Sekvensielle datastrukturer

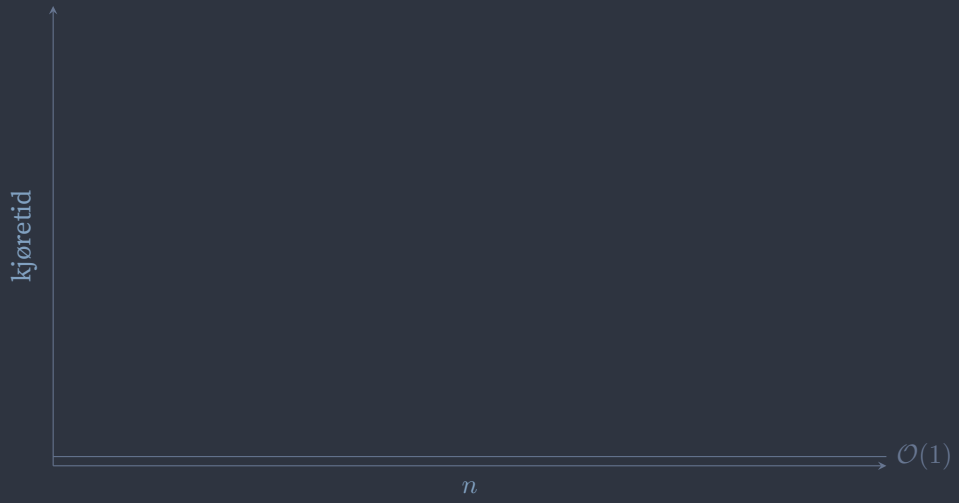
IN2010 – Algoritmer og datastrukturer

Lars Tveito

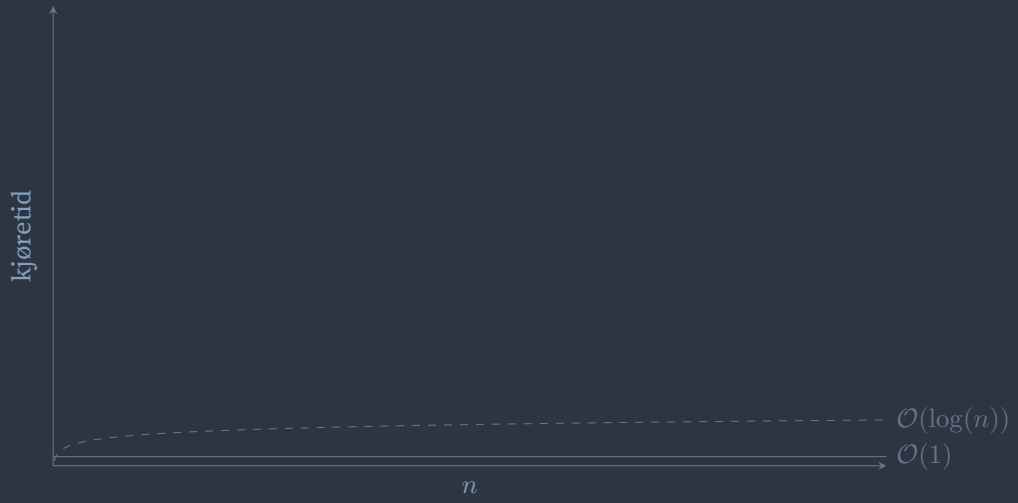
Institutt for informatikk, Universitetet i Oslo
larstvei@ifi.uio.no

Kjøretidskompleksitet

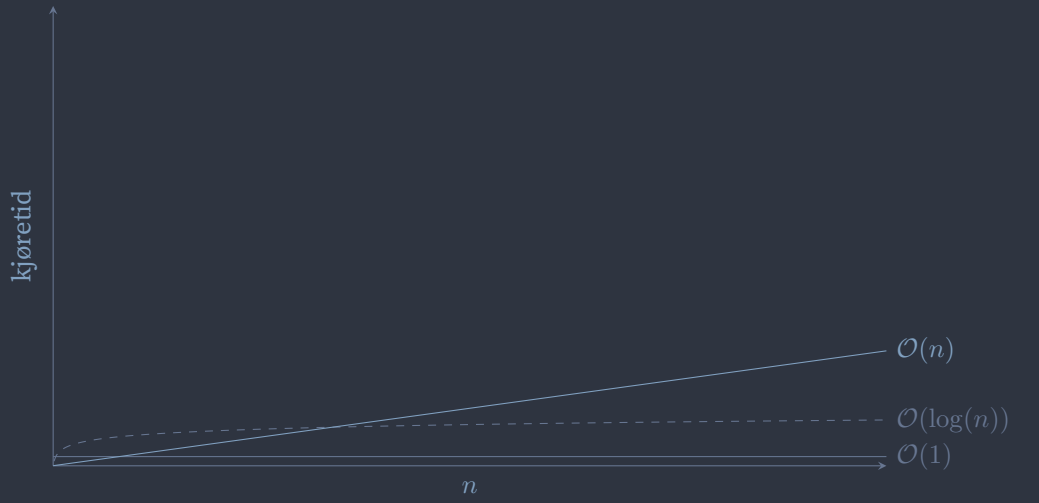
Vanlige uttrykk for kjøretidskompleksitet (graf)



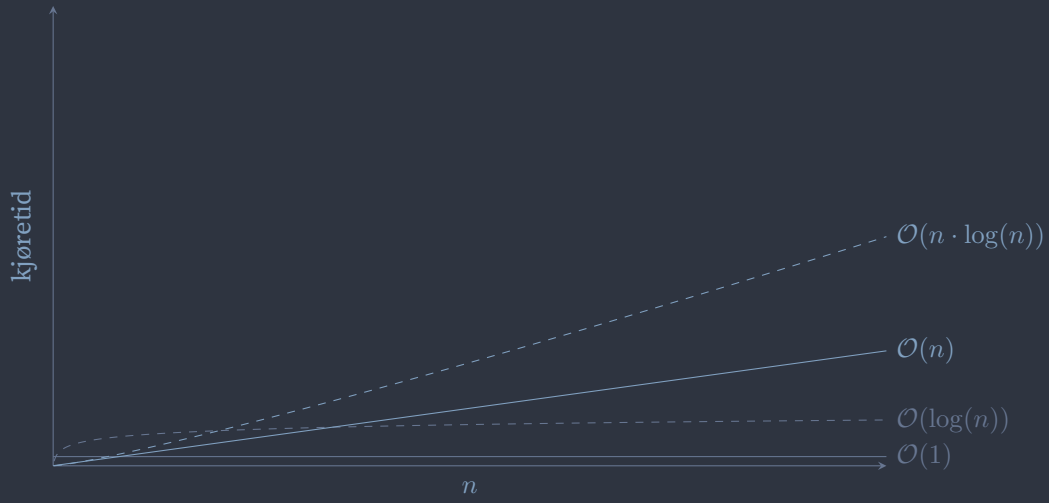
Vanlige uttrykk for kjøretidskompleksitet (graf)



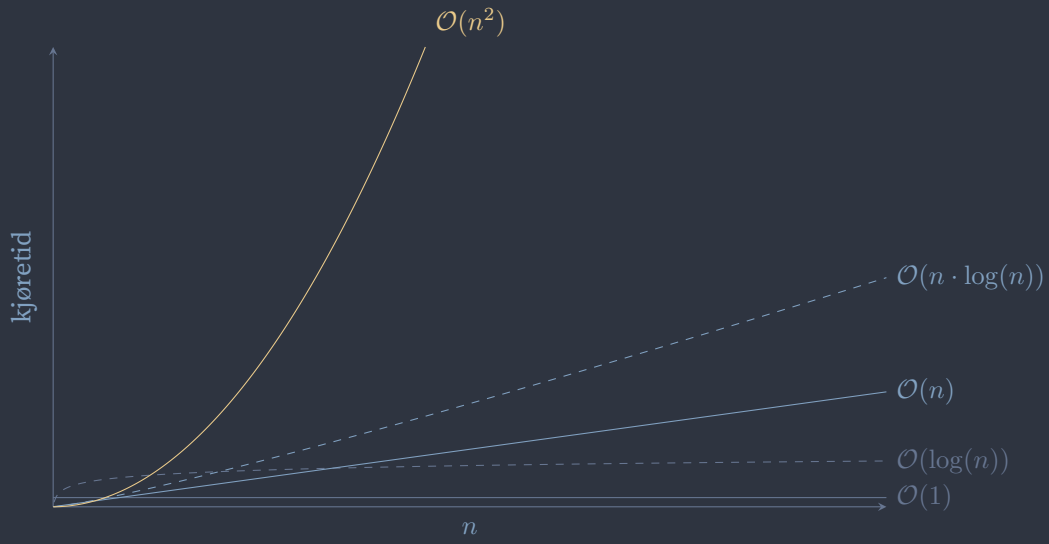
Vanlige uttrykk for kjøretidskompleksitet (graf)



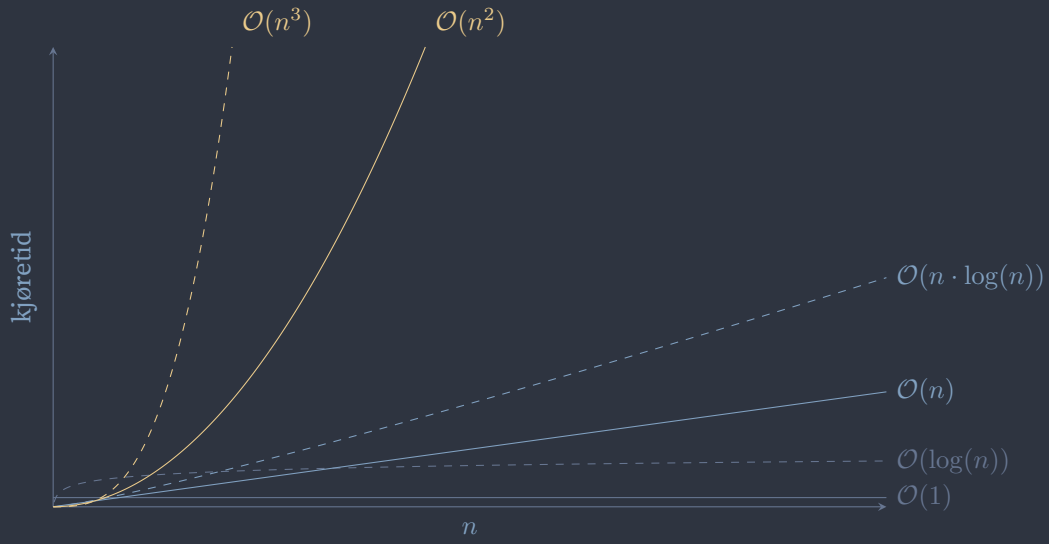
Vanlige uttrykk for kjøretidskompleksitet (graf)



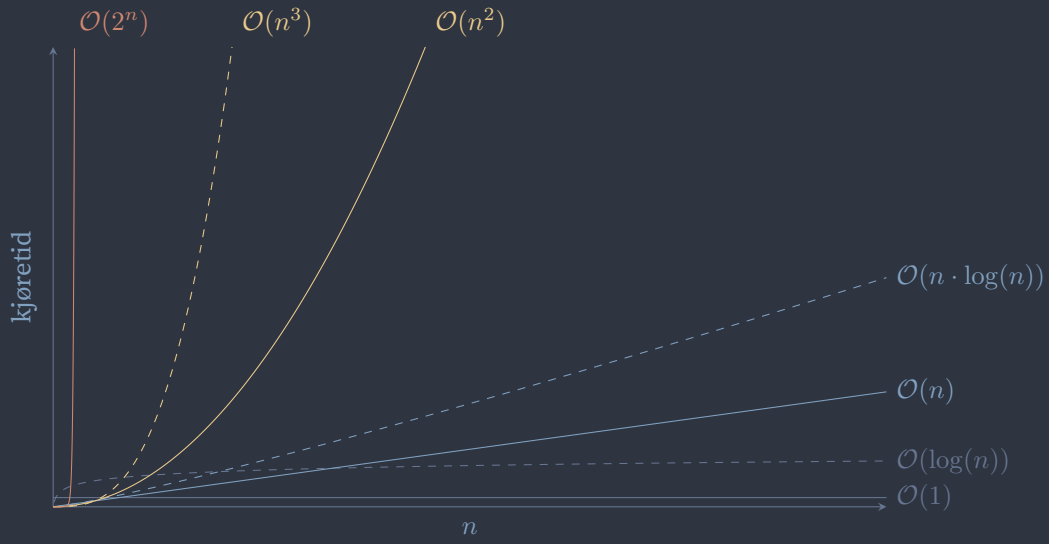
Vanlige uttrykk for kjøretidskompleksitet (graf)



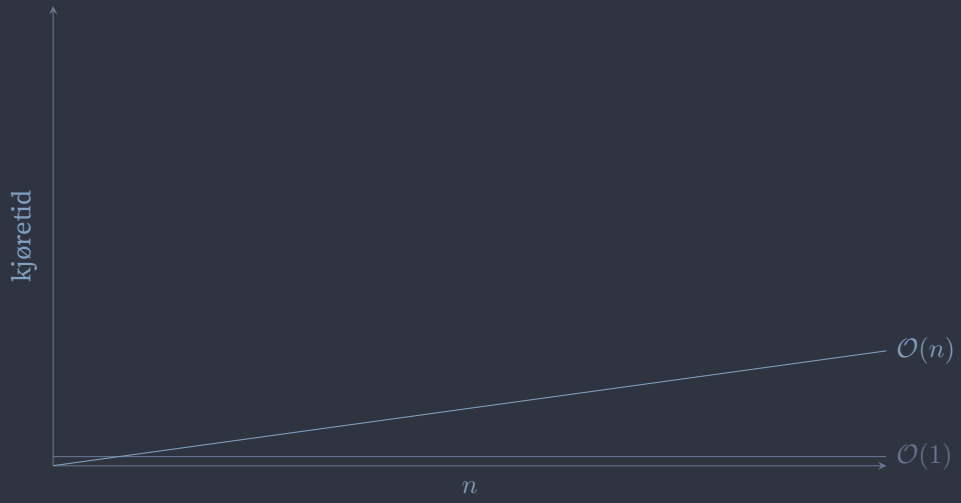
Vanlige uttrykk for kjøretidskompleksitet (graf)



