vi:

  `depth`[u] *dybden* til u i T

  `low`[u] den laveste dybden som kan nås ved å følge én eller flere etterkommere av u og maksimalt én tilbakekant

Finn separasjonsnoder fra DFS med `depth` og `low`

- Vi gjør et dybde-først søk
- For hver node u noterer vi:

  `depth`[u] *dybden* til u i T

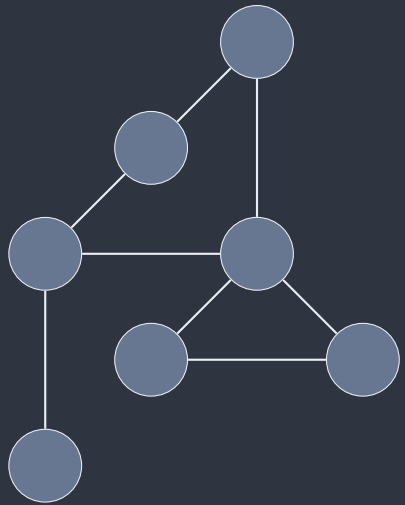
  `low`[u] den laveste dybden som kan nås ved å følge én eller flere etterkommere av u og maksimalt én tilbakekant
- Dersom `depth`[u] $\leq$ `low`[v], der v er et barn av u, så er u en separasjonsnode

Finn separasjonsnoder fra DFS med `depth` og `low`

- Vi gjør et dybde-først søk
- For hver node u noterer vi:

  `depth`[u] *dybden* til u i T

  `low`[u] den laveste dybden som kan nås ved å følge én eller flere etterkommere av u og maksimalt én tilbakekant
- Dersom `depth`[u] $\leq$ `low`[v], der v er et barn av u, så er u en separasjonsnode

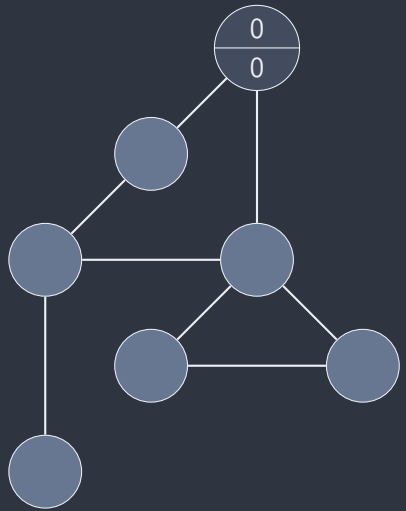


Finn separasjonsnoder fra DFS med `depth` og `low`

- Vi gjør et dybde-først søk
- For hver node u noterer vi:

  `depth`[u] *dybden* til u i T

  `low`[u] den laveste dybden som kan nås ved å følge én eller flere etterkommere av u og maksimalt én tilbakekant
- Dersom `depth`[u] $\leq$ `low`[v], der v er et barn av u, så er u en separasjonsnode

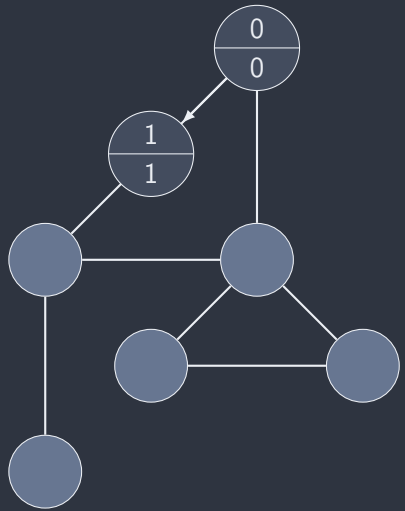


Finn separasjonsnoder fra DFS med `depth` og `low`

- Vi gjør et dybde-først søk
- For hver node u noterer vi:

  `depth`[u] *dybden* til u i T

  `low`[u] den laveste dybden som kan nås ved å følge én eller flere etterkommere av u og maksimalt én tilbakekant
- Dersom `depth`[u] $\leq$ `low`[v], der v er et barn av u, så er u en separasjonsnode

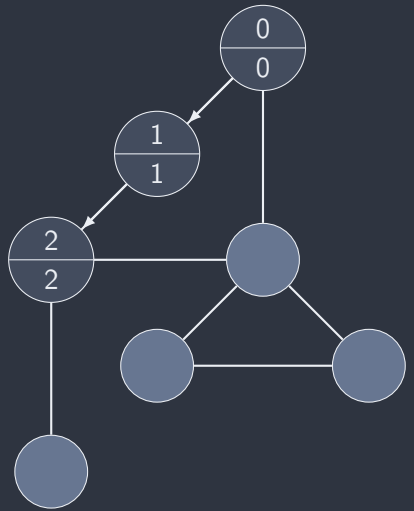


Finn separasjonsnoder fra DFS med `depth` og `low`

- Vi gjør et dybde-først søk
- For hver node u noterer vi:

  `depth`[u] *dybden* til u i T

  `low`[u] den laveste dybden som kan nås ved å følge én eller flere etterkommere av u og maksimalt én tilbakekant
- Dersom `depth`[u] $\leq$ `low`[v], der v er et barn av u, så er u en separasjonsnode

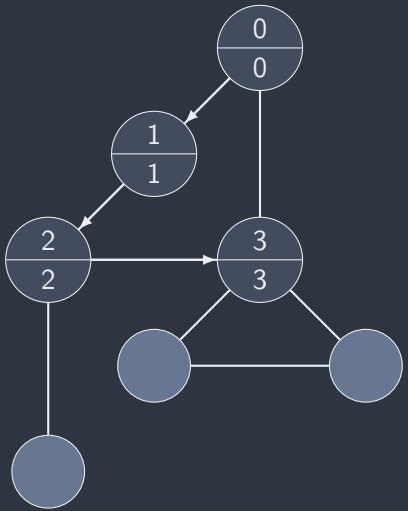


Finn separasjonsnoder fra DFS med `depth` og `low`

- Vi gjør et dybde-først søk
- For hver node u noterer vi:

  `depth`[u] *dybden* til u i T

  `low`[u] den laveste dybden som kan nås ved å følge én eller flere etterkommere av u og maksimalt én tilbakekant
- Dersom `depth`[u] $\leq$ `low`[v], der v er et barn av u, så er u en separasjonsnode

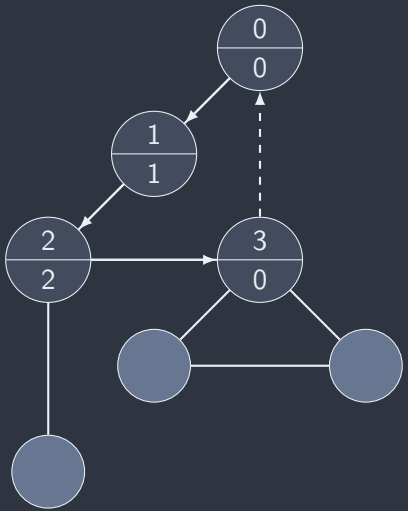


Finn separasjonsnoder fra DFS med `depth` og `low`

- Vi gjør et dybde-først søk
- For hver node u noterer vi:

  `depth`[u] *dybden* til u i T

  `low`[u] den laveste dybden som kan nås ved å følge én eller flere etterkommere av u og maksimalt én tilbakekant
- Dersom `depth`[u] $\leq$ `low`[v], der v er et barn av u, så er u en separasjonsnode

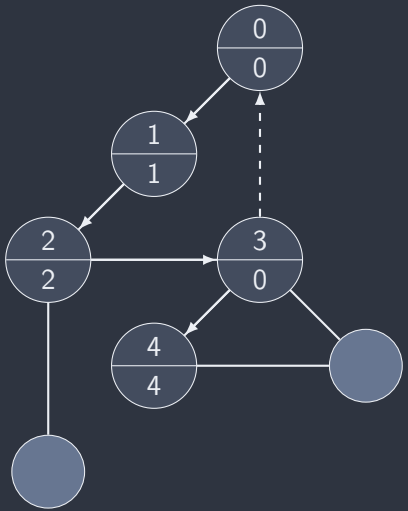


Finn separasjonsnoder fra DFS med `depth` og `low`

- Vi gjør et dybde-først søk
- For hver node u noterer vi:

  `depth`[u] *dybden* til u i T

  `low`[u] den laveste dybden som kan nås ved å følge én eller flere etterkommere av u og maksimalt én tilbakekant
- Dersom `depth`[u] $\leq$ `low`[v], der v er et barn av u, så er u en separasjonsnode

