IN2010 / Repetisjonstime

Sammenhengende grafer

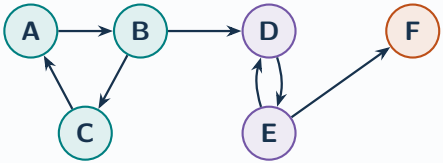
Sterkt sammenhengende komponenter
og 2-sammenhengende grafer

Sander Oppen

13. oktober 2026

Sterkt sammenhengende komponenter

Sterkt sammenhengende komponenter



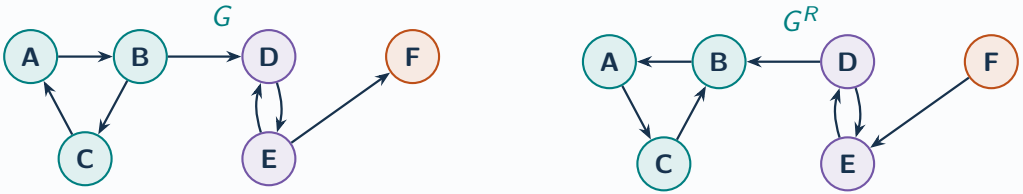
Noder kan nå hverandre:

$$u \rightsquigarrow v \quad \text{og} \quad v \rightsquigarrow u.$$

En SCC er en **maksimal** gruppe med denne egenskapen.

Er A og D i samme sterkt sammenhengende komponent?
Hva med F?

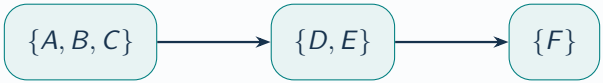
Sterkt sammenhengende komponenter



$$\text{SCC}(v) = \text{Reach}_G(v) \cap \text{Reach}_{G^R}(v)$$

Hvilke noder kan D nå i begge grafene?

Sterkt sammenhengende komponenter



Komponentgrafen har én node per SCC.

Kan komponentgrafen inneholde en sykel?

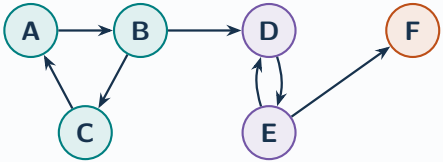
Kosaraju

1. Full DFS i G: push til stack når kallet er **ferdig** (samme som DFS-Topologisk sortering).
2. Snu kantene og nullstill besøkt-mengden.
3. Pop fra stacken. DFS i G^R fra hver ubesøkte node.

Hvert nytt søk i steg 3 finner én SCC.

Tid med nabolister: $\mathcal{O}(|V| + |E|)$

Kosaraju

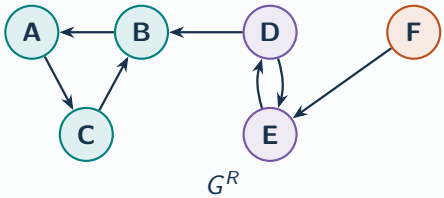


Start i A. Velg naboer alfabetisk.

Første besøk
A, B, C, D, E, F

Stack etter søket
$[C, F, E, D, B, A]$

Kosaraju



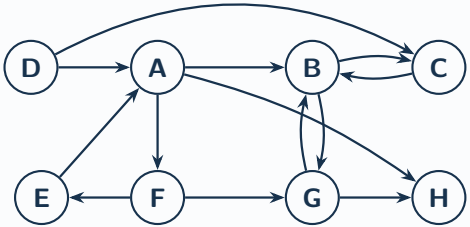
G^R

Pop: A, B, D, E, F, C

Ny DFS-start	SCC
A	$\{A, B, C\}$
D	$\{D, E\}$
F	$\{F\}$

Hvorfor fortsetter ikke søket fra D inn i B?

Sterkt sammenhengende komponenter



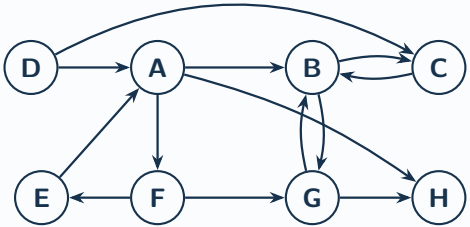
Eksamen 2014, oppgave 3a

1. Finn SCC-ene med Kosaraju.

2. Tegn komponentgrafen. Kan den sorteres topologisk?

Velg startnoder og naboer alfabetisk.

Sterkt sammenhengende komponenter



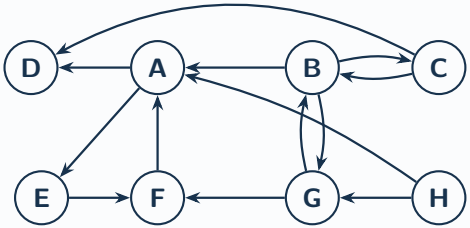
Første DFS

Rekkefølge på besøk
A, B, C, G, H, F, E, D

Stack
C, H, G, B, E, F, A, D

Hvorfor må vi starte et nytt DFS i D?