Vanlige uttrykk for kjøretidskompleksitet (graf)



Vanlige uttrykk for kjøretidskompleksitet (graf)



Lister

Lister

- En liste er en *samling* av elementer av *endelig* størrelse i en *bestemt ordning*

Lister

- En liste er en *samling* av elementer av *endelig* størrelse i en *bestemt ordning*
- Vi kan referere til elementene ved hjelp av en *indeks*

Lister

- En liste er en *samling* av elementer av *endelig* størrelse i en *bestemt ordning*
- Vi kan referere til elementene ved hjelp av en *indeks*
  - Vi definerer indeksen til et element e i en liste L som antall elementer som forekommer før e i L

Lister

- En liste er en *samling* av elementer av *endelig* størrelse i en *bestemt ordning*
- Vi kan referere til elementene ved hjelp av en *indeks*
  - Vi definerer indeksen til et element e i en liste L som antall elementer som forekommer før e i L
  - Indeksen er et tall mellom 0 og $n - 1$ der n er antall elementer i L

Lister

- En liste er en *samling* av elementer av *endelig* størrelse i en *bestemt ordning*
- Vi kan referere til elementene ved hjelp av en *indeks*
  - Vi definerer indeksen til et element e i en liste L som antall elementer som forekommer før e i L
  - Indeksen er et tall mellom 0 og $n - 1$ der n er antall elementer i L
- I en liste forventer vi å kunne:

Listeoperasjon	Beskrivelse
`Get`(L, i)	Hente ut elementet i L med indeks i

Lister

- En liste er en *samling* av elementer av *endelig* størrelse i en *bestemt ordning*
- Vi kan referere til elementene ved hjelp av en *indeks*
  - Vi definerer indeksen til et element e i en liste L som antall elementer som forekommer før e i L
  - Indeksen er et tall mellom 0 og $n - 1$ der n er antall elementer i L
- I en liste forventer vi å kunne:

Listeoperasjon	Beskrivelse
`Get`(L, i)	Hente ut elementet i L med indeks i

Lister

- En liste er en *samling* av elementer av *endelig* størrelse i en *bestemt ordning*
- Vi kan referere til elementene ved hjelp av en *indeks*
  - Vi definerer indeksen til et element e i en liste L som antall elementer som forekommer før e i L
  - Indeksen er et tall mellom 0 og $n - 1$ der n er antall elementer i L
- I en liste forventer vi å kunne:

Listeoperasjon	Beskrivelse
`Get`(L, i)	Hente ut elementet i L med indeks i
`Set`(L, i, e)	Erstatt elementet på indeks i med elementet e

Lister

- En liste er en *samling* av elementer av *endelig* størrelse i en *bestemt ordning*
- Vi kan referere til elementene ved hjelp av en *indeks*
  - Vi definerer indeksen til et element e i en liste L som antall elementer som forekommer før e i L
  - Indeksen er et tall mellom 0 og $n-1$ der n er antall elementer i L
- I en liste forventer vi å kunne:

Listeoperasjon	Beskrivelse
`Get`(L, i)	Hente ut elementet i L med indeks i
`Set`(L, i, e)	Erstatt elementet på indeks i med elementet e
`Add`(L, i, e)	Legg til elementet e i L slik at det får indeks i

Lister

- En liste er en *samling* av elementer av *endelig* størrelse i en *bestemt ordning*
- Vi kan referere til elementene ved hjelp av en *indeks*
  - Vi definerer indeksen til et element e i en liste L som antall elementer som forekommer før e i L
  - Indeksen er et tall mellom 0 og $n - 1$ der n er antall elementer i L
- I en liste forventer vi å kunne:

Listeoperasjon	Beskrivelse
`Get`(L, i)	Hente ut elementet i L med indeks i
`Set`(L, i, e)	Erstatt elementet på indeks i med elementet e
`Add`(L, i, e)	Legg til elementet e i L slik at det får indeks i
`Remove`(L, i)	Fjern elementet med indeks i fra L

Lenkede lister

Noder

- En tilnærming til lister er å koble sammen *noder* i en *lenkestruktur*

Noder

- En tilnærming til lister er å koble sammen *noder* i en *lenkestruktur*
- En node v holder på et element v.`elem`, og har en peker v.`next` til *neste* node

Noder

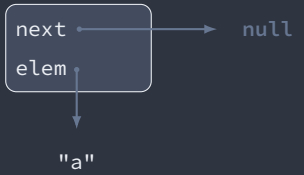
- En tilnærming til lister er å koble sammen *noder* i en *lenkestruktur*
- En node v holder på et element v.`elem`, og har en peker v.`next` til *neste* node
- Posisjonen til en node er *relativ* til nodene som kommer før og etter

Noder

- En tilnærming til lister er å koble sammen *noder* i en *lenkestruktur*
- En node v holder på et element v.`elem`, og har en peker v.`next` til *neste* node
- Posisjonen til en node er *relativ* til nodene som kommer før og etter

Noder

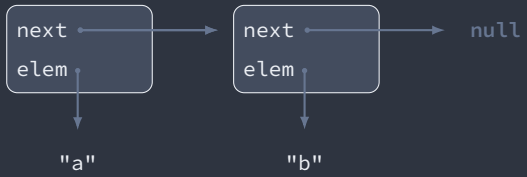
- En tilnærming til lister er å koble sammen *noder* i en *lenkestruktur*
- En node v holder på et element v.`elem`, og har en peker v.`next` til *neste* node
- Posisjonen til en node er *relativ* til nodene som kommer før og etter




```
1  a ← new Node("a")
```

Noder

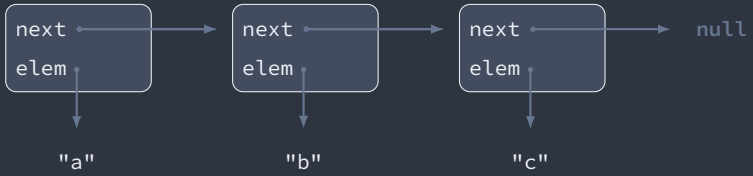
- En tilnærming til lister er å koble sammen *noder* i en *lenkestruktur*
- En node v holder på et element $v.\texttt{elem}$, og har en peker $v.\texttt{next}$ til *neste* node
- Posisjonen til en node er *relativ* til nodene som kommer før og etter




```
1 a ← new Node("a")
2 a.next ← new Node("b")
```

Noder

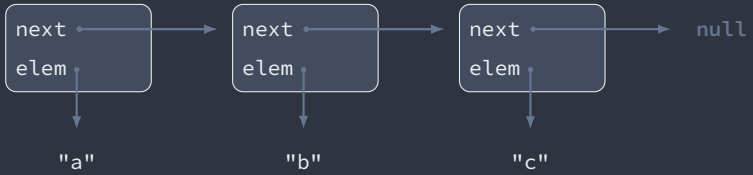
- En tilnærming til lister er å koble sammen *noder* i en *lenkestruktur*
- En node v holder på et element $v.\texttt{elem}$, og har en peker $v.\texttt{next}$ til *neste* node
- Posisjonen til en node er *relativ* til nodene som kommer før og etter




```
1 a ← new Node("a")
2 a.next ← new Node("b")
3 a.next.next ← new Node("c")
```

Noder

- En tilnærming til lister er å koble sammen *noder* i en *lenkestruktur*
- En node v holder på et element $v.\texttt{elem}$, og har en peker $v.\texttt{next}$ til *neste* node
- Posisjonen til en node er *relativ* til nodene som kommer før og etter




```
1 a ← new Node("a")
2 a.next ← new Node("b")
3 a.next.next ← new Node("c")
4 ···
```

Enkeltlenket liste

- Ved å knytte noder sammen med *neste*-pekere får vi en *enkeltlenket liste*

Enkeltlenket liste

- Ved å knytte noder sammen med *neste*-pekere får vi en *enkeltlenket liste*
- Vi kan lage en liste L som et objekt med peker til den første noden L.`first`

Enkeltlenket liste

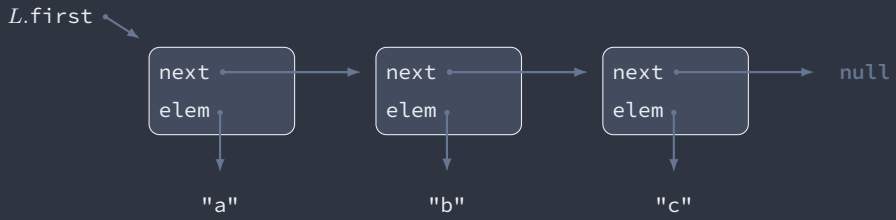
- Ved å knytte noder sammen med *neste*-pekere får vi en *enkeltlenket liste*
- Vi kan lage en liste L som et objekt med peker til den første noden L.`first`
- `null` representerer den tomme listen

Enkeltlenket liste

- Ved å knytte noder sammen med *neste*-pekere får vi en *enkeltlenket liste*
- Vi kan lage en liste L som et objekt med peker til den første noden L.`first`
- `null` representerer den tomme listen

Enkeltlenket liste

- Ved å knytte noder sammen med *neste*-pekere får vi en *enkeltlenket liste*
- Vi kan lage en liste L som et objekt med peker til den første noden L.`first`
- **`null`** representerer den tomme listen



Finne en node

- Ofte må vi løpe gjennom en liste ved å følge nestepekere

Finne en node

- Ofte må vi løpe gjennom en liste ved å følge nestepekere
- Anta at vi vil finne noden med en gitt indeks i

Finne en node

- Ofte må vi løpe gjennom en liste ved å følge nestepekere
- Anta at vi vil finne noden med en gitt indeks i
  - Det gjøres ved å opprette en nodepeker `it` som initialiseres til å peke på det L.`first` peker på

Finne en node

- Ofte må vi løpe gjennom en liste ved å følge nestepekere
- Anta at vi vil finne noden med en gitt indeks i
  - Det gjøres ved å opprette en nodepeker `it` som initialiseres til å peke på det L.`first` peker på
  - Deretter følger vi i nestepekere

Finne en node

- Ofte må vi løpe gjennom en liste ved å følge nestepekere
- Anta at vi vil finne noden med en gitt indeks i
  - Det gjøres ved å opprette en nodepeker `it` som initialiseres til å peke på det L.`first` peker på
  - Deretter følger vi i nestepekere

Finne en node

- Ofte må vi løpe gjennom en liste ved å følge nestepekere
- Anta at vi vil finne noden med en gitt indeks i
  - Det gjøres ved å opprette en nodepeker `it` som initialiseres til å peke på det L.`first` peker på
  - Deretter følger vi i nestepekere

ALGORITHM: FINN NODEN PÅ EN GITT INDEKS

Input: En lenket liste L og en indeks i
Output: Noden med indeks i i L

```
1 Procedure NodeAt(L, i)
```

Finne en node

- Ofte må vi løpe gjennom en liste ved å følge nestepekere
- Anta at vi vil finne noden med en gitt indeks i
  - Det gjøres ved å opprette en nodepeker `it` som initialiseres til å peke på det L.`first` peker på
  - Deretter følger vi i nestepekere

ALGORITHM: FINN NODEN PÅ EN GITT INDEKS

Input: En lenket liste L og en indeks i
Output: Noden med indeks i i L

```
1 Procedure NodeAt(L, i)
2     it ← L.first
```

Finne en node

- Ofte må vi løpe gjennom en liste ved å følge nestepekere
- Anta at vi vil finne noden med en gitt indeks i
  - Det gjøres ved å opprette en nodepeker `it` som initialiseres til å peke på det L.`first` peker på
  - Deretter følger vi i nestepekere

ALGORITHM: FINN NODEN PÅ EN GITT INDEKS

Input: En lenket liste L og en indeks i
Output: Noden med indeks i i L

```
1 Procedure NodeAt(L, i)
2     it ← L.first
3     for j ← 0 to i − 1 do
4         it ← it.next
```

Finne en node

- Ofte må vi løpe gjennom en liste ved å følge nestepekere
- Anta at vi vil finne noden med en gitt indeks i
  - Det gjøres ved å opprette en nodepeker `it` som initialiseres til å peke på det L.`first` peker på
  - Deretter følger vi i nestepekere

ALGORITHM: FINN NODEN PÅ EN GITT INDEKS

Input: En lenket liste L og en indeks i
Output: Noden med indeks i i L

```
1 Procedure NodeAt(L, i)
2     it ← L.first
3     for j ← 0 to i − 1 do
4         it ← it.next
5     return it
```

- Algoritmen er i $\mathcal{O}(n)$ der n er antall noder i listen

Finne en node

- Ofte må vi løpe gjennom en liste ved å følge nestepekere
- Anta at vi vil finne noden med en gitt indeks i
  - Det gjøres ved å opprette en nodepeker `it` som initialiseres til å peke på det L.`first` peker på
  - Deretter følger vi i nestepekere

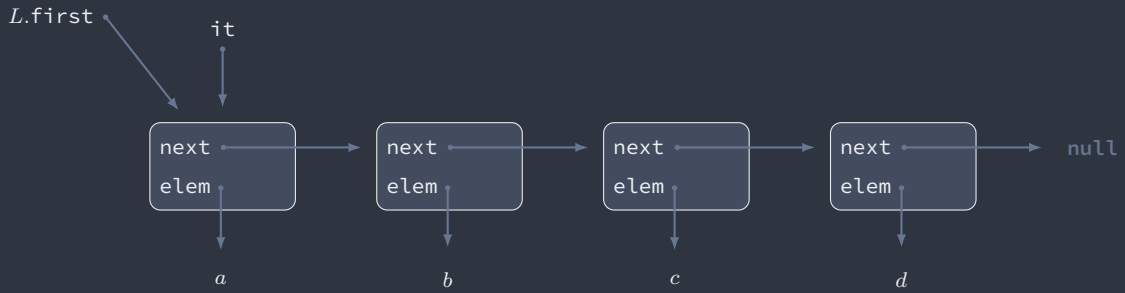
ALGORITHM: FINN NODEN PÅ EN GITT INDEKS

Input: En lenket liste L og en indeks i
Output: Noden med indeks i i L

```
1 Procedure NodeAt(L, i)
2     it ← L.first
3     for j ← 0 to i − 1 do
4         it ← it.next
5     return it
```