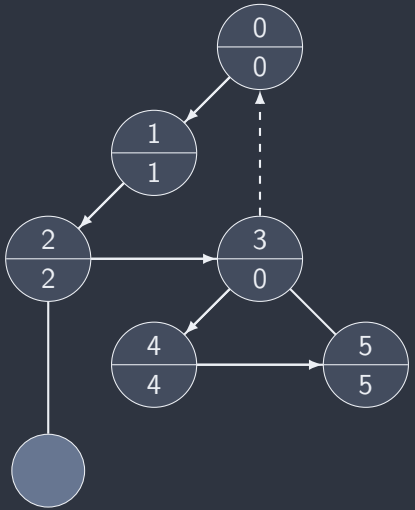


Finn separasjonsnoder fra DFS med `depth` og `low`

- Vi gjør et dybde-først søk
- For hver node u noterer vi:

  `depth`[u] *dybden* til u i T

  `low`[u] den laveste dybden som kan nås ved å følge én eller flere etterkommere av u og maksimalt én tilbakekant
- Dersom `depth`[u] $\leq$ `low`[v], der v er et barn av u, så er u en separasjonsnode

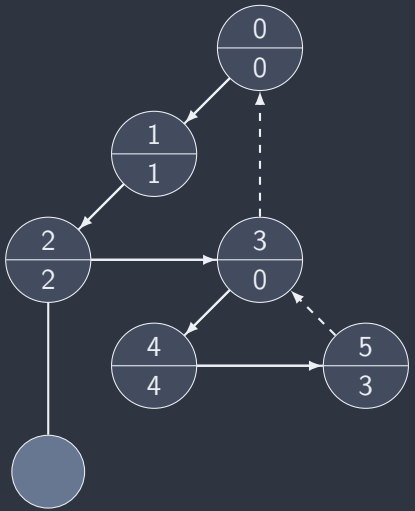


Finn separasjonsnoder fra DFS med `depth` og `low`

- Vi gjør et dybde-først søk
- For hver node u noterer vi:

  `depth`[u] *dybden* til u i T

  `low`[u] den laveste dybden som kan nås ved å følge én eller flere etterkommere av u og maksimalt én tilbakekant
- Dersom `depth`[u] $\leq$ `low`[v], der v er et barn av u, så er u en separasjonsnode

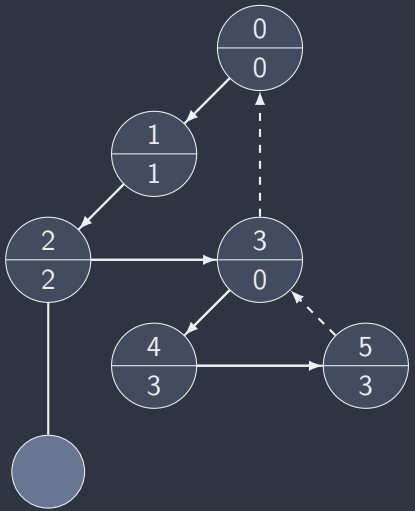


Finn separasjonsnoder fra DFS med `depth` og `low`

- Vi gjør et dybde-først søk
- For hver node u noterer vi:

  `depth`[u] *dybden* til u i T

  `low`[u] den laveste dybden som kan nås ved å følge én eller flere etterkommere av u og maksimalt én tilbakekant
- Dersom `depth`[u] $\leq$ `low`[v], der v er et barn av u, så er u en separasjonsnode

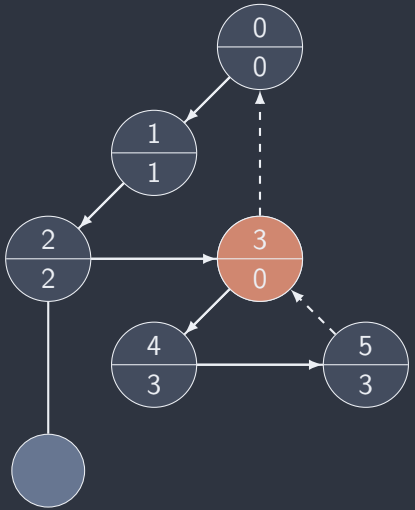


Finn separasjonsnoder fra DFS med `depth` og `low`

- Vi gjør et dybde-først søk
- For hver node u noterer vi:

  `depth`[u] *dybden* til u i T

  `low`[u] den laveste dybden som kan nås ved å følge én eller flere etterkommere av u og maksimalt én tilbakekant
- Dersom `depth`[u] $\leq$ `low`[v], der v er et barn av u, så er u en separasjonsnode

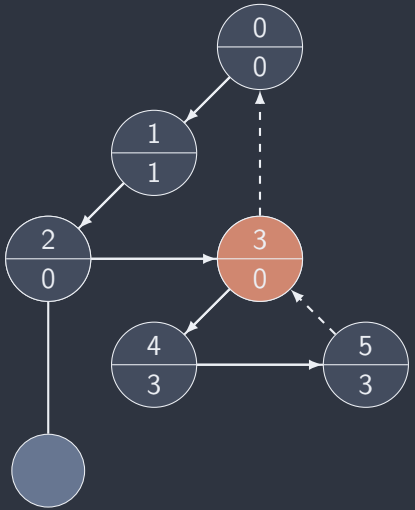


Finn separasjonsnoder fra DFS med `depth` og `low`

- Vi gjør et dybde-først søk
- For hver node u noterer vi:

  `depth`[u] *dybden* til u i T

  `low`[u] den laveste dybden som kan nås ved å følge én eller flere etterkommere av u og maksimalt én tilbakekant
- Dersom `depth`[u] $\leq$ `low`[v], der v er et barn av u, så er u en separasjonsnode

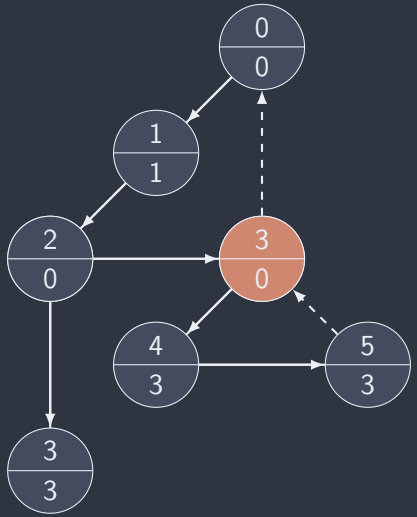


Finn separasjonsnoder fra DFS med `depth` og `low`

- Vi gjør et dybde-først søk
- For hver node u noterer vi:

  `depth`[u] *dybden* til u i T

  `low`[u] den laveste dybden som kan nås ved å følge én eller flere etterkommere av u og maksimalt én tilbakekant
- Dersom `depth`[u] $\leq$ `low`[v], der v er et barn av u, så er u en separasjonsnode

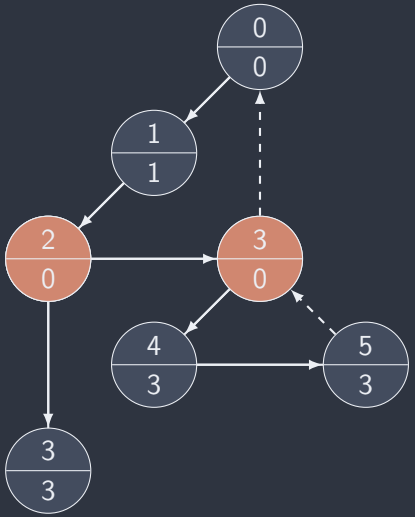


Finn separasjonsnoder fra DFS med `depth` og `low`

- Vi gjør et dybde-først søk
- For hver node u noterer vi:

  `depth`[u] *dybden* til u i T

  `low`[u] den laveste dybden som kan nås ved å følge én eller flere etterkommere av u og maksimalt én tilbakekant
- Dersom `depth`[u] $\leq$ `low`[v], der v er et barn av u, så er u en separasjonsnode

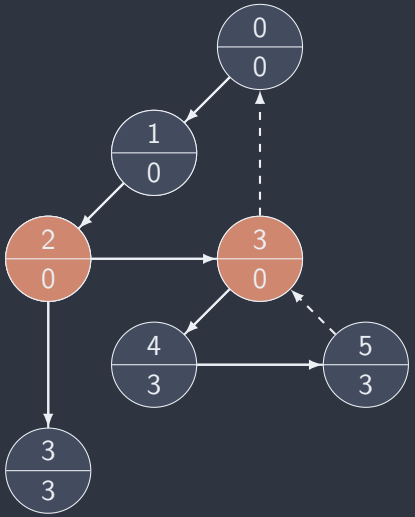


Finn separasjonsnoder fra DFS med `depth` og `low`

- Vi gjør et dybde-først søk
- For hver node u noterer vi:

  `depth`[u] *dybden* til u i T

  `low`[u] den laveste dybden som kan nås ved å følge én eller flere etterkommere av u og maksimalt én tilbakekant
- Dersom `depth`[u] $\leq$ `low`[v], der v er et barn av u, så er u en separasjonsnode