Sterkt sammenhengende komponenter

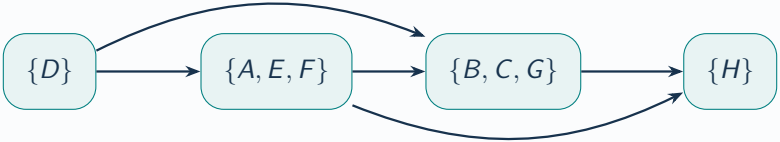


G^R

Andre DFS

Ny DFS-start	SCC
D	$\{D\}$
A	$\{A, E, F\}$
B	$\{B, C, G\}$
H	$\{H\}$

Sterkt sammenhengende komponenter



En topologisk ordning

$$\{D\}, \quad \{A, E, F\}, \quad \{B, C, G\}, \quad \{H\}$$

Spørsmål

1. Kan en DAG ha en SCC med flere enn én node?

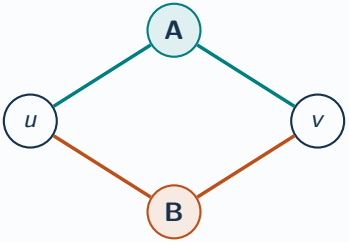
2. Når legger vi en node på stacken i første DFS?

3. Fungerer Kosaraju's algoritme på ikke-sammenhengende grafer?

2-sammenhengende grafer

2-sammenhengende grafer

Grafen forblir sammenhengende når en vilkårlig node fjernes.



Mellom hvert par finnes to stier som bare har start- og sluttnodene til felles.

Hva skjer hvis a forsvinner?

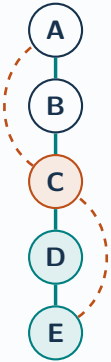
Separasjonsnoder



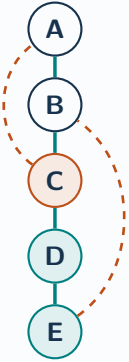
En **separasjonsnode** splitter grafen i flere komponenter hvis den fjernes.

Separasjonsnoder

Seperasjonsnode



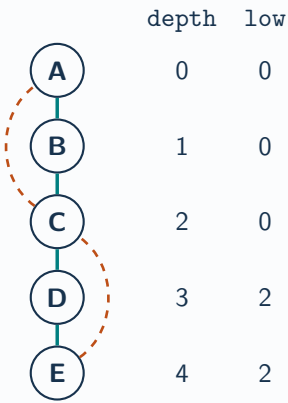
2-sammenhengende



Vi kjører et fult DFS-søk på grafen, og får et spenntre.
DFS utforsker ett subtre helt ferdig før neste.
I en urettet graf finnes derfor **ingen kanter mellom ulike DFS-subtrær**.

For hvert subtre: **Vi må vite hvor høyt subtreet kan nå ved å bruke de resterende kantene i grafen.**
Hvis et subtre ikke kan komme seg opp forbi roten sin er roten en seperasjonsnode.

Separasjonsnoder



depth: Dybden i DFS-treet.

low: Minste dybde vi når via treet nedover og maks én kant oppover.

Hvorfor får D low-verdien 2?

Separasjonsnoder

For hver node u som ikke er rotnoden, hvis

$$\boxed{\text{low}[v] \geq \text{depth}[u] \quad \text{for ett DFS-barn } v}$$

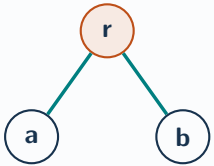
så er u en **separasjonsnode**.

Hvorfor er likhet nok?

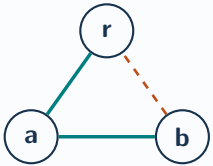
I eksemplet: $\text{low}[D] = 2 = \text{depth}[C]$.

Separasjonsnoder - Rotnode

For rotnoden til DFS-spenntreet har vi to tilfeller:



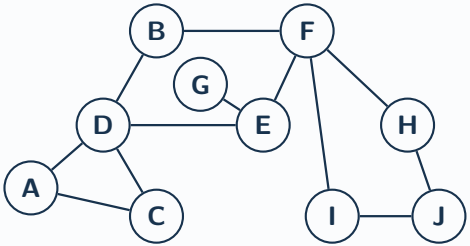
To eller flere DFS-barn
Roten er en separasjonsnode.



Ett DFS-barn
Roten er ikke en separasjonsnode.

Begge røttene har to naboer. Hvorfor er svaret forskjellig?

Separasjonsnoder



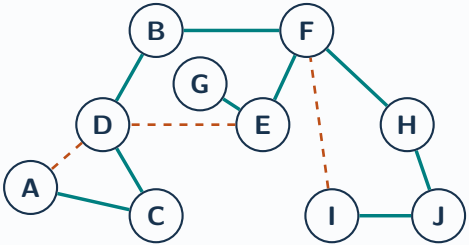
Eksamen 2013, oppgave 3a

Finn separasjonsnodene med DFS fra A.

Tegn treet og beregn `depth`/`low`.

Velg naboer alfabetisk.

Separasjonsnoder



Heltrukket: kanter i DFS-treet
Stiplet: tilbakekanter

Node	depth	low
A	0	0
C	1	0
D	2	0
B	3	2
F	4	2
E	5	2
G	6	5
H	5	4
J	6	4
I	7	4

Separasjonsnoder

Node	DFS-barn	Test
D	B	$\text{low}[B] = 2 \geq \text{depth}[D] = 2$
E	G	$\text{low}[G] = 5 \geq \text{depth}[E] = 5$
F	H	$\text{low}[H] = 4 \geq \text{depth}[F] = 4$

$$\boxed{\{D, E, F\}}$$

Hvorfor er ikke A en separasjonsnode?

Spørsmål

1. En ikke-rot har dybde 3. Barna har `low`-verdier 1 og 3. Er noden en separasjonsnode?

2. Roten har fire naboer, men ett DFS-barn. Er den en separasjonsnode?

Spørsmål?