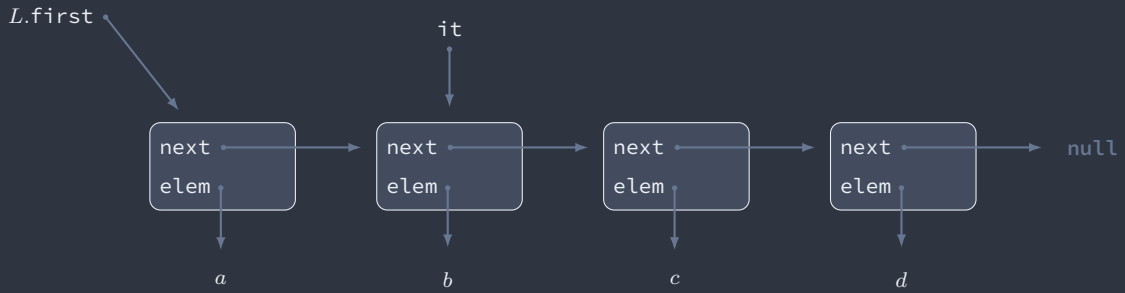
- Algoritmen er i $\mathcal{O}(n)$ der n er antall noder i listen
  - Dersom $i = n - 1$ løper vi til slutten av listen som krever $n - 1$ iterasjoner

Finne en node (illustrasjon)



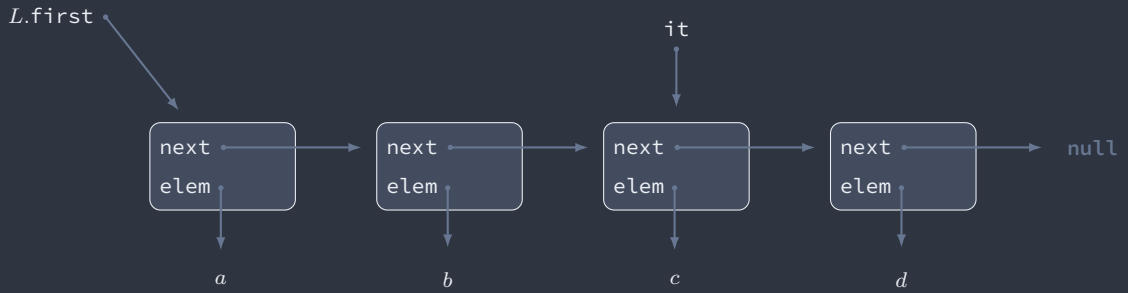
$i = 2$

Finne en node (illustrasjon)



$i = 2$

Finne en node (illustrasjon)



$i = 2$

Sett inn etter

- Når vi setter inn etter en annen node v i en enkeltlenket liste må vi:

Sett inn etter

- Når vi setter inn etter en annen node v i en enkeltlenket liste må vi:
  - Lage en ny node u

Sett inn etter

- Når vi setter inn etter en annen node v i en enkeltlenket liste må vi:
  - Lage en ny node u
  - La den nye noden u sin neste peke på det v.`next` peker på

Sett inn etter

- Når vi setter inn etter en annen node v i en enkeltlenket liste må vi:
  - Lage en ny node u
  - La den nye noden u sin neste peke på det v.`next` peker på
  - Sette v.`next` til å peke på den nye noden u

Sett inn etter

- Når vi setter inn etter en annen node v i en enkeltlenket liste må vi:
  - Lage en ny node u
  - La den nye noden u sin neste peke på det v.`next` peker på
  - Sette v.`next` til å peke på den nye noden u

Sett inn etter

- Når vi setter inn etter en annen node v i en enkeltlenket liste må vi:
  - Lage en ny node u
  - La den nye noden u sin neste peke på det v.`next` peker på
  - Sette v.`next` til å peke på den nye noden u

Algorithm: Innsetting etter en gitt node

Input: En node v i en lenket liste og et element e
Output: En ny node med elementet e er satt inn rett etter v

```
1 Procedure InsertAfter(v, e)
```

Sett inn etter

- Når vi setter inn etter en annen node v i en enkeltlenket liste må vi:
  - Lage en ny node u
  - La den nye noden u sin neste peke på det v.`next` peker på
  - Sette v.`next` til å peke på den nye noden u

Algorithm: Innsetting etter en gitt node

Input: En node v i en lenket liste og et element e
Output: En ny node med elementet e er satt inn rett etter v

```
1 Procedure InsertAfter(v, e)
2     u ← new Node(e)
```

Sett inn etter

- Når vi setter inn etter en annen node v i en enkeltlenket liste må vi:
  - Lage en ny node u
  - La den nye noden u sin neste peke på det v.`next` peker på
  - Sette v.`next` til å peke på den nye noden u

Algorithm: Innsetting etter en gitt node

Input: En node v i en lenket liste og et element e
Output: En ny node med elementet e er satt inn rett etter v

```
1 Procedure InsertAfter(v, e)
2     u ← new Node(e)
3     u.next ← v.next
```

Sett inn etter

- Når vi setter inn etter en annen node v i en enkeltlenket liste må vi:
  - Lage en ny node u
  - La den nye noden u sin neste peke på det v.`next` peker på
  - Sette v.`next` til å peke på den nye noden u

Algorithm: Innsetting etter en gitt node

Input: En node v i en lenket liste og et element e
Output: En ny node med elementet e er satt inn rett etter v

```
1 Procedure InsertAfter(v, e)
2     u ← new Node(e)
3     u.next ← v.next
4     v.next ← u
```

- Algoritmen er i $\mathcal{O}(1)$

Sett inn etter

- Når vi setter inn etter en annen node v i en enkeltlenket liste må vi:
  - Lage en ny node u
  - La den nye noden u sin neste peke på det v.`next` peker på
  - Sette v.`next` til å peke på den nye noden u

Algorithm: Innsetting etter en gitt node

Input: En node v i en lenket liste og et element e
Output: En ny node med elementet e er satt inn rett etter v

```
1 Procedure InsertAfter(v, e)
2     u ← new Node(e)
3     u.next ← v.next
4     v.next ← u
```

- Algoritmen er i $\mathcal{O}(1)$
  - Vi oppretter kun et nytt objekt og oppdaterer et par pekere

Sett inn etter

- Når vi setter inn etter en annen node v i en enkeltlenket liste må vi:
  - Lage en ny node u
  - La den nye noden u sin neste peke på det v.`next` peker på
  - Sette v.`next` til å peke på den nye noden u

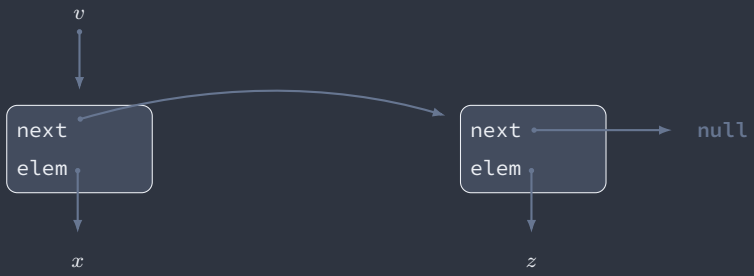
Algorithm: Innsetting etter en gitt node

Input: En node v i en lenket liste og et element e
Output: En ny node med elementet e er satt inn rett etter v

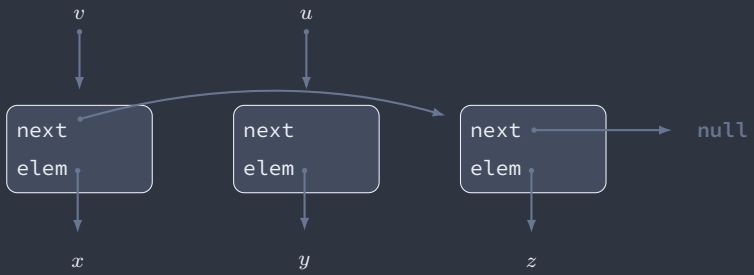
```
1 Procedure InsertAfter(v, e)
2     u ← new Node(e)
3     u.next ← v.next
4     v.next ← u
```

- Algoritmen er i $\mathcal{O}(1)$
  - Vi oppretter kun et nytt objekt og oppdaterer et par pekere
  - Innsetting etter v krever like mange steg *uavhengig* av hvor stor listen er

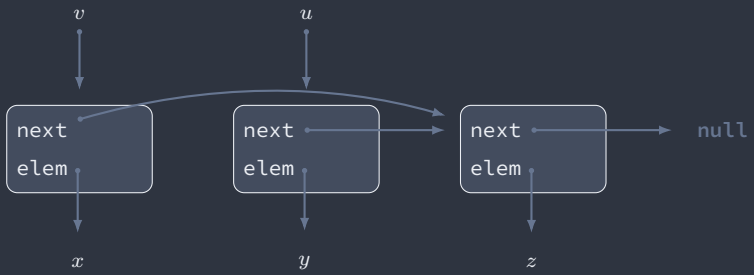
Sett inn etter (illustrasjon)



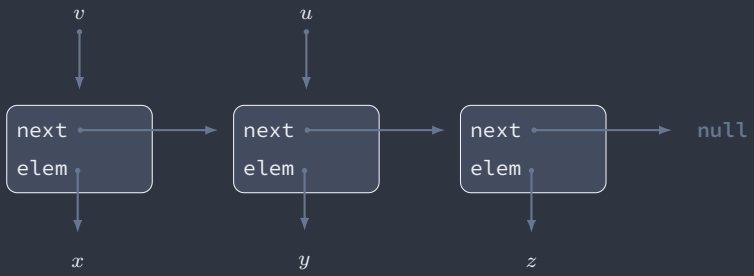
Sett inn etter (illustrasjon)



Sett inn etter (illustrasjon)



Sett inn etter (illustrasjon)



Fjern etter

- For å fjerne noden som kommer etter v må vi sette v.`next` til å peke på v.`next`.`next`

Fjern etter

- For å fjerne noden som kommer etter v må vi sette v.`next` til å peke på v.`next`.`next`
- Vi antar at v sin neste ikke er **`null`**

Fjern etter

- For å fjerne noden som kommer etter v må vi sette v.`next` til å peke på v.`next`.`next`
- Vi antar at v sin neste ikke er **`null`**

Fjern etter

- For å fjerne noden som kommer etter v må vi sette v.`next` til å peke på v.`next.next`
- Vi antar at v sin neste ikke er **`null`**

Algorithm: Sletting av noden etter en gitt node

`Input:` En node v i en lenket liste der v.`next` $\neq$ **`null`**
`Output:` Noden etter v fjernes og elementet returneres

```
1 Procedure RemoveAfter(v)
```

Fjern etter

- For å fjerne noden som kommer etter v må vi sette v.`next` til å peke på v.`next.next`
- Vi antar at v sin neste ikke er **`null`**

Algorithm: Sletting av noden etter en gitt node

`Input:` En node v i en lenket liste der v.`next` $\neq$ **`null`**
`Output:` Noden etter v fjernes og elementet returneres

```
1 Procedure RemoveAfter(v)
2     e ← v.next.elem
```

Fjern etter

- For å fjerne noden som kommer etter v må vi sette v.`next` til å peke på v.`next.next`
- Vi antar at v sin neste ikke er **`null`**

Algorithm: Sletting av noden etter en gitt node

`Input:` En node v i en lenket liste der v.`next` $\neq$ **`null`**
`Output:` Noden etter v fjernes og elementet returneres

```
1 Procedure RemoveAfter(v)
2     e ← v.next.elem
3     v.next ← v.next.next
```

Fjern etter

- For å fjerne noden som kommer etter v må vi sette v.`next` til å peke på v.`next.next`
- Vi antar at v sin neste ikke er **`null`**

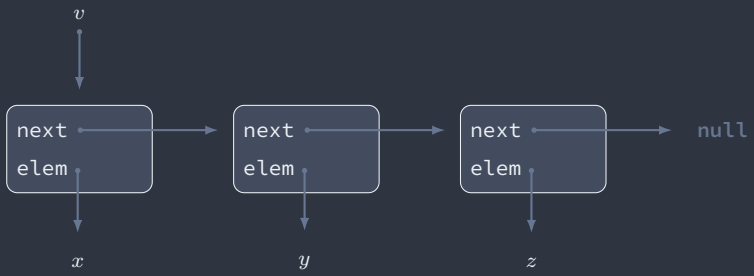
Algorithm: Sletting av noden etter en gitt node

`Input:` En node v i en lenket liste der v.`next` $\neq$ **`null`**
`Output:` Noden etter v fjernes og elementet returneres

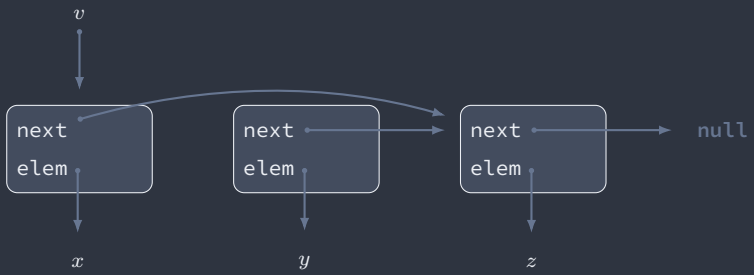
```
1 Procedure RemoveAfter(v)
2     e ← v.next.elem
3     v.next ← v.next.next
4     return e
```

- Algoritmen er i $\mathcal{O}(1)$

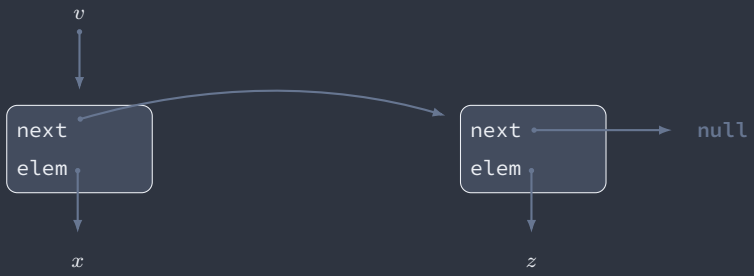
Fjern etter (illustrasjon)