Finn separasjonsnoder

Algorithm: Finn alle separasjonsnoder i en sammenhengende graf

Input: En graf sammenhengende $G = (V, E)$
Output: Returnerer alle separasjonsnoder i G

```
1 depth ← empty map
2 low ← empty map
3 seps ← empty set
```

Finn separasjonsnoder

Algorithm: Finn alle separasjonsnoder i en sammenhengende graf

Input: En graf sammenhengende $G = (V, E)$
Output: Returnerer alle separasjonsnoder i G

```
1 depth ← empty map
2 low ← empty map
3 seps ← empty set
4 Procedure SeparationVertices(G)
5     s ← choose arbitrary vertex from V
6     depth[s] ← 0
7     low[s] ← 0
8     children ← 0
```

Finn separasjonsnoder

Algorithm: Finn alle separasjonsnoder i en sammenhengende graf

Input: En graf sammenhengende $G = (V, E)$
Output: Returnerer alle separasjonsnoder i G

```
1  depth ← empty map
2  low ← empty map
3  seps ← empty set
4  Procedure SeparationVertices(G)
5      s ← choose arbitrary vertex from V
6      depth[s] ← 0
7      low[s] ← 0
8      children ← 0
9
10     for (s, u) ∈ E do
11         if u ∉ depth then
12             SepRec(G, s, u, 1)
13             children ← children + 1
```

Finn separasjonsnoder

Algorithm: Finn alle separasjonsnoder i en sammenhengende graf

Input: En graf sammenhengende $G = (V, E)$
Output: Returnerer alle separasjonsnoder i G

```
1  depth ← empty map
2  low ← empty map
3  seps ← empty set
4  Procedure SeparationVertices(G)
5  |  s ← choose arbitrary vertex from V
6  |  depth[s] ← 0
7  |  low[s] ← 0
8  |  children ← 0
9  |
10 |  for (s, u) ∈ E do
11 |  |  if u ∉ depth then
12 |  |  |  SepRec(G, s, u, 1)
13 |  |  |  children ← children + 1
14 |
15 |  if children > 1 then
16 |  |  add s to seps
17 |  return seps
18
```

Finn separasjonsnoder

Algorithm: Finn alle separasjonsnoder i en sammenhengende graf

Input: En graf sammenhengende $G = (V, E)$
Output: Returnerer alle separasjonsnoder i G

```
1  depth ← empty map
2  low ← empty map
3  seps ← empty set
4  Procedure SeparationVertices(G)
5  |  s ← choose arbitrary vertex from V
6  |  depth[s] ← 0
7  |  low[s] ← 0
8  |  children ← 0
9  |
10 |  for (s, u) ∈ E do
11 |  |  if u ∉ depth then
12 |  |  |  SepRec(G, s, u, 1)
13 |  |  |  children ← children + 1
14 |
15 |  if children > 1 then
16 |  |  add s to seps
17 |  return seps
18 |
19 Procedure SepRec(G, p, u, d)
20 |  depth[u] ← d
21 |  low[u] ← d
```

Finn separasjonsnoder

ALGORITHM: FINN ALLE SEPARASJONSNODER I EN SAMMENHENGENDE GRAF

Input: En graf sammenhengende $G = (V, E)$
Output: Returnerer alle separasjonsnoder i G

```
1  depth ← empty map
2  low ← empty map
3  seps ← empty set
4  Procedure SeparationVertices(G)
5      s ← choose arbitrary vertex from V
6      depth[s] ← 0
7      low[s] ← 0
8      children ← 0
9
10     for (s, u) ∈ E do
11         if u ∉ depth then
12             SepRec(G, s, u, 1)
13             children ← children + 1
14
15     if children > 1 then
16         add s to seps
17     return seps
18
19 Procedure SepRec(G, p, u, d)
20     depth[u] ← d
21     low[u] ← d
22
23     for (u, v) ∈ E do
24         if v = p then
25             continue
26         if v ∈ depth then
27             low[u] ← min(low[u], depth[v])
28             continue
```

Finn separasjonsnoder

Algorithm: Finn alle separasjonsnoder i en sammenhengende graf

Input: En graf sammenhengende $G = (V, E)$
Output: Returnerer alle separasjonsnoder i G

```
1  depth ← empty map
2  low ← empty map
3  seps ← empty set
4  Procedure SeparationVertices(G)
5      s ← choose arbitrary vertex from V
6      depth[s] ← 0
7      low[s] ← 0
8      children ← 0
9
10     for (s, u) ∈ E do
11         if u ∉ depth then
12             SepRec(G, s, u, 1)
13             children ← children + 1
14
15     if children > 1 then
16         add s to seps
17     return seps
18
19 Procedure SepRec(G, p, u, d)
20     depth[u] ← d
21     low[u] ← d
22
23     for (u, v) ∈ E do
24         if v = p then
25             continue
26         if v ∈ depth then
27             low[u] ← min(low[u], depth[v])
28             continue
29
30         SepRec(G, u, v, d + 1)
31         low[u] ← min(low[u], low[v])
32         if d ≤ low[v] then
33             add u to seps
```

Er G 2-sammenhengende?

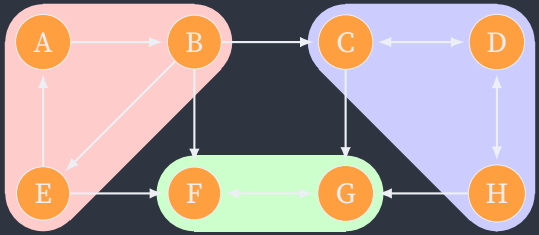
Algorithm: Er grafen 2-sammenhengende?

Input: En sammenhengende graf $G = (V, E)$
Output: Gir **true** hvis grafen er 2-sammenhengende, **false** ellers

```
1 Procedure IsBiconnected(G)
2     return SeparationVertices(G) is empty
```

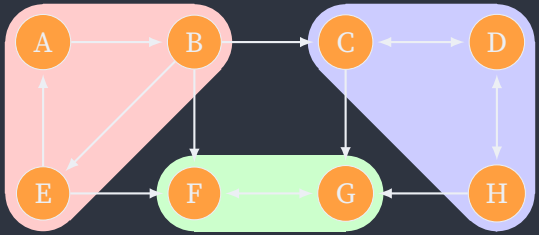
Sterkt sammenhengende komponenter

Sterkt sammenhengende komponenter



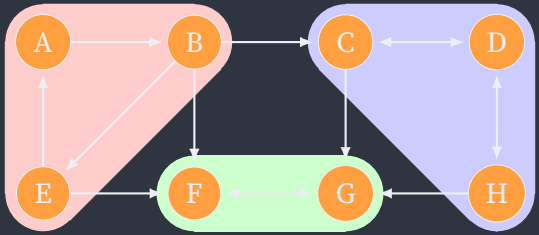
- En *rettet* graf er *sterkt* sammenhengende dersom det finnes en sti mellom alle par av noder

Sterkt sammenhengende komponenter



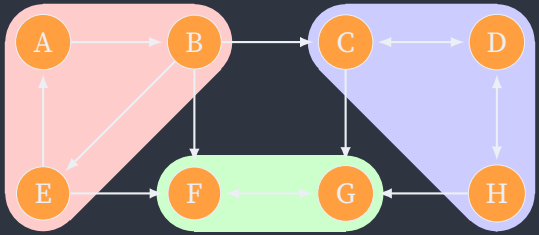
- En *rettet* graf er *sterkt* sammenhengende dersom det finnes en sti mellom alle par av noder
- En sterkt sammenhengende komponent er en delgraf slik at

Sterkt sammenhengende komponenter



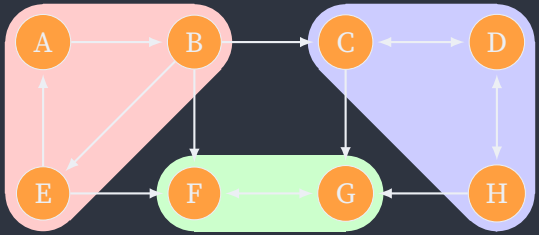
- En *rettet* graf er *sterkt* sammenhengende dersom det finnes en sti mellom alle par av noder
- En sterkt sammenhengende komponent er en delgraf slik at
  - Det finnes en sti mellom alle par av noder i komponenten

Sterkt sammenhengende komponenter



- En *rettet* graf er *sterkt* sammenhengende dersom det finnes en sti mellom alle par av noder
- En sterkt sammenhengende komponent er en delgraf slik at
  - Det finnes en sti mellom alle par av noder i komponenten
  - Komponenten er *maksimal*

Sterkt sammenhengende komponenter



- En *rettet* graf er *sterkt* sammenhengende dersom det finnes en sti mellom alle par av noder
- En sterkt sammenhengende komponent er en delgraf slik at
  - Det finnes en sti mellom alle par av noder i komponenten
  - Komponenten er *maksimal*
- Intuitivt kan vi tenke på en sterkt sammenhengende komponent som en sykel