Fjern etter (illustrasjon)



Fjern etter (illustrasjon)



Dobbeltlenket liste

- Ved å knytte noder sammen med *neste-* og *forrige-*pekere får vi en *dobbeltlenket liste*

Dobbeltlenket liste

- Ved å knytte noder sammen med *neste-* og *forrige-*pekere får vi en *dobbeltlenket liste*
- Ved å ha pekere i begge retninger er det mulig å sette inn en node *før* en annen

Dobbeltlenket liste

- Ved å knytte noder sammen med *neste-* og *forrige-*pekere får vi en *dobbeltlenket liste*
- Ved å ha pekere i begge retninger er det mulig å sette inn en node *før* en annen
- Vi kan lage en dobbeltlenket liste L som et objekt med peker til den første noden L.`first` og den siste noden L.`last`

Dobbeltlenket liste

- Ved å knytte noder sammen med *neste-* og *forrige-*pekere får vi en *dobbeltlenket liste*
- Ved å ha pekere i begge retninger er det mulig å sette inn en node *før* en annen
- Vi kan lage en dobbeltlenket liste L som et objekt med peker til den første noden L.`first` og den siste noden L.`last`
- En dobbeltlenket liste gjør både innsetting og sletting på begge ender av listen raskt og forholdsvis enkelt

Illustrasjon



Illustrasjon



Illustrasjon



Illustrasjon



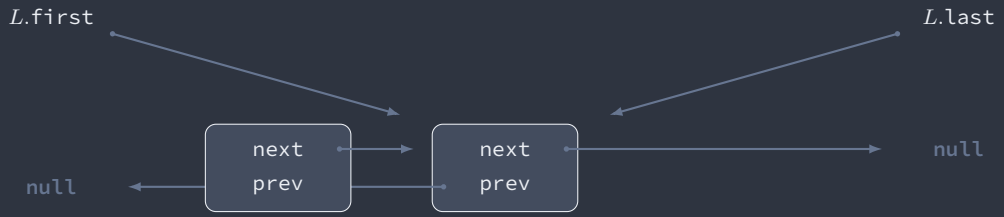
Illustrasjon



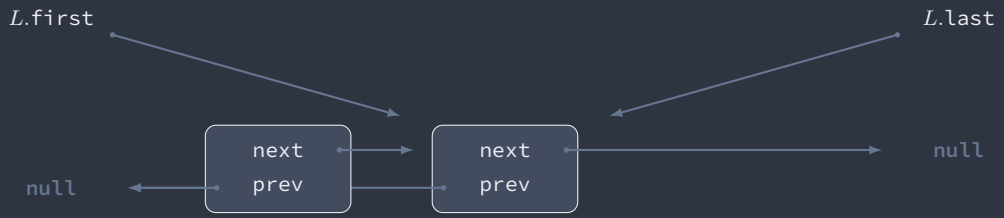
Illustrasjon



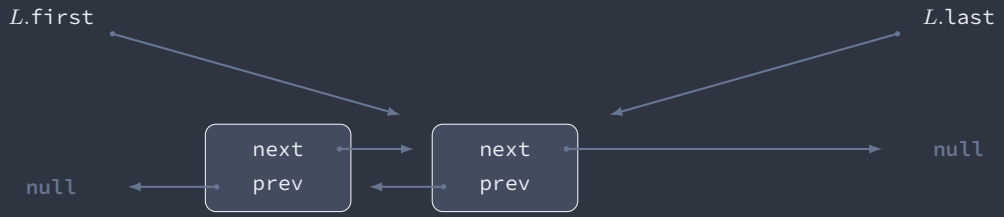
Illustrasjon



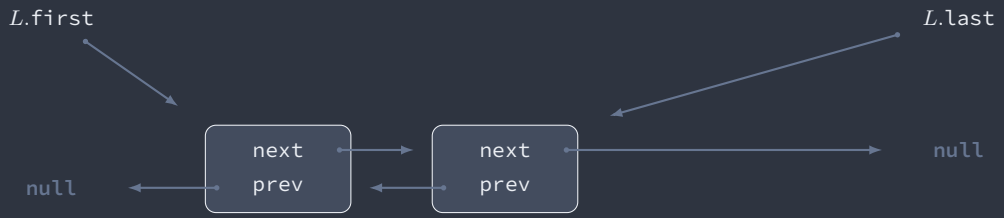
Illustrasjon



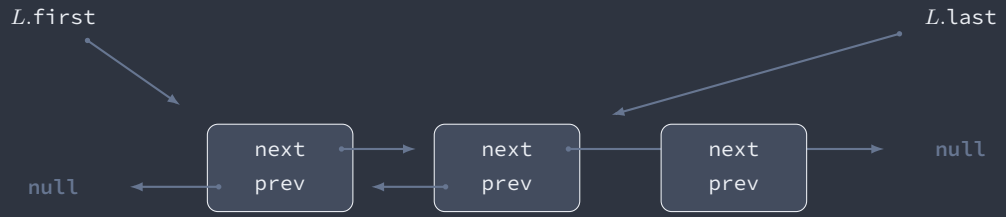
Illustrasjon



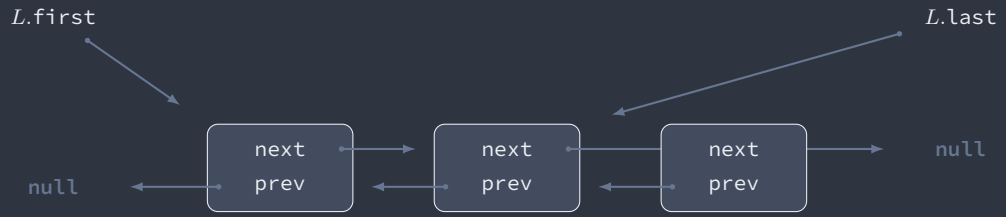
Illustrasjon



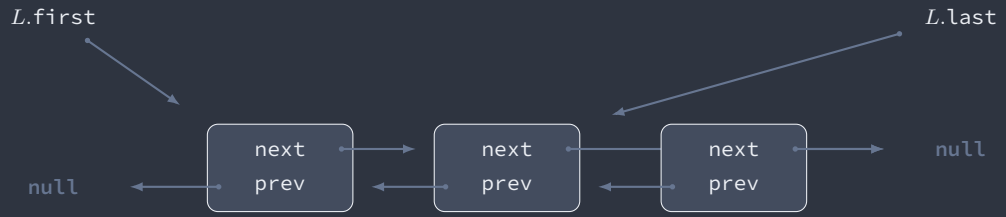
Illustrasjon



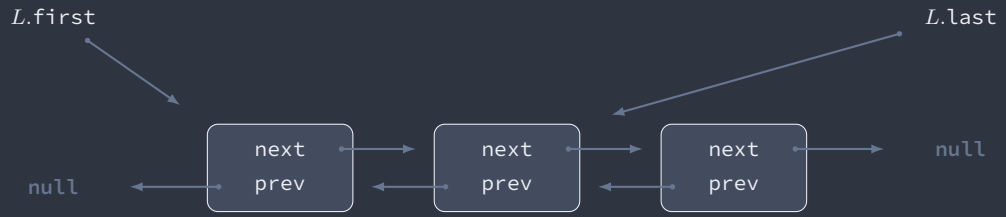
Illustrasjon



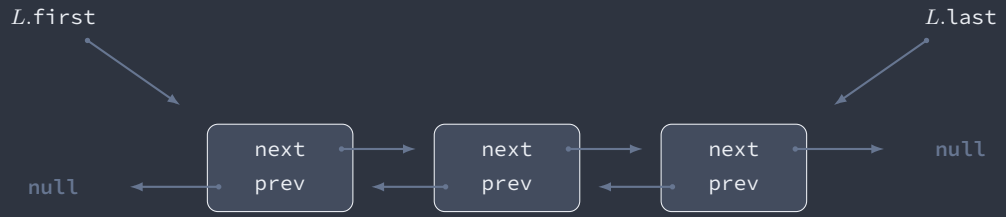
Illustrasjon



Illustrasjon



Illustrasjon



Sett inn etter

- Når vi setter inn en node etter en annen node v i en dobbeltlenket liste må vi:

Sett inn etter

- Når vi setter inn en node etter en annen node v i en dobbeltlenket liste må vi:
  - Lage en ny node u

Sett inn etter

- Når vi setter inn en node etter en annen node v i en dobbeltlenket liste må vi:
  - Lage en ny node u
  - Oppdatere pekere slik at den posisjoneres mellom v og v sin neste

Sett inn etter

- Når vi setter inn en node etter en annen node v i en dobbeltlenket liste må vi:
  - Lage en ny node u
  - Oppdatere pekere slik at den posisjoneres mellom v og v sin neste
- Her antar vi at v sin neste ikke er `null`

Sett inn etter

- Når vi setter inn en node etter en annen node v i en dobbeltlenket liste må vi:
  - Lage en ny node u
  - Oppdatere pekere slik at den posisjoneres mellom v og v sin neste
- Her antar vi at v sin neste ikke er `null`

Sett inn etter

- Når vi setter inn en node etter en annen node v i en dobbeltlenket liste må vi:
  - Lage en ny node u
  - Oppdatere pekere slik at den posisjoneres mellom v og v sin neste
- Her antar vi at v sin neste ikke er `null`

Algorithm: Innsetting etter en gitt node

Input: En node v i en dobbeltlenket liste og et element e
Output: En ny node med elementet e er satt inn rett etter v

```
1 Procedure InsertAfter(v, e)
```

Sett inn etter

- Når vi setter inn en node etter en annen node v i en dobbeltlenket liste må vi:
  - Lage en ny node u
  - Oppdatere pekere slik at den posisjoneres mellom v og v sin neste
- Her antar vi at v sin neste ikke er `null`

Algorithm: Innsetting etter en gitt node

Input: En node v i en dobbeltlenket liste og et element e
Output: En ny node med elementet e er satt inn rett etter v

```
1 Procedure InsertAfter(v, e)
2     u ← new Node(e)
```

Sett inn etter

- Når vi setter inn en node etter en annen node v i en dobbeltlenket liste må vi:
  - Lage en ny node u
  - Oppdatere pekere slik at den posisjoneres mellom v og v sin neste
- Her antar vi at v sin neste ikke er `null`

Algorithm: Innsetting etter en gitt node

Input: En node v i en dobbeltlenket liste og et element e
Output: En ny node med elementet e er satt inn rett etter v

```
1 Procedure InsertAfter(v, e)
2     u ← new Node(e)
3     u.prev ← v
4     u.next ← v.next
```

Sett inn etter

- Når vi setter inn en node etter en annen node v i en dobbeltlenket liste må vi:
  - Lage en ny node u
  - Oppdatere pekere slik at den posisjoneres mellom v og v sin neste
- Her antar vi at v sin neste ikke er `null`

Algorithm: Innsetting etter en gitt node

Input: En node v i en dobbeltlenket liste og et element e
Output: En ny node med elementet e er satt inn rett etter v

```
1 Procedure InsertAfter(v, e)
2     u ← new Node(e)
3     u.prev ← v
4     u.next ← v.next
5     v.next.prev ← u
```

Sett inn etter

- Når vi setter inn en node etter en annen node v i en dobbeltlenket liste må vi:
  - Lage en ny node u
  - Oppdatere pekere slik at den posisjoneres mellom v og v sin neste
- Her antar vi at v sin neste ikke er `null`

Algorithm: Innsetting etter en gitt node

Input: En node v i en dobbeltlenket liste og et element e
Output: En ny node med elementet e er satt inn rett etter v

```
1 Procedure InsertAfter(v, e)
2     u ← new Node(e)
3     u.prev ← v
4     u.next ← v.next
5     v.next.prev ← u
6     v.next ← u
```

- Algoritmen er i $\mathcal{O}(1)$

Sett inn etter

- Når vi setter inn en node etter en annen node v i en dobbeltlenket liste må vi:
  - Lage en ny node u
  - Oppdatere pekere slik at den posisjoneres mellom v og v sin neste
- Her antar vi at v sin neste ikke er `null`

Algorithm: Innsetting etter en gitt node

Input: En node v i en dobbeltlenket liste og et element e
Output: En ny node med elementet e er satt inn rett etter v

```
1 Procedure InsertAfter(v, e)
2     u ← new Node(e)
3     u.prev ← v
4     u.next ← v.next
5     v.next.prev ← u
6     v.next ← u
```

- Algoritmen er i $\mathcal{O}(1)$
  - Det gjøres omtrent dobbelt så mange steg som for enkeltlenkede lister

Sett inn etter

- Når vi setter inn en node etter en annen node v i en dobbeltlenket liste må vi:
  - Lage en ny node u
  - Oppdatere pekere slik at den posisjoneres mellom v og v sin neste
- Her antar vi at v sin neste ikke er `null`

Algorithm: Innsetting etter en gitt node

Input: En node v i en dobbeltlenket liste og et element e
Output: En ny node med elementet e er satt inn rett etter v

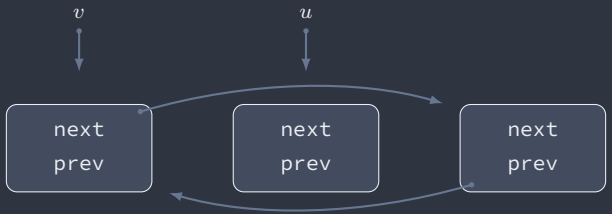
```
1 Procedure InsertAfter(v, e)
2     u ← new Node(e)
3     u.prev ← v
4     u.next ← v.next
5     v.next.prev ← u
6     v.next ← u
```

- Algoritmen er i $\mathcal{O}(1)$
  - Det gjøres omtrent dobbelt så mange steg som for enkeltlenkede lister
  - Fremdeles er antall steg *uavhengig* av lengden på listen

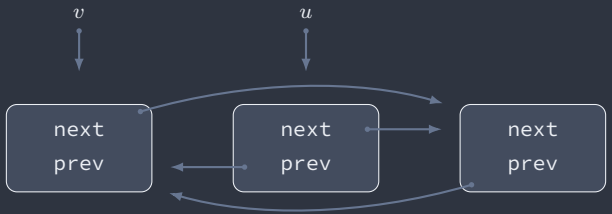
Sett inn etter (illustrasjon)



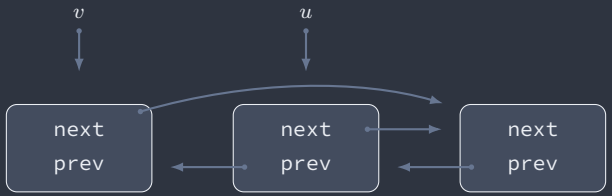
Sett inn etter (illustrasjon)



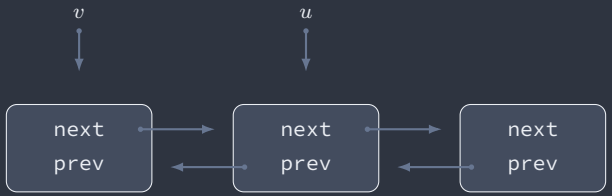
Sett inn etter (illustrasjon)



Sett inn etter (illustrasjon)



Sett inn etter (illustrasjon)



Sett inn før

- Å sette inn en ny node *før* en annen node v er *enkelt* i en dobbeltlenket liste

Sett inn før

- Å sette inn en ny node *før* en annen node v er *enkelt* i en dobbeltlenket liste
- Det er det samme som å sette inn *etter* v.`prev`!

Sett inn før

- Å sette inn en ny node *før* en annen node v er *enkelt* i en dobbeltlenket liste
- Det er det samme som å sette inn *etter* v.`prev`!
- Vi antar at v sin forrige ikke er **`null`**

Sett inn før

- Å sette inn en ny node *før* en annen node v er *enkelt* i en dobbeltlenket liste
- Det er det samme som å sette inn *etter* v.`prev`!
- Vi antar at v sin forrige ikke er **`null`**

Sett inn før

- Å sette inn en ny node *før* en annen node v er *enkelt* i en dobbeltlenket liste
- Det er det samme som å sette inn *etter* v.`prev`!
- Vi antar at v sin forrige ikke er **`null`**

Algorithm: Innsetting før en gitt node

`Input:` En node v i en dobbeltlenket liste og et element e
`Output:` En ny node med elementet e er satt inn rett før v

```
1 Procedure InsertBefore(v, e)
```

Sett inn før

- Å sette inn en ny node *før* en annen node v er *enkelt* i en dobbeltlenket liste
- Det er det samme som å sette inn *etter* v.`prev`!
- Vi antar at v sin forrige ikke er **`null`**

Algorithm: Innsetting før en gitt node

`Input:` En node v i en dobbeltlenket liste og et element e
`Output:` En ny node med elementet e er satt inn rett før v

```
1 Procedure InsertBefore(v, e)
2 |   InsertAfter(v.prev, e)
```

- Algoritmen er i $\mathcal{O}(1)$

Sett inn før

- Å sette inn en ny node *før* en annen node v er *enkelt* i en dobbeltlenket liste
- Det er det samme som å sette inn *etter* v.`prev`!
- Vi antar at v sin forrige ikke er **`null`**

ALGORITHM: INNSETTING FØR EN GITT NODE

Input: En node v i en dobbeltlenket liste og et element e
Output: En ny node med elementet e er satt inn rett før v

```
1 Procedure InsertBefore(v, e)
2 |   InsertAfter(v.prev, e)
```

- Algoritmen er i $\mathcal{O}(1)$
  - Den følger en peker og gjør et kall på en prosedyre som er i $\mathcal{O}(1)$

Fjern en node

- I en dobbeltlenket liste kan vi fjerne noden v *selv*

Fjern en node

- I en dobbeltlenket liste kan vi fjerne noden v *selv*
  - Vi trenger ikke noden foran, slik vi gjorde i en enkeltlenket liste

Fjern en node

- I en dobbeltlenket liste kan vi fjerne noden v *selv*
  - Vi trenger ikke noden foran, slik vi gjorde i en enkeltlenket liste
- Vi antar at hverken v sin forrige eller neste er `null`

Fjern en node

- I en dobbeltlenket liste kan vi fjerne noden v *selv*
  - Vi trenger ikke noden foran, slik vi gjorde i en enkeltlenket liste
- Vi antar at hverken v sin forrige eller neste er `null`

Fjern en node

- I en dobbeltlenket liste kan vi fjerne noden v *selv*
  - Vi trenger ikke noden foran, slik vi gjorde i en enkeltlenket liste
- Vi antar at hverken v sin forrige eller neste er `null`

ALGORITHM: SLETTING AV EN GITT NODE

Input: En node v i en dobbeltlenket liste
Output: v er fjernet fra listen, og elementet returneres

```
1 Procedure RemoveNode(v)
```

Fjern en node

- I en dobbeltlenket liste kan vi fjerne noden v *selv*
  - Vi trenger ikke noden foran, slik vi gjorde i en enkeltlenket liste
- Vi antar at hverken v sin forrige eller neste er `null`

Algorithm: Sletting av en gitt node

Input: En node v i en dobbeltlenket liste
Output: v er fjernet fra listen, og elementet returneres

```
1 Procedure RemoveNode(v)
2     v.prev.next ← v.next
```

Fjern en node

- I en dobbeltlenket liste kan vi fjerne noden v *selv*
  - Vi trenger ikke noden foran, slik vi gjorde i en enkeltlenket liste
- Vi antar at hverken v sin forrige eller neste er `null`

ALGORITHM: SLETTING AV EN GITT NODE

Input: En node v i en dobbeltlenket liste
Output: v er fjernet fra listen, og elementet returneres

```
1 Procedure RemoveNode(v)
2     v.prev.next ← v.next
3     v.next.prev ← v.prev
```

Fjern en node

- I en dobbeltlenket liste kan vi fjerne noden v *selv*
  - Vi trenger ikke noden foran, slik vi gjorde i en enkeltlenket liste
- Vi antar at hverken v sin forrige eller neste er `null`

Algorithm: Sletting av en gitt node

Input: En node v i en dobbeltlenket liste
Output: v er fjernet fra listen, og elementet returneres

```
1 Procedure RemoveNode(v)
2     v.prev.next ← v.next
3     v.next.prev ← v.prev
4     return v.elem
```

- Algoritmen er i $\mathcal{O}(1)$

Hode- og halenoder

- Så langt har vi ikke håndtert innsetting eller sletting i endene av listen

Hode- og halenoder

- Så langt har vi ikke håndtert innsetting eller sletting i endene av listen
- Vi kan legge til spesielle tilfeller for dette

Hode- og halenoder

- Så langt har vi ikke håndtert innsetting eller sletting i endene av listen
- Vi kan legge til spesielle tilfeller for dette
- En annen løsning er å heller la listen ha to *spesielle* noder; et *hode* og en *hale*

Hode- og halenoder

- Så langt har vi ikke håndtert innsetting eller sletting i endene av listen
- Vi kan legge til spesielle tilfeller for dette
- En annen løsning er å heller la listen ha to *spesielle* noder; et *hode* og en *hale*
  - De holder ikke på noe element, og de fjernes aldri

Hode- og halenoder

- Så langt har vi ikke håndtert innsetting eller sletting i endene av listen
- Vi kan legge til spesielle tilfeller for dette
- En annen løsning er å heller la listen ha to *spesielle* noder; et *hode* og en *hale*
  - De holder ikke på noe element, og de fjernes aldri
  - De ligger alltid på hver sin ende av listen

Hode- og halenoder

- Så langt har vi ikke håndtert innsetting eller sletting i endene av listen
- Vi kan legge til spesielle tilfeller for dette
- En annen løsning er å heller la listen ha to *spesielle* noder; et *hode* og en *hale*
  - De holder ikke på noe element, og de fjernes aldri
  - De ligger alltid på hver sin ende av listen
- Da har alle noder som holder på et element både en forrige og en neste som ikke er `null`

Hode- og halenoder

- Så langt har vi ikke håndtert innsetting eller sletting i endene av listen
- Vi kan legge til spesielle tilfeller for dette
- En annen løsning er å heller la listen ha to *spesielle* noder; et *hode* og en *hale*
  - De holder ikke på noe element, og de fjernes aldri
  - De ligger alltid på hver sin ende av listen
- Da har alle noder som holder på et element både en forrige og en neste som ikke er `null`
- Den første noden er L.`head`.`next`, og den siste er L.`tail`.`prev`

Hode- og halenoder

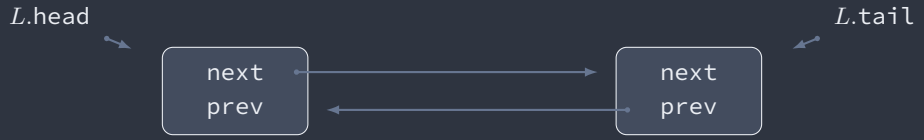
- Så langt har vi ikke håndtert innsetting eller sletting i endene av listen
- Vi kan legge til spesielle tilfeller for dette
- En annen løsning er å heller la listen ha to *spesielle* noder; et *hode* og en *hale*
  - De holder ikke på noe element, og de fjernes aldri
  - De ligger alltid på hver sin ende av listen
- Da har alle noder som holder på et element både en forrige og en neste som ikke er `null`
- Den første noden er L.`head.next`, og den siste er L.`tail.prev`
- Listen er tom når L.`head.next` $=$ L.`tail`

Hode- og halenoder

- Så langt har vi ikke håndtert innsetting eller sletting i endene av listen
- Vi kan legge til spesielle tilfeller for dette
- En annen løsning er å heller la listen ha to *spesielle* noder; et *hode* og en *hale*
  - De holder ikke på noe element, og de fjernes aldri
  - De ligger alltid på hver sin ende av listen
- Da har alle noder som holder på et element både en forrige og en neste som ikke er `null`
- Den første noden er L.`head.next`, og den siste er L.`tail.prev`
- Listen er tom når L.`head.next` $=$ L.`tail`

Hode- og halenoder

- Så langt har vi ikke håndtert innsetting eller sletting i endene av listen
- Vi kan legge til spesielle tilfeller for dette
- En annen løsning er å heller la listen ha to *spesielle* noder; et *hode* og en *hale*
  - De holder ikke på noe element, og de fjernes aldri
  - De ligger alltid på hver sin ende av listen
- Da har alle noder som holder på et element både en forrige og en neste som ikke er `null`
- Den første noden er L.`head.next`, og den siste er L.`tail.prev`
- Listen er tom når L.`head.next` $= L$.`tail`



Lenkede lister *er* lister

Listeoperasjon	Implementasjon	$\mathcal{O}$
`Get`(L, i)	`NodeAt`(L, i)`.elem`	$\mathcal{O}(n)$

Lenkede lister *er* lister

Listeoperasjon	Implementasjon	$\mathcal{O}$
`Get`(L, i)	`NodeAt`(L, i)`.elem`	$\mathcal{O}(n)$
`Set`(L, i, e)	`NodeAt`(L, i)`.elem` $\leftarrow e$	$\mathcal{O}(n)$

Lenkede lister *er* lister

Listeoperasjon	Implementasjon	$\mathcal{O}$
`Get`(L, i)	`NodeAt`(L, i)`.elem`	$\mathcal{O}(n)$
`Set`(L, i, e)	`NodeAt`(L, i)`.elem` $\leftarrow e$	$\mathcal{O}(n)$
`Add`(L, i, e)	`InsertBefore`(`NodeAt`$(L, i), e)$	$\mathcal{O}(n)$

Lenkede lister *er* lister

Listeoperasjon	Implementasjon	$\mathcal{O}$
`Get`(L, i)	`NodeAt`(L, i)`.elem`	$\mathcal{O}(n)$
`Set`(L, i, e)	`NodeAt`(L, i)`.elem` $\leftarrow e$	$\mathcal{O}(n)$
`Add`(L, i, e)	`InsertBefore`(`NodeAt`$(L, i), e)$	$\mathcal{O}(n)$
`Remove`(L, i)	`RemoveNode`(`NodeAt`(L, i))	$\mathcal{O}(n)$

- Merk at kompleksiteten i alle kallene kommer fra `NodeAt`

Lenkede lister *er* lister

Listeoperasjon	Implementasjon	$\mathcal{O}$
`Get`(L, i)	`NodeAt`(L, i)`.elem`	$\mathcal{O}(n)$
`Set`(L, i, e)	`NodeAt`(L, i)`.elem` $\leftarrow e$	$\mathcal{O}(n)$
`Add`(L, i, e)	`InsertBefore`(`NodeAt`$(L, i), e)$	$\mathcal{O}(n)$
`Remove`(L, i)	`RemoveNode`(`NodeAt`(L, i))	$\mathcal{O}(n)$

- Merk at kompleksiteten i alle kallene kommer fra `NodeAt`
  - Alle andre listeoperasjoner vi har sett er i $\mathcal{O}(1)$

Dynamiske arrayer

Arrayer

- Et array A av lengde N lagrer N elementer av samme type

Arrayer

- Et array A av lengde N lagrer N elementer av samme type
- Ligger som en sammenhengende segment av minne

Arrayer

- Et array A av lengde N lagrer N elementer av samme type
- Ligger som en sammenhengende segment av minne
- Elementene aksesseres ved hjelp av en *indeks*

Arrayer

- Et array A av lengde N lagrer N elementer av samme type
- Ligger som en sammenhengende segment av minne
- Elementene aksesseres ved hjelp av en *indeks*
- Hvis $0 \leq i < N$, så

Arrayer

- Et array A av lengde N lagrer N elementer av samme type
- Ligger som en sammenhengende segment av minne
- Elementene aksesseres ved hjelp av en *indeks*
- Hvis $0 \leq i < N$, så
  - $A[i]$ gir det i-te elementet i $\mathcal{O}(1)$

Arrayer

- Et array A av lengde N lagrer N elementer av samme type
- Ligger som en sammenhengende segment av minne
- Elementene aksesseres ved hjelp av en *indeks*
- Hvis $0 \leq i < N$, så
  - $A[i]$ gir det i-te elementet i $\mathcal{O}(1)$
  - $A[i] \leftarrow x$ setter (og overskriver) det i-te elementet til x i $\mathcal{O}(1)$