Den reverserte grafen

- Vi sier at den *reverserte* grafen til G er den grafen hvor alle kanter er snudd

Den reverserte grafen

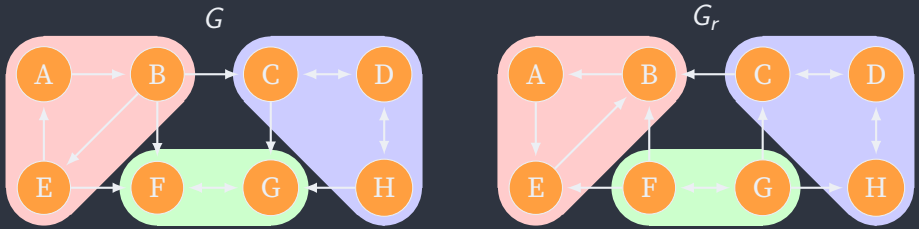
- Vi sier at den *reverserte* grafen til G er den grafen hvor alle kanter er snudd
  - Hvis $G = (V, E)$ sier vi at $G_r = (V, E_r)$ er den reverserte grafen

Den reverserte grafen

- Vi sier at den *reverserte* grafen til G er den grafen hvor alle kanter er snudd
  - Hvis $G = (V, E)$ sier vi at $G_r = (V, E_r)$ er den reverserte grafen
  - Hvis $(u, v) \in E$ så er $(v, u) \in E_r$

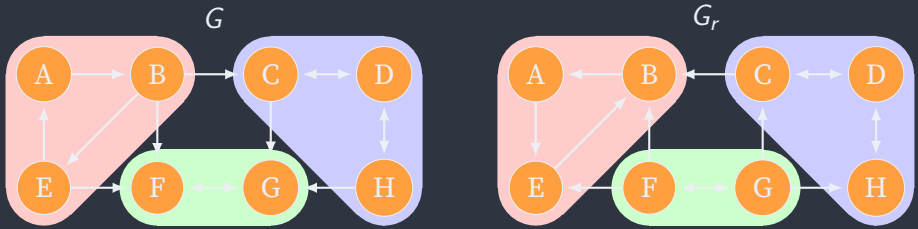
Den reverserte grafen

- Vi sier at den *reverserte* grafen til G er den grafen hvor alle kanter er snudd
  - Hvis $G = (V, E)$ sier vi at $G_r = (V, E_r)$ er den reverserte grafen
  - Hvis $(u, v) \in E$ så er $(v, u) \in E_r$



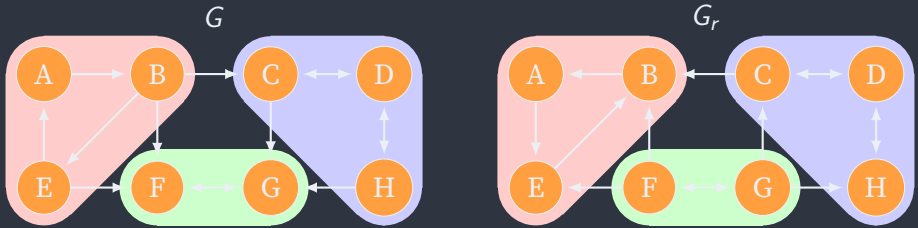
Den reverserte grafen

- Vi sier at den *reverserte* grafen til G er den grafen hvor alle kanter er snudd
  - Hvis $G = (V, E)$ sier vi at $G_r = (V, E_r)$ er den reverserte grafen
  - Hvis $(u, v) \in E$ så er $(v, u) \in E_r$



- Grafen G og dens reverserte graf G_r har alltid de samme sterkt sammenhengende komponentene!

Reverser graf

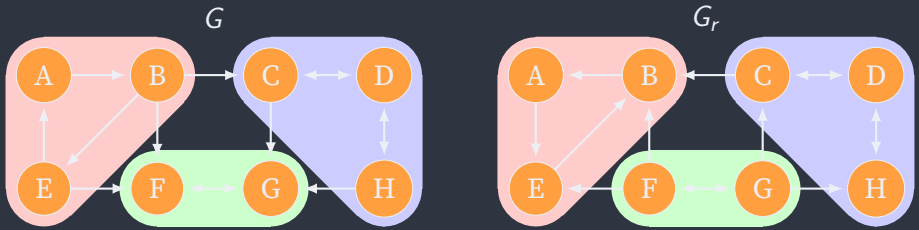


ALGORITHM: REVERSER EN GITT GRAF

Input: En graf $G = (V, E)$
Output: Returner den reverserte grafen $G_r = (V, E_r)$

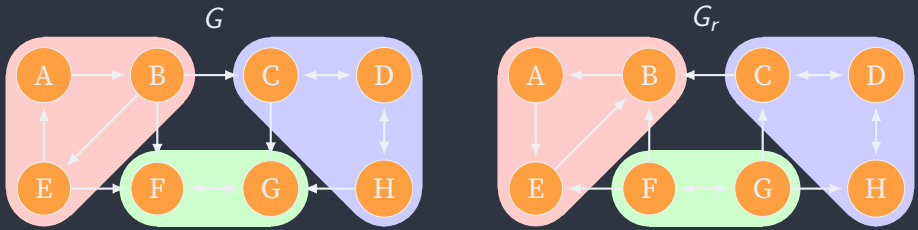
```
1 Procedure ReverseGraph(G)
2     E_r ← empty set
3     for (u, v) ∈ E do
4         add (v, u) to E_r
5     return (V, E_r)
```

Finne sterkt sammenhengende komponenter



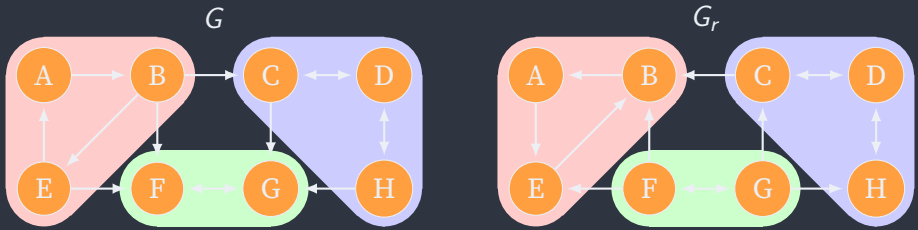
- Vi kan finne den sterkt sammenhengende komponenten til en node v ved å

Finne sterkt sammenhengende komponenter



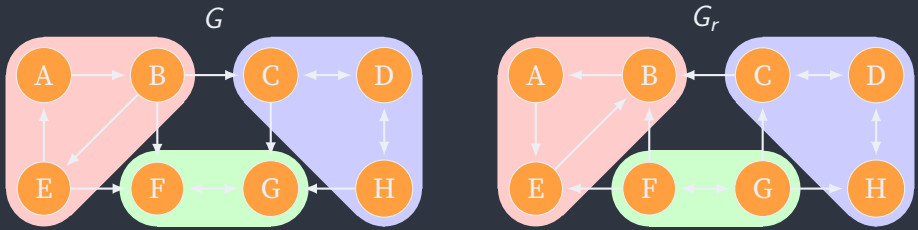
- Vi kan finne den sterkt sammenhengende komponenten til en node v ved å
  - Finne alle noder som kan nås fra v i G

Finne sterkt sammenhengende komponenter



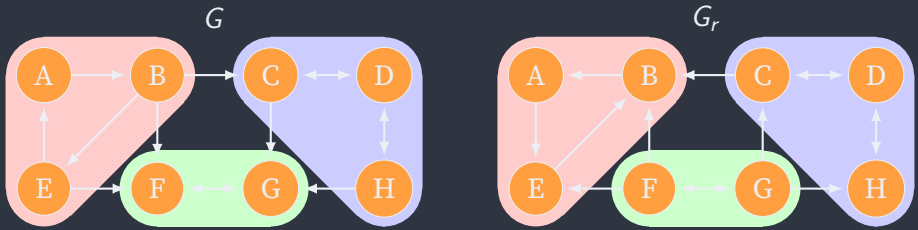
- Vi kan finne den sterkt sammenhengende komponenten til en node v ved å
  - Finne alle noder som kan nås fra v i G
  - Finne alle noder som kan nås fra v i G_r

Finne sterkt sammenhengende komponenter



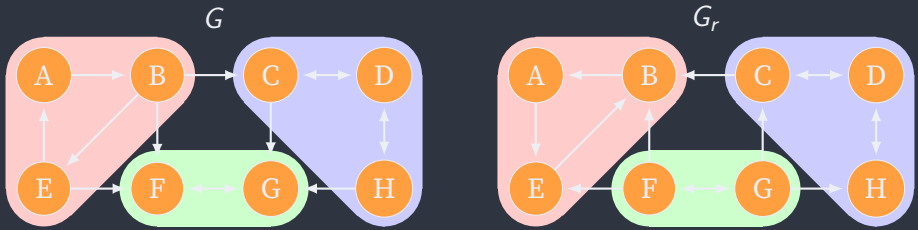
- Vi kan finne den sterkt sammenhengende komponenten til en node v ved å
  - Finne alle noder som kan nås fra v i G
  - Finne alle noder som kan nås fra v i G_r
  - Nodene som kunne nås i både G og G_r utgjør den sterkt sammenhengende komponenten til v

Finne sterkt sammenhengende komponenter



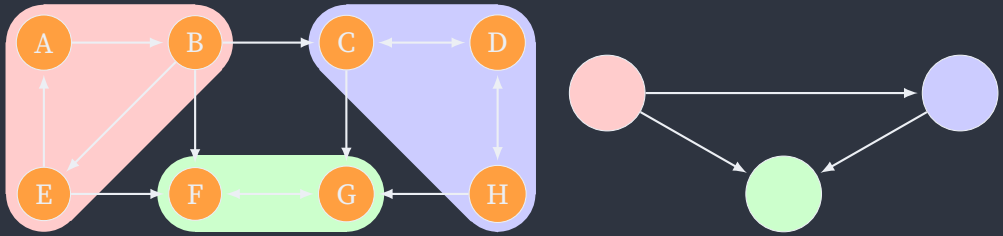
- Vi kan finne den sterkt sammenhengende komponenten til en node v ved å
  - Finne alle noder som kan nås fra v i G
  - Finne alle noder som kan nås fra v i G_r
  - Nodene som kunne nås i både G og G_r utgjør den sterkt sammenhengende komponenten til v
- Dette er en algoritme i $\mathcal{O}(|V| \cdot (|V| + |E|))$

Finne sterkt sammenhengende komponenter



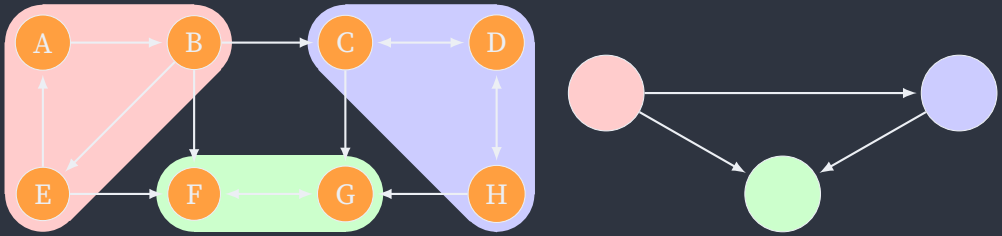
- Vi kan finne den sterkt sammenhengende komponenten til en node v ved å
  - Finne alle noder som kan nås fra v i G
  - Finne alle noder som kan nås fra v i G_r
  - Nodene som kunne nås i både G og G_r utgjør den sterkt sammenhengende komponenten til v
- Dette er en algoritme i $\mathcal{O}(|V| \cdot (|V| + |E|))$
  - Vi er en liten innsikt unna å få dette ned til $\mathcal{O}(|V| + |E|)$

Komponentgrafen



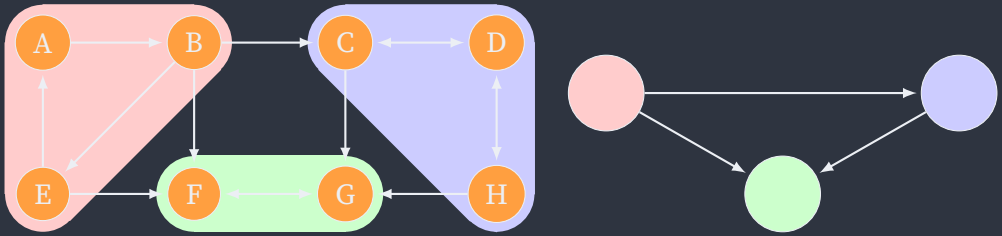
- Ved å anse hver sterkt sammenhengende komponent som en enkelt node, så får vi det vi kaller for *komponentgrafen*

Komponentgrafen



- Ved å anse hver sterkt sammenhengende komponent som en enkelt node, så får vi det vi kaller for *komponentgrafen*
- Komponentgrafen er garantert å ikke inneholde noen sykel (er *asyklisk*)

Komponentgrafen



- Ved å anse hver sterkt sammenhengende komponent som en enkelt node, så får vi det vi kaller for *komponentgrafen*
- Komponentgrafen er garantert å ikke inneholde noen sykel (er *asyklisk*)
- Observer at noder i den topologisk siste komponenten kan ikke nå noen andre komponenter!

Topologisk ordning av den underliggende komponentgrafen

- En graf som inneholder sykler har ingen topologisk ordning

Topologisk ordning av den underliggende komponentgrafen

- En graf som inneholder sykler har ingen topologisk ordning
- Hvis vi bruker `DFSTopSort`, får vi nodene i en rekkefølge som respekterer ordningen av den *underliggende komponentgrafen*

Topologisk ordning av den underliggende komponentgrafen

- En graf som inneholder sykler har ingen topologisk ordning
- Hvis vi bruker `DFSTopSort`, får vi nodene i en rekkefølge som respekterer ordningen av den *underliggende komponentgrafen*
- Den siste noden som blir prossesert i et dybde-først søk er topologisk først

Topologisk ordning av den underliggende komponentgrafen

- En graf som inneholder sykler har ingen topologisk ordning
- Hvis vi bruker `DFSTopSort`, får vi nodene i en rekkefølge som respekterer ordningen av den *underliggende komponentgrafen*
- Den siste noden som blir prossesert i et dybde-først søk er topologisk først
- Den topologisk første noden er den topologisk *siste* noden i den *reverserte* grafen

Topologisk ordning av den underliggende komponentgrafen

- En graf som inneholder sykler har ingen topologisk ordning
- Hvis vi bruker `DFSTopSort`, får vi nodene i en rekkefølge som respekterer ordningen av den *underliggende komponentgrafen*
- Den siste noden som blir prossesert i et dybde-først søk er topologisk først
- Den topologisk første noden er den topologisk *siste* noden i den *reverserte* grafen
- Ved å utforske noder i den motsatt topologisk rekkefølge, så er vi garantert å ikke krysse komponentgrenser

Kosaraju

- Algoritmen kan i korte trekk beskrives slik:

Kosaraju

- Algoritmen kan i korte trekk beskrives slik:
  1. Gjør et (fullt) dybde-først søk i en graf G, der hver node legges på en stack etter alle naboer er besøkt (`DFSTopSort`)

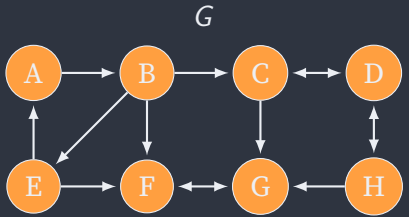
Kosaraju

- Algoritmen kan i korte trekk beskrives slik:
  1. Gjør et (fullt) dybde-først søk i en graf G, der hver node legges på en stack etter alle naboer er besøkt (`DFSTopSort`)
  2. Konstruer den reverserte grafen G_r

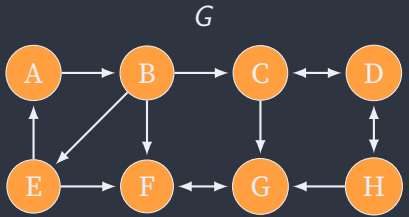
Kosaraju

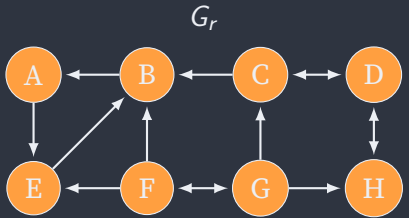
- Algoritmen kan i korte trekk beskrives slik:
  1. Gjør et (fullt) dybde-først søk i en graf G, der hver node legges på en stack etter alle naboer er besøkt (`DFSTopSort`)
  2. Konstruer den reverserte grafen G_r
  3. Gjør et nytt (fullt) dybde-først søk på G_r, der det rekkefølgen i det fulle dybde-først søket er diktert av stacken fra det første søket.