Arrayer

- Et array A av lengde N lagrer N elementer av samme type
- Ligger som en sammenhengende segment av minne
- Elementene aksesseres ved hjelp av en *indeks*
- Hvis $0 \leq i < N$, så
  - $A[i]$ gir det i-te elementet i $\mathcal{O}(1)$
  - $A[i] \leftarrow x$ setter (og overskriver) det i-te elementet til x i $\mathcal{O}(1)$
  - $|A|$ gir lengden på arrayet i $\mathcal{O}(1)$

Arrayer

- Et array A av lengde N lagrer N elementer av samme type
- Ligger som en sammenhengende segment av minne
- Elementene aksesseres ved hjelp av en *indeks*
- Hvis $0 \leq i < N$, så
  - $A[i]$ gir det i-te elementet i $\mathcal{O}(1)$
  - $A[i] \leftarrow x$ setter (og overskriver) det i-te elementet til x i $\mathcal{O}(1)$
  - $|A|$ gir lengden på arrayet i $\mathcal{O}(1)$
    - Siden vi antok at A er av lengde N, så er $|A| = N$

Arrayer

- Et array A av lengde N lagrer N elementer av samme type
- Ligger som en sammenhengende segment av minne
- Elementene aksesseres ved hjelp av en *indeks*
- Hvis $0 \leq i < N$, så
  - $A[i]$ gir det i-te elementet i $\mathcal{O}(1)$
  - $A[i] \leftarrow x$ setter (og overskriver) det i-te elementet til x i $\mathcal{O}(1)$
  - $|A|$ gir lengden på arrayet i $\mathcal{O}(1)$
    - Siden vi antok at A er av lengde N, så er $|A| = N$
- Et array har *fast størrelse*

Arrayer

- Et array A av lengde N lagrer N elementer av samme type
- Ligger som en sammenhengende segment av minne
- Elementene aksesseres ved hjelp av en *indeks*
- Hvis $0 \leq i < N$, så
  - $A[i]$ gir det i-te elementet i $\mathcal{O}(1)$
  - $A[i] \leftarrow x$ setter (og overskriver) det i-te elementet til x i $\mathcal{O}(1)$
  - $|A|$ gir lengden på arrayet i $\mathcal{O}(1)$
    - Siden vi antok at A er av lengde N, så er $|A| = N$
- Et array har *fast størrelse*
- Det er den enkleste og raskeste datastrukturen, men ikke den mest fleksible

Dynamiske arrayer

- Et *dynamisk* array er et array som kan utvides ved behov

Dynamiske arrayer

- Et *dynamisk* array er et array som kan utvides ved behov
- Det dynamiske arrayet D kan implementeres med:

Dynamiske arrayer

- Et *dynamisk* array er et array som kan utvides ved behov
- Det dynamiske arrayet D kan implementeres med:
  - et *ordinært* array $D.A$ av fast størrelse $|D.A|$, og

Dynamiske arrayer

- Et *dynamisk* array er et array som kan utvides ved behov
- Det dynamiske arrayet D kan implementeres med:
  - et *ordinært* array $D.A$ av fast størrelse $|D.A|$, og
  - et tall $D.n$ som angir antall elementer lagret

Dynamiske arrayer

- Et *dynamisk* array er et array som kan utvides ved behov
- Det dynamiske arrayet D kan implementeres med:
  - et *ordinært* array $D.A$ av fast størrelse $|D.A|$, og
  - et tall $D.n$ som angir antall elementer lagret
- (Det kan implementeres som et objekt eller struct med to felter)

Dynamiske arrayer

- Et *dynamisk* array er et array som kan utvides ved behov
- Det dynamiske arrayet D kan implementeres med:
  - et *ordinært* array $D.A$ av fast størrelse $|D.A|$, og
  - et tall $D.n$ som angir antall elementer lagret
- (Det kan implementeres som et objekt eller struct med to felter)
- Det dynamiske arrayet kan implementere en *liste*

Dynamiske arrayer

- Et *dynamisk* array er et array som kan utvides ved behov
- Det dynamiske arrayet D kan implementeres med:
  - et *ordinært* array $D.A$ av fast størrelse $|D.A|$, og
  - et tall $D.n$ som angir antall elementer lagret
- (Det kan implementeres som et objekt eller struct med to felter)
- Det dynamiske arrayet kan implementere en *liste*
- Merk at `list` i Python og `ArrayList` i Java er implementert som dynamiske arrayer

Innsetting på slutten

- Når vi setter inn et element, så må vi først sikre at vi har kapasitet

Innsetting på slutten

- Når vi setter inn et element, så må vi først sikre at vi har kapasitet
  - Det vil si vi må sørge for at et er plass til *minst* ett element til

Innsetting på slutten

- Når vi setter inn et element, så må vi først sikre at vi har kapasitet
  - Det vil si vi må sørge for at et er plass til *minst* ett element til
  - Vi trenger en prosedyre `EnsureCapacity` som sørger for dette

Innsetting på slutten

- Når vi setter inn et element, så må vi først sikre at vi har kapasitet
  - Det vil si vi må sørge for at et er plass til *minst* ett element til
  - Vi trenger en prosedyre `EnsureCapacity` som sørger for dette
- Vi setter verdien på posisjon $D.n$ til å være verdien som ble gitt som argument

Innsetting på slutten

- Når vi setter inn et element, så må vi først sikre at vi har kapasitet
  - Det vil si vi må sørge for at et er plass til *minst* ett element til
  - Vi trenger en prosedyre `EnsureCapacity` som sørger for dette
- Vi setter verdien på posisjon $D.n$ til å være verdien som ble gitt som argument
- Til slutt inkrementerer vi $D.n$

Innsetting på slutten

- Når vi setter inn et element, så må vi først sikre at vi har kapasitet
  - Det vil si vi må sørge for at et er plass til *minst* ett element til
  - Vi trenger en prosedyre `EnsureCapacity` som sørger for dette
- Vi setter verdien på posisjon $D.n$ til å være verdien som ble gitt som argument
- Til slutt inkrementerer vi $D.n$

Innsetting på slutten

- Når vi setter inn et element, så må vi først sikre at vi har kapasitet
  - Det vil si vi må sørge for at et er plass til *minst* ett element til
  - Vi trenger en prosedyre `EnsureCapacity` som sørger for dette
- Vi setter verdien på posisjon $D.n$ til å være verdien som ble gitt som argument
- Til slutt inkrementerer vi $D.n$

Algorithm: Innsetting på slutten i et dynamisk array

Input: Et dynamisk array D og et element e
Output: Et dynamisk array med e lagt til på slutten av D

```
1 Procedure PushBack(D, e)
```

Innsetting på slutten

- Når vi setter inn et element, så må vi først sikre at vi har kapasitet
  - Det vil si vi må sørge for at et er plass til *minst* ett element til
  - Vi trenger en prosedyre `EnsureCapacity` som sørger for dette
- Vi setter verdien på posisjon $D.n$ til å være verdien som ble gitt som argument
- Til slutt inkrementerer vi $D.n$

Algorithm: Insetting på slutten i et dynamisk array

Input: Et dynamisk array D og et element e
Output: Et dynamisk array med e lagt til på slutten av D

```
1 Procedure PushBack(D, e)
2     EnsureCapacity(D)
```

Innsetting på slutten

- Når vi setter inn et element, så må vi først sikre at vi har kapasitet
  - Det vil si vi må sørge for at et er plass til *minst* ett element til
  - Vi trenger en prosedyre `EnsureCapacity` som sørger for dette
- Vi setter verdien på posisjon $D.n$ til å være verdien som ble gitt som argument
- Til slutt inkrementerer vi $D.n$

Algorithm: Innsetting på slutten i et dynamisk array

Input: Et dynamisk array D og et element e
Output: Et dynamisk array med e lagt til på slutten av D

```
1 Procedure PushBack(D, e)
2     EnsureCapacity(D)
3     D.A[D.n] ← e
4     D.n ← D.n + 1
```

- Algoritmen er i $\mathcal{O}(1)$ hvis det er ledig kapasitet

Innsetting på slutten

- Når vi setter inn et element, så må vi først sikre at vi har kapasitet
  - Det vil si vi må sørge for at et er plass til *minst* ett element til
  - Vi trenger en prosedyre `EnsureCapacity` som sørger for dette
- Vi setter verdien på posisjon $D.n$ til å være verdien som ble gitt som argument
- Til slutt inkrementerer vi $D.n$

Algorithm: Innsetting på slutten i et dynamisk array

Input: Et dynamisk array D og et element e
Output: Et dynamisk array med e lagt til på slutten av D

```
1 Procedure PushBack(D, e)
2     EnsureCapacity(D)
3     D.A[D.n] ← e
4     D.n ← D.n + 1
```

- Algoritmen er i $\mathcal{O}(1)$ hvis det er ledig kapasitet
  - Ellers har den samme kjøretidskompleksitet som `EnsureCapacity`

Sikre kapasitet

- Dersom $D.n$ er *mindre enn* $|D.A|$ gjør vi *ingenting*

Sikre kapasitet

- Dersom $D.n$ er *mindre enn* $|D.A|$ gjør vi *ingenting*
- Hvis ikke, så oppretter vi et nytt array med dobbelt så mye plass

Sikre kapasitet

- Dersom $D.n$ er *mindre enn* $|D.A|$ gjør vi *ingenting*
- Hvis ikke, så oppretter vi et nytt array med dobbelt så mye plass
  - Det nye arrayet fylles opp med verdiene fra $D.A$

Sikre kapasitet

- Dersom $D.n$ er *mindre enn* $|D.A|$ gjør vi *ingenting*
- Hvis ikke, så oppretter vi et nytt array med dobbelt så mye plass
  - Det nye arrayet fylles opp med verdiene fra $D.A$
- Til slutt setter vi $D.A$ til å peke på det nye arrayet

Sikre kapasitet

- Dersom $D.n$ er *mindre enn* $|D.A|$ gjør vi *ingenting*
- Hvis ikke, så oppretter vi et nytt array med dobbelt så mye plass
  - Det nye arrayet fylles opp med verdiene fra $D.A$
- Til slutt setter vi $D.A$ til å peke på det nye arrayet

Sikre kapasitet

- Dersom $D.n$ er *mindre enn* $|D.A|$ gjør vi *ingenting*
- Hvis ikke, så oppretter vi et nytt array med dobbelt så mye plass
  - Det nye arrayet fylles opp med verdiene fra $D.A$
- Til slutt setter vi $D.A$ til å peke på det nye arrayet

Algorithm: Doble kapasiteten til et dynamisk array ved behov

Input: Et dynamisk array D
Output: Et dynamisk array med plass til minst ett element til

```
1 Procedure EnsureCapacity(D)
```

Sikre kapasitet

- Dersom $D.n$ er *mindre enn* $|D.A|$ gjør vi *ingenting*
- Hvis ikke, så oppretter vi et nytt array med dobbelt så mye plass
  - Det nye arrayet fylles opp med verdiene fra $D.A$
- Til slutt setter vi $D.A$ til å peke på det nye arrayet

Algorithm: Doble kapasiteten til et dynamisk array ved behov

Input: Et dynamisk array D
Output: Et dynamisk array med plass til minst ett element til

```
1 Procedure EnsureCapacity(D)
2     if D.n < |D.A| then
3         return
```

Sikre kapasitet

- Dersom $D.n$ er *mindre enn* $|D.A|$ gjør vi *ingenting*
- Hvis ikke, så oppretter vi et nytt array med dobbelt så mye plass
  - Det nye arrayet fylles opp med verdiene fra $D.A$
- Til slutt setter vi $D.A$ til å peke på det nye arrayet

Algorithm: Doble kapasiteten til et dynamisk array ved behov

Input: Et dynamisk array D
Output: Et dynamisk array med plass til minst ett element til

```
1 Procedure EnsureCapacity(D)
2     if D.n < |D.A| then
3         return
4     A ← new array of size |D.A| · 2
5     for i ← 0 to D.n − 1 do
6         A[i] ← D.A[i]
```

Sikre kapasitet

- Dersom $D.n$ er *mindre enn* $|D.A|$ gjør vi *ingenting*
- Hvis ikke, så oppretter vi et nytt array med dobbelt så mye plass
  - Det nye arrayet fylles opp med verdiene fra $D.A$
- Til slutt setter vi $D.A$ til å peke på det nye arrayet

ALGORITHM: DOBLE KAPASITETEN TIL ET DYNAMISK ARRAY VED BEHOV

Input: Et dynamisk array D
Output: Et dynamisk array med plass til minst ett element til

```
1 Procedure EnsureCapacity(D)
2     if D.n < |D.A| then
3         return
4     A ← new array of size |D.A| · 2
5     for i ← 0 to D.n − 1 do
6         A[i] ← D.A[i]
7     D.A ← A
```

- Algoritmen er i $\mathcal{O}(1)$ hvis det er ledig kapasitet

Sikre kapasitet

- Dersom $D.n$ er *mindre enn* $|D.A|$ gjør vi *ingenting*
- Hvis ikke, så oppretter vi et nytt array med dobbelt så mye plass
  - Det nye arrayet fylles opp med verdiene fra $D.A$
- Til slutt setter vi $D.A$ til å peke på det nye arrayet

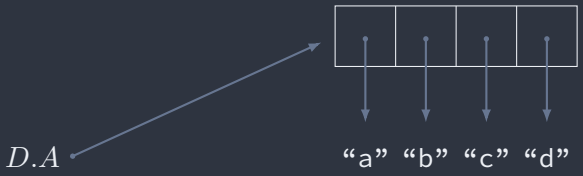
ALGORITHM: DOBLE KAPASITETEN TIL ET DYNAMISK ARRAY VED BEHOV

Input: Et dynamisk array D
Output: Et dynamisk array med plass til minst ett element til