Kosaraju (eksempel)

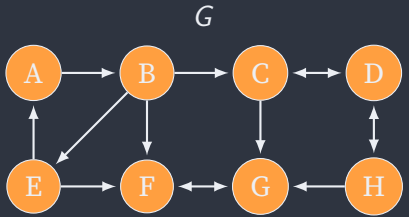


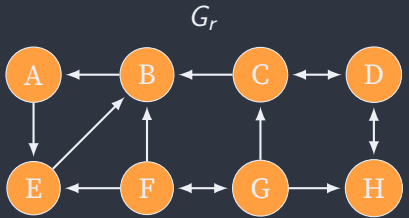
Kosaraju (eksempel)





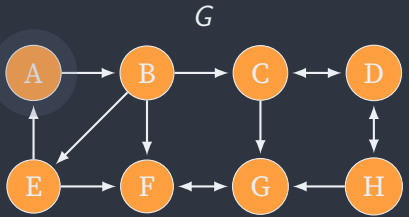
Kosaraju (eksempel)

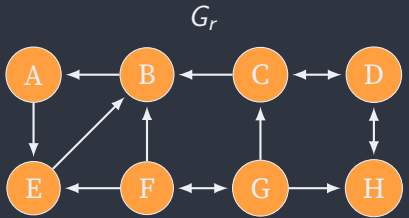




stack

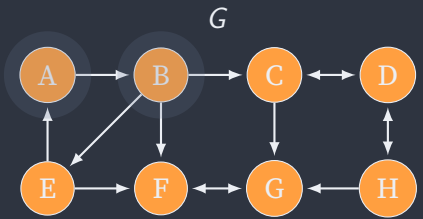
Kosaraju (eksempel)

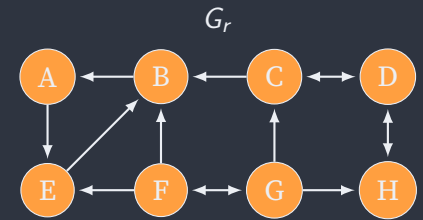




stack

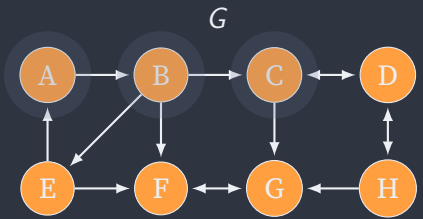
Kosaraju (eksempel)

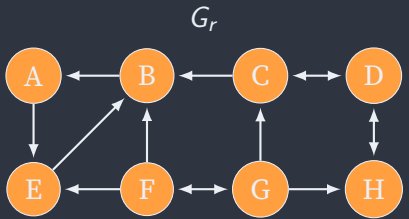




stack

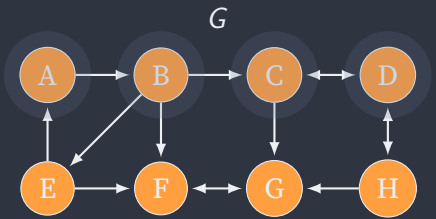
Kosaraju (eksempel)

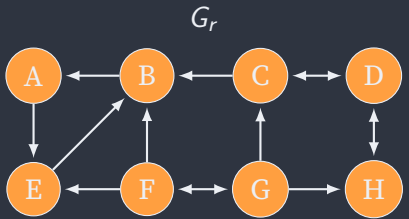




stack

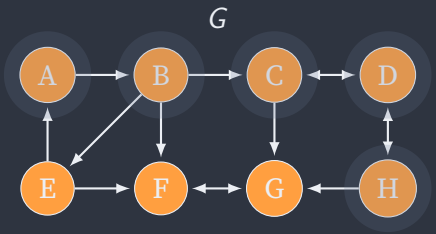
Kosaraju (eksempel)

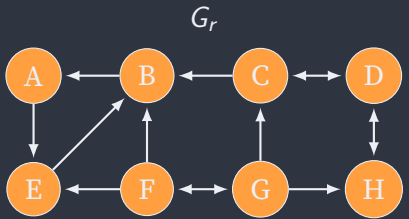




stack

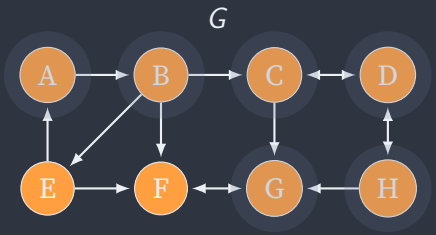
Kosaraju (eksempel)

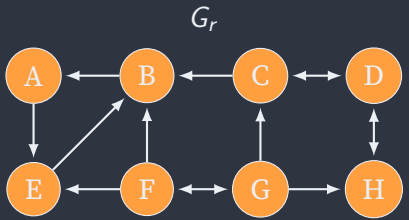




stack

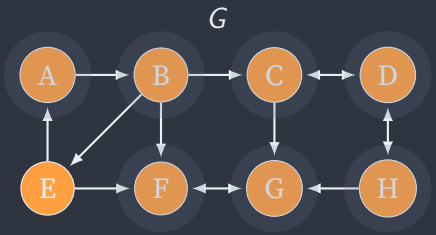
Kosaraju (eksempel)

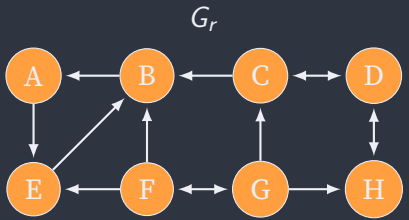




stack

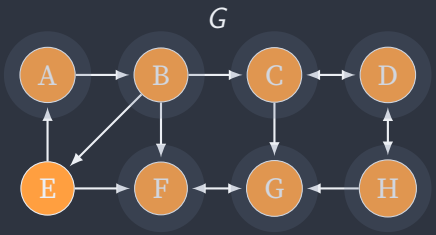
Kosaraju (eksempel)

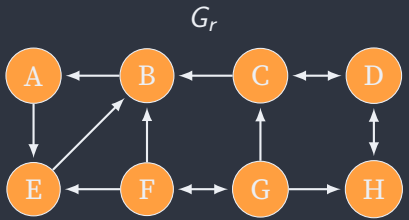




stack

Kosaraju (eksempel)

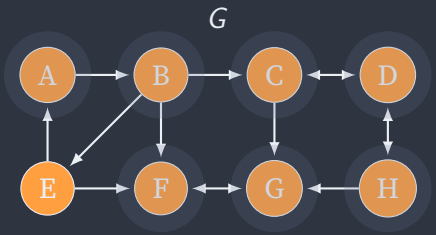


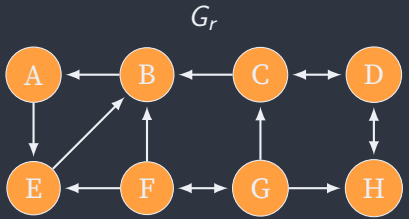


F

stack

Kosaraju (eksempel)



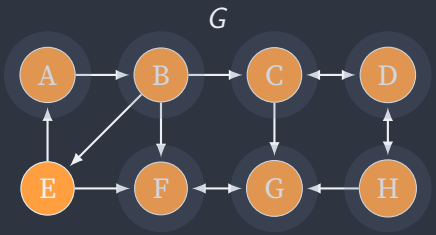


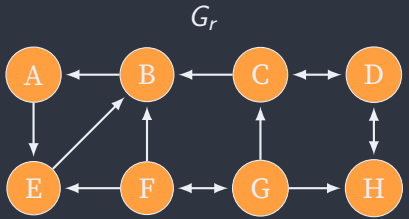
G

F

stack

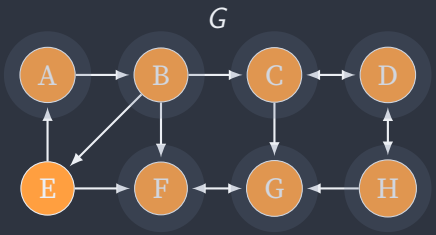
Kosaraju (eksempel)

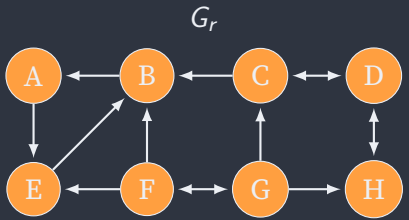




H
G
F
stack

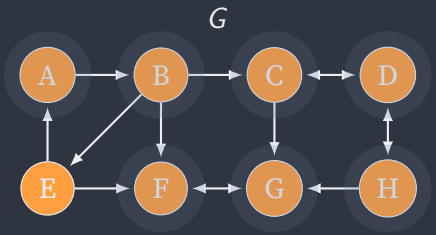
Kosaraju (eksempel)

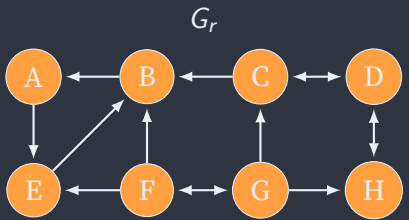




D
H
G
F
stack

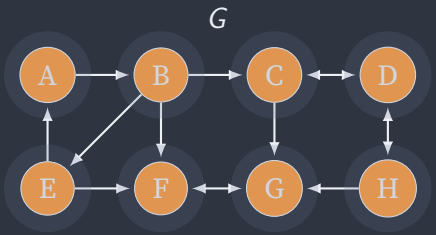
Kosaraju (eksempel)

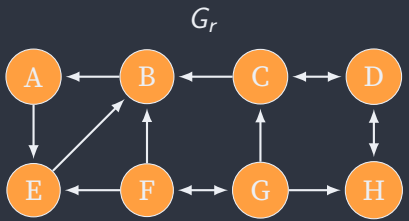




C
D
H
G
F
stack

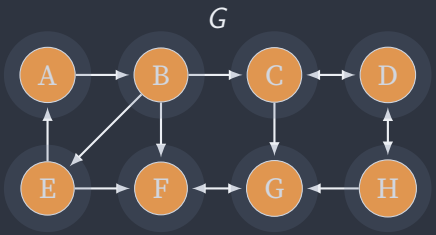
Kosaraju (eksempel)

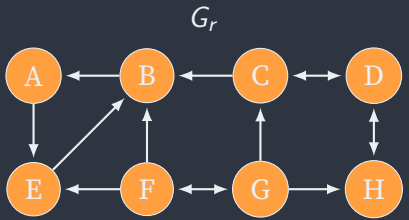




C
D
H
G
F
stack

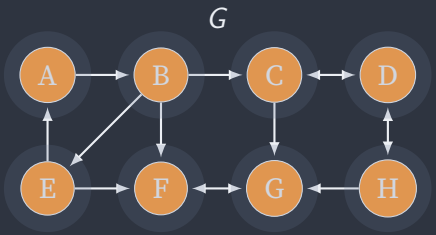
Kosaraju (eksempel)

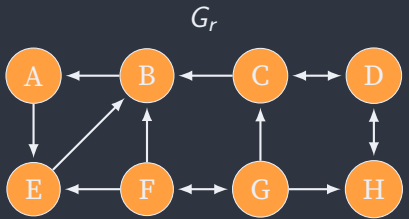




E
C
D
H
G
F
stack

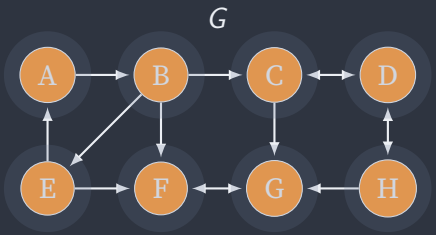
Kosaraju (eksempel)

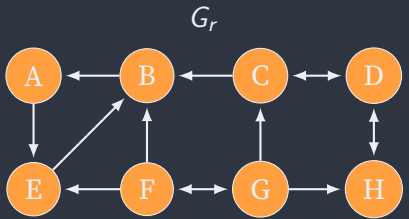




B
E
C
D
H
G
F
stack

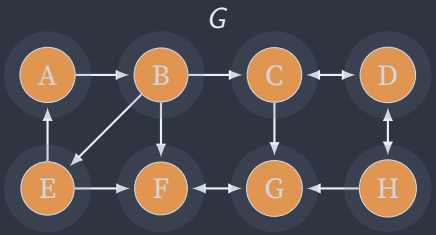
Kosaraju (eksempel)

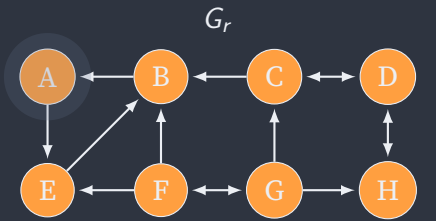




A
B
E
C
D
H
G
F
stack

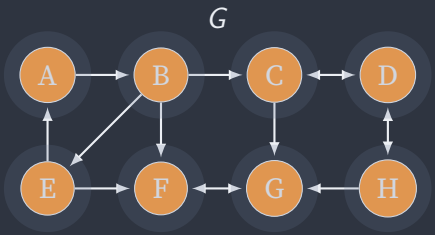
Kosaraju (eksempel)

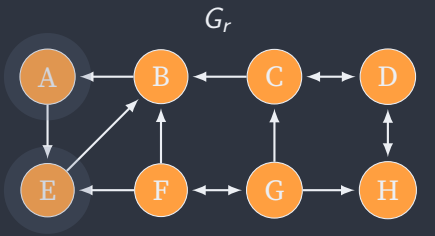




A
B
E
C
D
H
G
F
stack

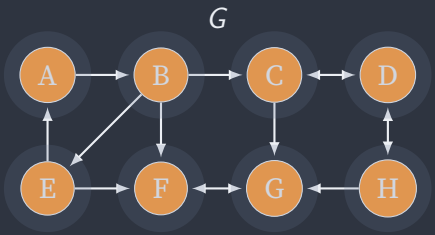
Kosaraju (eksempel)

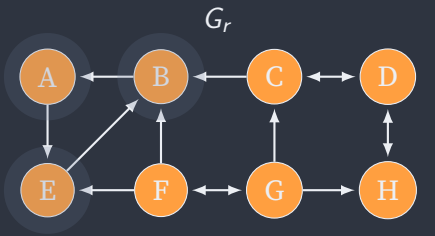




A
B
E
C
D
H
G
F
stack

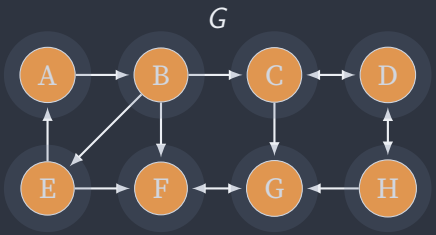
Kosaraju (eksempel)

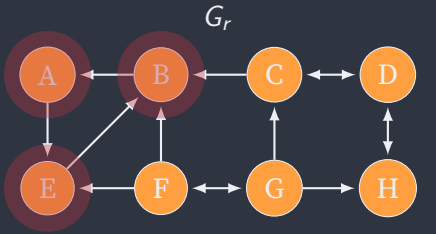




A
B
E
C
D
H
G
F
stack

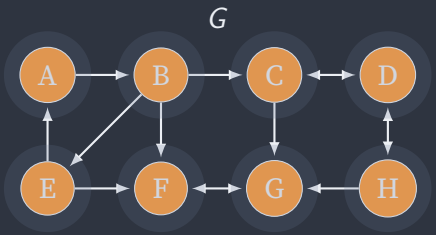
Kosaraju (eksempel)

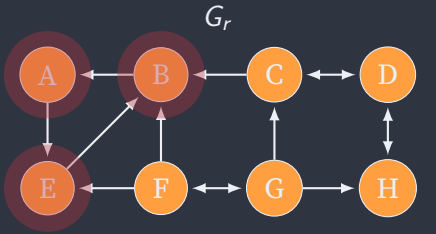




A
B
E
C
D
H
G
F
stack

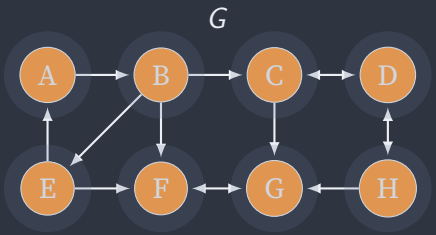
Kosaraju (eksempel)

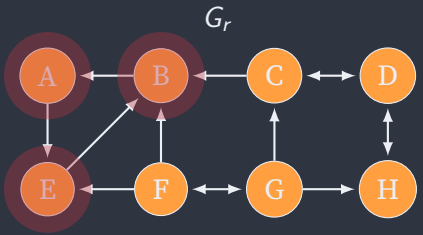




A
B
E
C
D
H
G
F
stack

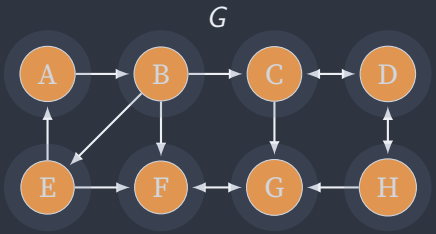
Kosaraju (eksempel)

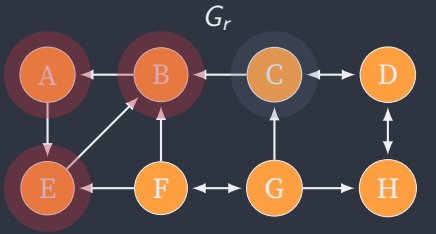




A
B
E
C
D
H
G
F
stack

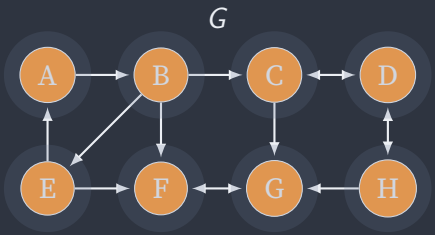
Kosaraju (eksempel)