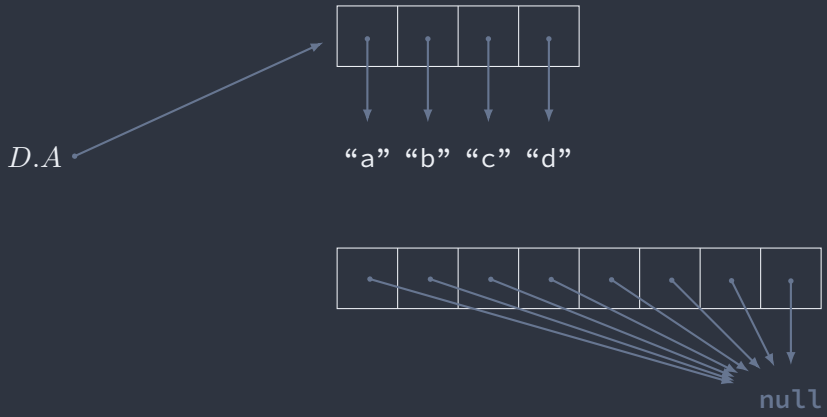
```
1 Procedure EnsureCapacity(D)
2     if D.n < |D.A| then
3         return
4     A ← new array of size |D.A| · 2
5     for i ← 0 to D.n − 1 do
6         A[i] ← D.A[i]
7     D.A ← A
```

- Algoritmen er i $\mathcal{O}(1)$ hvis det er ledig kapasitet
- Hvis ikke opprettes et nytt array og elementene kopieres fra det gamle til det nye i $\mathcal{O}(D.n)$ tid

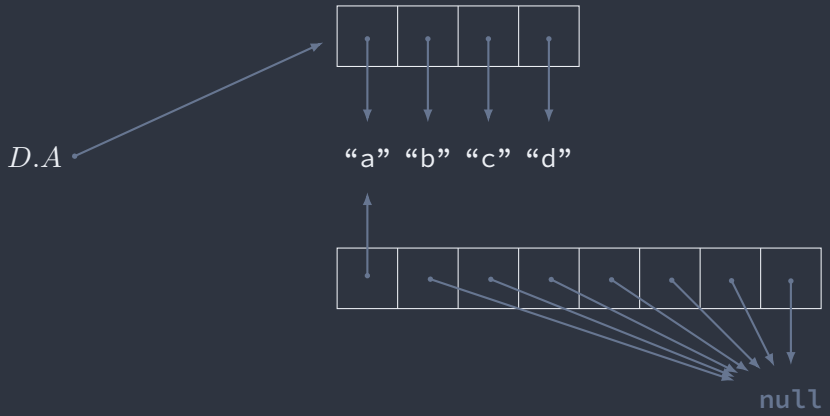
Sikre kapasitet (illustrasjon)



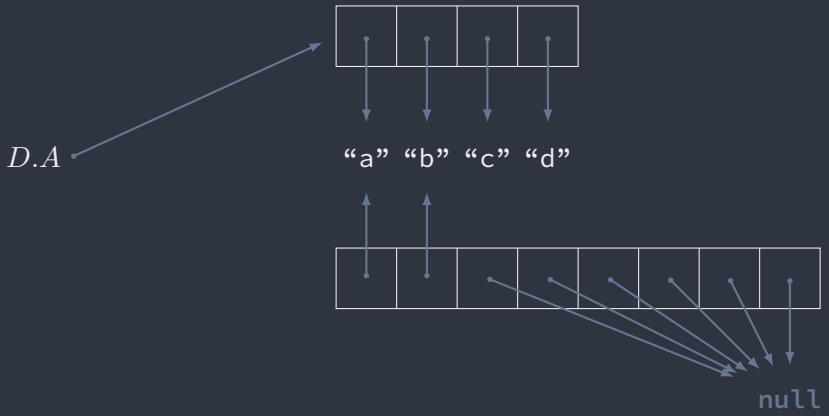
Sikre kapasitet (illustrasjon)



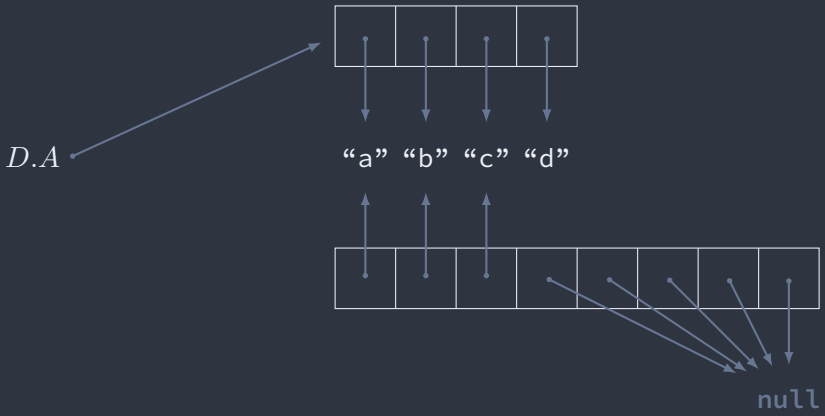
Sikre kapasitet (illustrasjon)



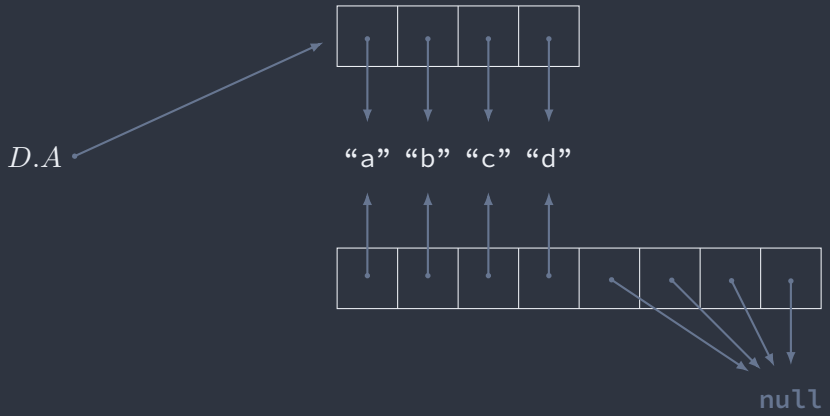
Sikre kapasitet (illustrasjon)



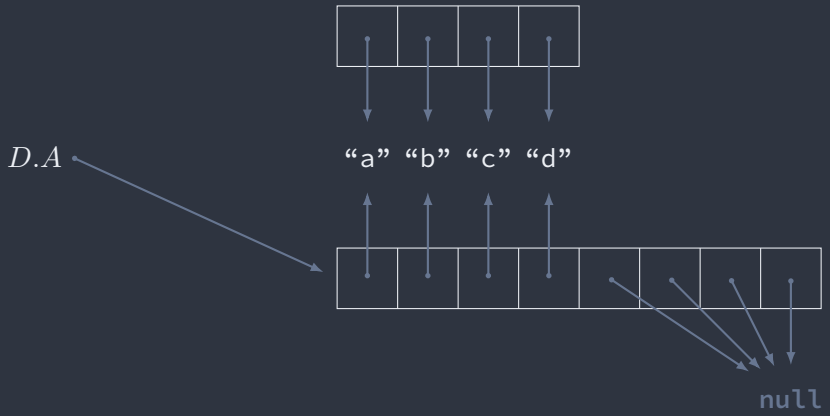
Sikre kapasitet (illustrasjon)



Sikre kapasitet (illustrasjon)



Sikre kapasitet (illustrasjon)



Sletting på slutten

- For å fjerne elementet på slutten må vi

Sletting på slutten

- For å fjerne elementet på slutten må vi
  - senke $D.n$, og

Sletting på slutten

- For å fjerne elementet på slutten må vi
  - senke $D.n$, og
  - sette elementet på posisjon $D.n$ til `null`

Sletting på slutten

- For å fjerne elementet på slutten må vi
  - senke $D.n$, og
  - sette elementet på posisjon $D.n$ til `null`
- Vi må anta at det dynamiske arrayet inneholder minst ett element

Sletting på slutten

- For å fjerne elementet på slutten må vi
  - senke $D.n$, og
  - sette elementet på posisjon $D.n$ til `null`
- Vi må anta at det dynamiske arrayet inneholder minst ett element

Sletting på slutten

- For å fjerne elementet på slutten må vi
  - senke $D.n$, og
  - sette elementet på posisjon $D.n$ til **`null`**
- Vi må anta at det dynamiske arrayet inneholder minst ett element

Algorithm: Sletting på slutten av et dynamisk array

`Input:` Et ikke-tomt dynamisk array D
`Output:` Det siste elementet fjernes og returneres

```
1 Procedure PopBack(D)
```

Sletting på slutten

- For å fjerne elementet på slutten må vi
  - senke $D.n$, og
  - sette elementet på posisjon $D.n$ til **`null`**
- Vi må anta at det dynamiske arrayet inneholder minst ett element

ALGORITHM: SLETTING PÅ SLUTTEN AV ET DYNAMISK ARRAY

`Input:` Et ikke-tomt dynamisk array D
`Output:` Det siste elementet fjernes og returneres

```
1 Procedure PopBack(D)
2     e ← D.A[D.n − 1]
```

Sletting på slutten

- For å fjerne elementet på slutten må vi
  - senke $D.n$, og
  - sette elementet på posisjon $D.n$ til `null`
- Vi må anta at det dynamiske arrayet inneholder minst ett element

Algorithm: Sletting på slutten av et dynamisk array

Input: Et ikke-tomt dynamisk array D
Output: Det siste elementet fjernes og returneres

```
1 Procedure PopBack(D)
2     e ← D.A[D.n − 1]
3     D.A[D.n − 1] ← null
4     D.n ← D.n − 1
```

Sletting på slutten

- For å fjerne elementet på slutten må vi
  - senke $D.n$, og
  - sette elementet på posisjon $D.n$ til `null`
- Vi må anta at det dynamiske arrayet inneholder minst ett element

Algorithm: Sletting på slutten av et dynamisk array

Input: Et ikke-tomt dynamisk array D
Output: Det siste elementet fjernes og returneres

```
1 Procedure PopBack(D)
2     e ← D.A[D.n − 1]
3     D.A[D.n − 1] ← null
4     D.n ← D.n − 1
5     return e
```

- Algoritmen er i $\mathcal{O}(1)$

Legg til på indeks

- Når vi skal legge til et element i et dynamisk array må vi først gjøre plass til elementet

Legg til på indeks

- Når vi skal legge til et element i et dynamisk array må vi først gjøre plass til elementet
- Legg til et element på plass i, må alle elementer fra posisjon i til $D.n - 1$ flyttes ett hakk til høyre

Legg til på indeks

- Når vi skal legge til et element i et dynamisk array må vi først gjøre plass til elementet
- Legg til et element på plass i, må alle elementer fra posisjon i til $D.n - 1$ flyttes ett hakk til høyre

Legg til på indeks

- Når vi skal legge til et element i et dynamisk array må vi først gjøre plass til elementet
- Legg til et element på plass i, må alle elementer fra posisjon i til $D.n - 1$ flyttes ett hakk til høyre

Algorithm: Sett inn i et dynamisk array på indeks

Input: Et dynamisk array D, en indeks i og et element e
Output: Et dynamisk array med e lagt til på indeks i

```
1 Procedure Add(D, i, e)
```

Legg til på indeks

- Når vi skal legge til et element i et dynamisk array må vi først gjøre plass til elementet
- Legg til et element på plass i, må alle elementer fra posisjon i til $D.n - 1$ flyttes ett hakk til høyre

Algorithm: Sett inn i et dynamisk array på indeks

Input: Et dynamisk array D, en indeks i og et element e
Output: Et dynamisk array med e lagt til på indeks i

```
1 Procedure Add(D, i, e)
2     EnsureCapacity(D)
```

Legg til på indeks

- Når vi skal legge til et element i et dynamisk array må vi først gjøre plass til elementet
- Legg til et element på plass i, må alle elementer fra posisjon i til $D.n - 1$ flyttes ett hakk til høyre

Algorithm: Sett inn i et dynamisk array på indeks

Input: Et dynamisk array D, en indeks i og et element e
Output: Et dynamisk array med e lagt til på indeks i

```
1 Procedure Add(D, i, e)
2     EnsureCapacity(D)
3     for j ← D.n − 1 down to i do
4         D.A[j + 1] ← D.A[j]
```

Legg til på indeks

- Når vi skal legge til et element i et dynamisk array må vi først gjøre plass til elementet
- Legg til et element på plass i, må alle elementer fra posisjon i til $D.n - 1$ flyttes ett hakk til høyre

Algorithm: Sett inn i et dynamisk array på indeks

Input: Et dynamisk array D, en indeks i og et element e
Output: Et dynamisk array med e lagt til på indeks i

```
1 Procedure Add(D, i, e)
2     EnsureCapacity(D)
3     for j ← D.n − 1 down to i do
4         D.A[j + 1] ← D.A[j]
5     D.A[i] ← e
6     D.n ← D.n + 1
```

- Algoritmen er i $\mathcal{O}(D.n)$

Legg til på indeks

- Når vi skal legge til et element i et dynamisk array må vi først gjøre plass til elementet
- Legg til et element på plass i, må alle elementer fra posisjon i til $D.n - 1$ flyttes ett hakk til høyre

Algorithm: Sett inn i et dynamisk array på indeks

Input: Et dynamisk array D, en indeks i og et element e
Output: Et dynamisk array med e lagt til på indeks i

```
1 Procedure Add(D, i, e)
2     EnsureCapacity(D)
3     for j ← D.n − 1 down to i do
4         D.A[j + 1] ← D.A[j]
5     D.A[i] ← e
6     D.n ← D.n + 1
```

- Algoritmen er i $\mathcal{O}(D.n)$
  - Når $i = 0$ gjøres det $D.n$ iterasjoner

Legg til på indeks

- Når vi skal legge til et element i et dynamisk array må vi først gjøre plass til elementet
- Legg til et element på plass i, må alle elementer fra posisjon i til $D.n - 1$ flyttes ett hakk til høyre

Algorithm: Sett inn i et dynamisk array på indeks

Input: Et dynamisk array D, en indeks i og et element e
Output: Et dynamisk array med e lagt til på indeks i

```
1 Procedure Add(D, i, e)
2     EnsureCapacity(D)
3     for j ← D.n − 1 down to i do
4         D.A[j + 1] ← D.A[j]
5     D.A[i] ← e
6     D.n ← D.n + 1
```