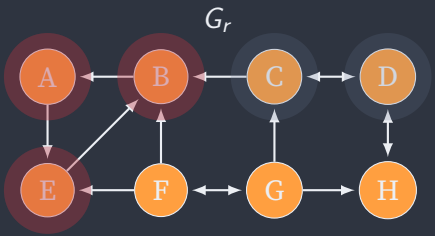




A
B
E
C
D
H
G
F
stack

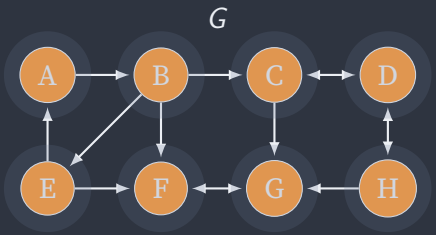
Kosaraju (eksempel)

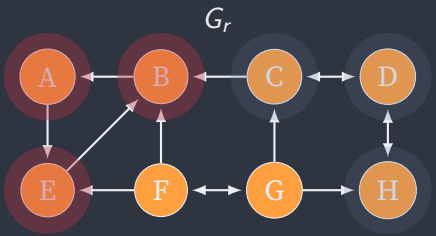




A
B
E
C
D
H
G
F
stack

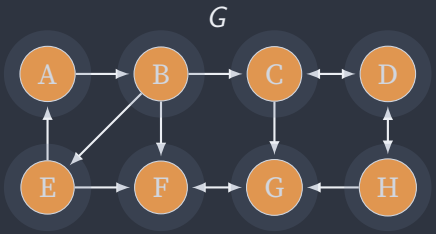
Kosaraju (eksempel)

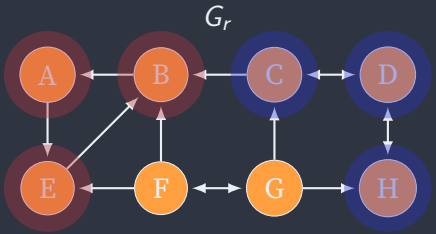




A
B
E
C
D
H
G
F
stack

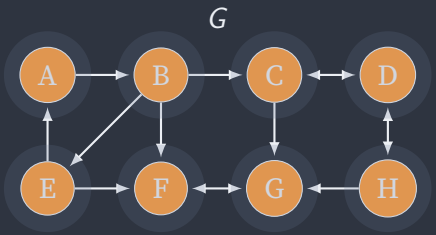
Kosaraju (eksempel)

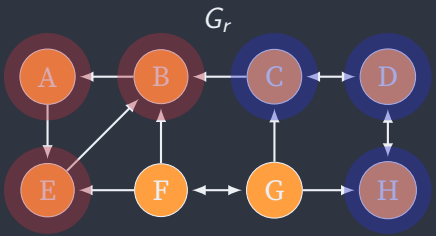




A
B
E
C
D
H
G
F
stack

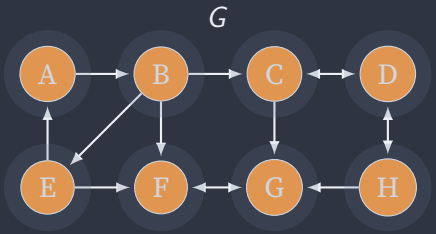
Kosaraju (eksempel)

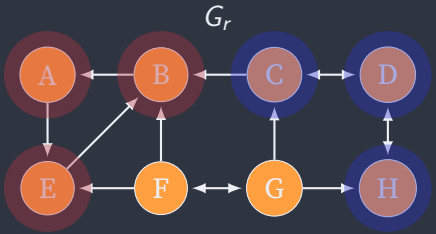




A
B
E
C
D
H
G
F
stack

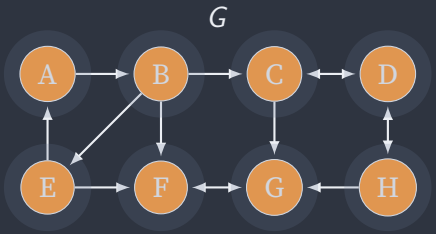
Kosaraju (eksempel)

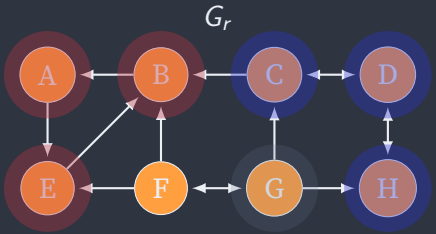




A
B
E
C
D
H
G
F
stack

Kosaraju (eksempel)

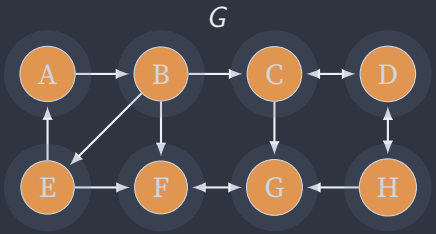


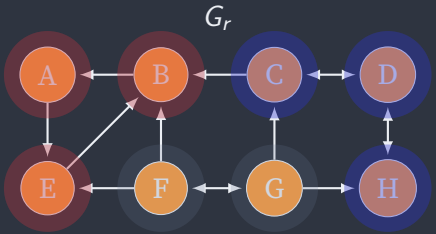


A
B
E
C
D
H
G
F

stack

Kosaraju (eksempel)

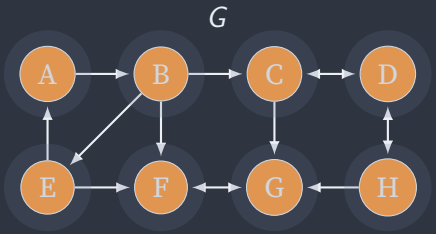


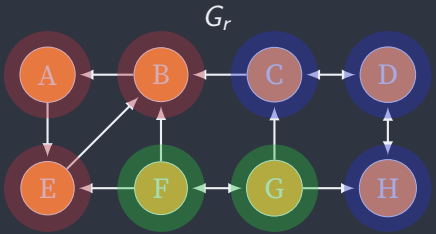


A
B
E
C
D
H
G
F

stack

Kosaraju (eksempel)

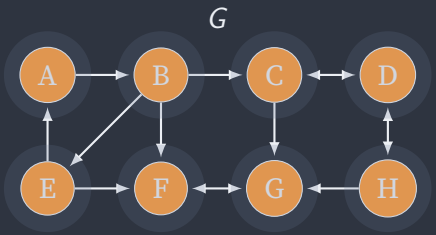


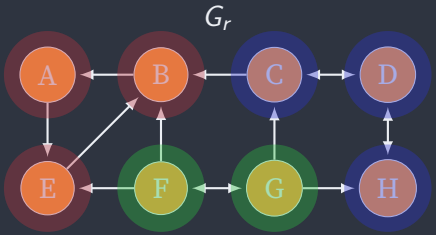


A
B
E
C
D
H
G
F

stack

Kosaraju (eksempel)





A
B
E
C
D
H
G
F

stack

Sterkt sammenhengende komponenter

Algorithm: Finn de sterkt sammenhengende komponenetene av en graf

Input: En rettet graf $G = (V, E)$

Output: Returner de sterkt sammenhengende komponenetene til G

```
1 Procedure StronglyConnectedComponents(G)
2     stack ← DFSTopSort(G)
3     G_r ← ReverseGraph(G)
```

Sterkt sammenhengende komponenter

Algorithm: Finn de sterkt sammenhengende komponenetene av en graf

Input: En rettet graf $G = (V, E)$

Output: Returner de sterkt sammenhengende komponenetene til G

```
1 Procedure StronglyConnectedComponents(G)
2     stack ← DFSTopSort(G)
3     G_r ← ReverseGraph(G)
4     visited ← empty set
5     components ← empty set
```

Sterkt sammenhengende komponenter

Algorithm: Finn de sterkt sammenhengende komponenetene av en graf

Input: En rettet graf $G = (V, E)$

Output: Returner de sterkt sammenhengende komponenetene til G

```
1  Procedure StronglyConnectedComponents(G)
2      stack ← DFSTopSort(G)
3      G_r ← ReverseGraph(G)
4      visited ← empty set
5      components ← empty set
6      while stack is not empty do
7          u ← stack.pop()
8          if u ∉ visited then
9              component ← empty set
10             DFSVisit(G_r, u, visited, component)
11             add component to components
```

Sterkt sammenhengende komponenter

Algorithm: Finn de sterkt sammenhengende komponenetene av en graf

Input: En rettet graf $G = (V, E)$

Output: Returner de sterkt sammenhengende komponenetene til G

```
1  Procedure StronglyConnectedComponents(G)
2      stack ← DFSTopSort(G)
3      G_r ← ReverseGraph(G)
4      visited ← empty set
5      components ← empty set
6      while stack is not empty do
7          u ← stack.pop()
8          if u ∉ visited then
9              component ← empty set
10             DFSVisit(G_r, u, visited, component)
11             add component to components
12     return components
```