- Algoritmen er i $\mathcal{O}(D.n)$
  - Når $i = 0$ gjøres det $D.n$ iterasjoner
  - I tillegg kan `EnsureCapacity` føre til $D.n$ ytterligere iterasjoner

Legg til på indeks

- Når vi skal legge til et element i et dynamisk array må vi først gjøre plass til elementet
- Legg til et element på plass i, må alle elementer fra posisjon i til $D.n - 1$ flyttes ett hakk til høyre

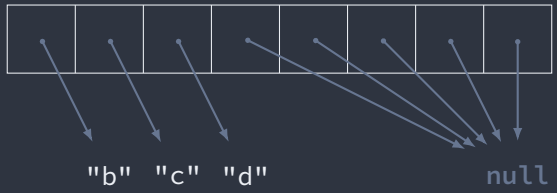
Algorithm: Sett inn i et dynamisk array på indeks

Input: Et dynamisk array D, en indeks i og et element e
Output: Et dynamisk array med e lagt til på indeks i

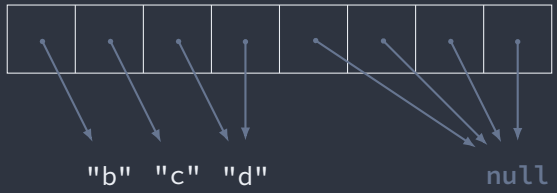
```
1 Procedure Add(D, i, e)
2     EnsureCapacity(D)
3     for j ← D.n − 1 down to i do
4         D.A[j + 1] ← D.A[j]
5     D.A[i] ← e
6     D.n ← D.n + 1
```

- Algoritmen er i $\mathcal{O}(D.n)$
  - Når $i = 0$ gjøres det $D.n$ iterasjoner
  - I tillegg kan `EnsureCapacity` føre til $D.n$ ytterligere iterasjoner
  - To lineærtidsoperasjoner etter hverandre gir fremdeles lineær kjøretidskompleksitet

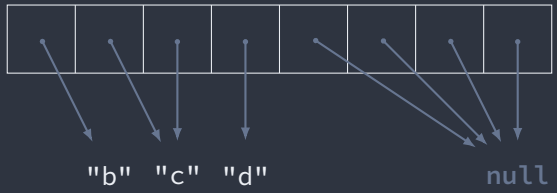
Legg inn først (illustrasjon)



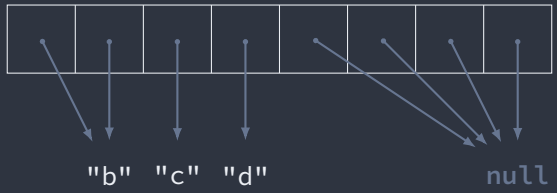
Legg inn først (illustrasjon)



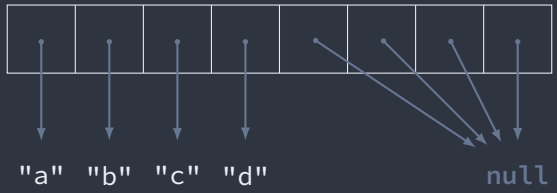
Legg inn først (illustrasjon)



Legg inn først (illustrasjon)



Legg inn først (illustrasjon)



Fjern på indeks

- Når vi fjerner et element på indeks i må vi flytte alle elementer etter i en posisjon tilbake

Fjern på indeks

- Når vi fjerner et element på indeks i må vi flytte alle elementer etter i en posisjon tilbake
- Vi må også huske å sette siste posisjon til `null`

Fjern på indeks

- Når vi fjerner et element på indeks i må vi flytte alle elementer etter i en posisjon tilbake
- Vi må også huske å sette siste posisjon til `null`

Fjern på indeks

- Når vi fjerner et element på indeks i må vi flytte alle elementer etter i en posisjon tilbake
- Vi må også huske å sette siste posisjon til **`null`**

Algorithm: Fjern fra et dynamisk array på indeks

`Input:` Et dynamisk array D og en indeks i
`Output:` Et dynamisk array med elementet på indeks i fjernet

```
1 Procedure Remove(D, i)
```

Fjern på indeks

- Når vi fjerner et element på indeks i må vi flytte alle elementer etter i en posisjon tilbake
- Vi må også huske å sette siste posisjon til **`null`**

Algorithm: Fjern fra et dynamisk array på indeks

Input: Et dynamisk array D og en indeks i
Output: Et dynamisk array med elementet på indeks i fjernet

```
1 Procedure Remove(D, i)
2     for j ← i to D.n − 2 do
3         D.A[j] ← D.A[j + 1]
```

Fjern på indeks

- Når vi fjerner et element på indeks i må vi flytte alle elementer etter i en posisjon tilbake
- Vi må også huske å sette siste posisjon til **`null`**

Algorithm: Fjern fra et dynamisk array på indeks

`Input:` Et dynamisk array D og en indeks i
`Output:` Et dynamisk array med elementet på indeks i fjernet

```
1 Procedure Remove(D, i)
2     for j ← i to D.n − 2 do
3         D.A[j] ← D.A[j + 1]
4     D.A[D.n − 1] ← null
5     D.n ← D.n − 1
```

- Algoritmen er i $\mathcal{O}(D.n)$

Fjern på indeks

- Når vi fjerner et element på indeks i må vi flytte alle elementer etter i en posisjon tilbake
- Vi må også huske å sette siste posisjon til **`null`**

ALGORITHM: FJERN FRA ET DYNAMISK ARRAY PÅ INDEKS

`Input:` Et dynamisk array D og en indeks i
`Output:` Et dynamisk array med elementet på indeks i fjernet

```
1 Procedure Remove(D, i)
2     for j ← i to D.n − 2 do
3         D.A[j] ← D.A[j + 1]
4     D.A[D.n − 1] ← null
5     D.n ← D.n − 1
```

- Algoritmen er i $\mathcal{O}(D.n)$
  - Siden $D.n - 1$ elementer flyttes innover når $i = 0$

Dynamiske arrayer *er* lister

Listeoperasjon	Implementasjon	$\mathcal{O}$
`Get`(D, i)	$D.A[i]$	$\mathcal{O}(1)$

Dynamiske arrayer *er* lister

Listeoperasjon	Implementasjon	$\mathcal{O}$
`Get`(D, i)	$D.A[i]$	$\mathcal{O}(1)$
`Set`(D, i, e)	$D.A[i] \leftarrow e$	$\mathcal{O}(1)$

Dynamiske arrayer *er* lister

Listeoperasjon	Implementasjon	$\mathcal{O}$
$\texttt{Get}(D, i)$	$D.A[i]$	$\mathcal{O}(1)$
$\texttt{Set}(D, i, e)$	$D.A[i] \leftarrow e$	$\mathcal{O}(1)$
$\texttt{Add}(D, i, e)$	$\texttt{Add}(D, i, e)$	$\mathcal{O}(D.n)$

Dynamiske arrayer *er* lister

Listeoperasjon	Implementasjon	$\mathcal{O}$
$\texttt{Get}(D, i)$	$D.A[i]$	$\mathcal{O}(1)$
$\texttt{Set}(D, i, e)$	$D.A[i] \leftarrow e$	$\mathcal{O}(1)$
$\texttt{Add}(D, i, e)$	$\texttt{Add}(D, i, e)$	$\mathcal{O}(D.n)$
$\texttt{Remove}(D, i)$	$\texttt{Remove}(D, i)$	$\mathcal{O}(D.n)$

- Her er oppslag konstant tid

Dynamiske arrayer *er* lister

Listeoperasjon	Implementasjon	$\mathcal{O}$
`Get`(D, i)	$D.A[i]$	$\mathcal{O}(1)$
`Set`(D, i, e)	$D.A[i] \leftarrow e$	$\mathcal{O}(1)$
`Add`(D, i, e)	`Add`(D, i, e)	$\mathcal{O}(D.n)$
`Remove`(D, i)	`Remove`(D, i)	$\mathcal{O}(D.n)$

- Her er oppslag konstant tid
- Endringer nær begynnelsen av arrayet forårsaker forflytning av alle elementene som gir lineær tid

Litt mer om kjøretidskompleksiteten til `PushBack`

- `PushBack` er $\mathcal{O}(D.n)$ i verste tilfelle, altså når kapasiteten må dobles

Litt mer om kjøretidskompleksiteten til `PushBack`

- `PushBack` er $\mathcal{O}(D.n)$ i verste tilfelle, altså når kapasiteten må dobles
- Anta at vi setter inn n elementer i et *tomt* array med n kall på `PushBack`

Litt mer om kjøretidskompleksiteten til `PushBack`

- `PushBack` er $\mathcal{O}(D.n)$ i verste tilfelle, altså når kapasiteten må dobles
- Anta at vi setter inn n elementer i et *tomt* array med n kall på `PushBack`
  - La oss si størrelsen dobles når arrayet inneholder $1, 2, 4, 8, \ldots$ elementer

Litt mer om kjøretidskompleksiteten til `PushBack`

- `PushBack` er $\mathcal{O}(D.n)$ i verste tilfelle, altså når kapasiteten må dobles
- Anta at vi setter inn n elementer i et *tomt* array med n kall på `PushBack`
  - La oss si størrelsen dobles når arrayet inneholder $1, 2, 4, 8, \ldots$ elementer
  - Til sammen kopieres $1 + 2 + 4 + \cdots + n < 2 \cdot n$ elementer

Litt mer om kjøretidskompleksiteten til `PushBack`

- `PushBack` er $\mathcal{O}(D.n)$ i verste tilfelle, altså når kapasiteten må dobles
- Anta at vi setter inn n elementer i et *tomt* array med n kall på `PushBack`
  - La oss si størrelsen dobles når arrayet inneholder $1, 2, 4, 8, \ldots$ elementer
  - Til sammen kopieres $1 + 2 + 4 + \cdots + n < 2 \cdot n$ elementer
- Altså koster *alle* de n innsettingene $\mathcal{O}(n)$ *til sammen*

Litt mer om kjøretidskompleksiteten til `PushBack`

- `PushBack` er $\mathcal{O}(D.n)$ i verste tilfelle, altså når kapasiteten må dobles
- Anta at vi setter inn n elementer i et *tomt* array med n kall på `PushBack`
  - La oss si størrelsen dobles når arrayet inneholder $1, 2, 4, 8, \ldots$ elementer
  - Til sammen kopieres $1 + 2 + 4 + \cdots + n < 2 \cdot n$ elementer
- Altså koster *alle* de n innsettingene $\mathcal{O}(n)$ *til sammen*
  - Det vil si $\mathcal{O}(1)$ per innsetting *i snitt*

Litt mer om kjøretidskompleksiteten til `PushBack`

- `PushBack` er $\mathcal{O}(D.n)$ i verste tilfelle, altså når kapasiteten må dobles
- Anta at vi setter inn n elementer i et *tomt* array med n kall på `PushBack`
  - La oss si størrelsen dobles når arrayet inneholder $1, 2, 4, 8, \ldots$ elementer
  - Til sammen kopieres $1 + 2 + 4 + \cdots + n < 2 \cdot n$ elementer
- Altså koster *alle* de n innsettingene $\mathcal{O}(n)$ *til sammen*
  - Det vil si $\mathcal{O}(1)$ per innsetting *i snitt*
- Når vi ser en sekvens av operasjoner under ett, kaller vi det en *amortisert* kjøretidsanalyse

Litt mer om kjøretidskompleksiteten til `PushBack`

- `PushBack` er $\mathcal{O}(D.n)$ i verste tilfelle, altså når kapasiteten må dobles
- Anta at vi setter inn n elementer i et *tomt* array med n kall på `PushBack`
  - La oss si størrelsen dobles når arrayet inneholder $1, 2, 4, 8, \ldots$ elementer
  - Til sammen kopieres $1 + 2 + 4 + \cdots + n < 2 \cdot n$ elementer
- Altså koster *alle* de n innsettingene $\mathcal{O}(n)$ *til sammen*
  - Det vil si $\mathcal{O}(1)$ per innsetting *i snitt*
- Når vi ser en sekvens av operasjoner under ett, kaller vi det en *amortisert* kjøretidsanalyse
  - Å gjøre slike amortiserte kjøretidsanalyser er ikke pensum i IN2010

Litt mer om kjøretidskompleksiteten til `PushBack`

- `PushBack` er $\mathcal{O}(D.n)$ i verste tilfelle, altså når kapasiteten må dobles
- Anta at vi setter inn n elementer i et *tomt* array med n kall på `PushBack`
  - La oss si størrelsen dobles når arrayet inneholder $1, 2, 4, 8, \ldots$ elementer
  - Til sammen kopieres $1 + 2 + 4 + \cdots + n < 2 \cdot n$ elementer
- Altså koster *alle* de n innsettingene $\mathcal{O}(n)$ *til sammen*
  - Det vil si $\mathcal{O}(1)$ per innsetting *i snitt*
- Når vi ser en sekvens av operasjoner under ett, kaller vi det en *amortisert* kjøretidsanalyse
  - Å gjøre slike amortiserte kjøretidsanalyser er ikke pensum i IN2010
  - Men vi skal vite hva det betyr

Litt mer om kjøretidskompleksiteten til `PushBack`

- `PushBack` er $\mathcal{O}(D.n)$ i verste tilfelle, altså når kapasiteten må dobles
- Anta at vi setter inn n elementer i et *tomt* array med n kall på `PushBack`
  - La oss si størrelsen dobles når arrayet inneholder $1, 2, 4, 8, \ldots$ elementer
  - Til sammen kopieres $1 + 2 + 4 + \cdots + n < 2 \cdot n$ elementer
- Altså koster *alle* de n innsettingene $\mathcal{O}(n)$ *til sammen*
  - Det vil si $\mathcal{O}(1)$ per innsetting *i snitt*
- Når vi ser en sekvens av operasjoner under ett, kaller vi det en *amortisert* kjøretidsanalyse
  - Å gjøre slike amortiserte kjøretidsanalyser er ikke pensum i IN2010
  - Men vi skal vite hva det betyr
  - Vi kommer tilbake til det senere i semesteret når vi snakker om *hashing*