IN2040: Funksjonell Programmering

Strømmer og utsatt evaluering

Martin Steffen

Universitetet i Oslo

Uke 9 (16. 10. 2023)



Forrige forelesning

- Nok en ny abstrakt muterbar datatype basert på lister: tabeller
- Mer om (prosedyre)navn, bindinger, og verditilordning
- Memoisering
- (+ prikk-notasjon + par med mutatorer)



I dag

- Anonym rekursjon
- Repetisjon: Sekvensoperasjoner
- Strømmer
- Realisering av data ved behov
- Uendelige datastrukturer
- Utsatt evaluering



Prosedyrenavn: Rekursjon med anonyme prosedyrer



```
? (define fac
    (lambda (n)
      (if (= n 1)
          1
          (* n (fac (- n 1))))))

? (fac 5) → 120
```

Prosedyrenavn: Rekursjon med anonyme prosedyrer



```
? (define fac
    (lambda (n)
      (if (= n 1)
          1
          (* n (fac (- n 1))))))

? (fac 5) → 120
```

- Rekursjon: selv-referanse.
- Er det mulig å utføre rekursjon med kun anonyme prosedyrer?
- Kan vi implementere `fac` uten rekursive kall? (Se SICP-oppgave 4.21.)

Rekursjon med anonyme prosedyrer

- fakultet bare med `lambda` og uten `define`[1]

[1] og uten `while` osv.

Rekursjon med anonyme prosedyrer

- fakultet bare med `lambda` og uten `define`[1]

utgangspunkt: anonym prosedyre, med samme kroppen som `fac`

```
?
   (lambda (n)
     (if (= n 1)
         1
         (* n (fac (- n 1)))))
   5
→ 120
```

[1] og uten `while` osv.

Rekursjon med anonyme prosedyrer

- fakultet bare med `lambda` og uten `define`[1]

`fac` er fri/udefinert!

```
?
   (lambda (n)
     (if (= n 1)
         1
         (* n (fac (- n 1)))))
   5
→ 120
```

[1] og uten `while` osv.

Rekursjon med anonyme prosedyrer

- fakultet bare med `lambda` og uten `define`[1]

gjør `fac` som parameter

```
?
   (lambda (fac n)
     (if (= n 1)
         1
         (* n (fac (- n 1)))))
   5
→ 120
```

[1] og uten `while` osv.

Rekursjon med anonyme prosedyrer

- fakultet bare med `lambda` og uten `define`[1]

intensjon: `(lambda (fac n) ...)` er det samme som parameter `"fac"`

```
?
   (lambda (fac n)
     (if (= n 1)
         1
         (* n (fac (- n 1)))))
   5
→ 120
```

[1] og uten `while` osv.

Rekursjon med anonyme prosedyrer

- fakultet bare med `lambda` og uten `define`[1]

problem: `(lambda (fac n) ...)` tar 2 argumenter

```
?
   (lambda (fac n)
     (if (= n 1)
         1
         (* n (fac (- n 1)))))
   5
→ 120
```

[1] og uten `while` osv.

Rekursjon med anonyme prosedyrer

- fakultet bare med `lambda` og uten `define`[1]

enkelt å reparere. (se: selvanvendelse av parameter `fac`)

```
?
   (lambda (fac n)
     (if (= n 1)
         1
         (* n (fac fac (- n 1)))))
   5
→ 120
```

[1] og uten `while` osv.

Rekursjon med anonyme prosedyrer

- fakultet bare med `lambda` og uten `define`[1]

enkelt å reparere. (se: selvanvendelse av parameter `fac`)

```
?
   (lambda (fac n)
     (if (= n 1)
         1
         (* n (fac fac (- n 1)))))
   5
→ 120
```

[1] og uten `while` osv.

Rekursjon med anonyme prosedyrer

- fakultet bare med `lambda` og uten `define`[1]

Hvordan passerer man hele lambda-uttryk til seg selv?

```
?
   (lambda (fac n)
     (if (= n 1)
         1
         (* n (fac fac (- n 1)))))
   5
→ 120
```

[1] og uten `while` osv.

Rekursjon med anonyme prosedyrer

- fakultet bare med `lambda` og uten `define`[1]

Enkelt: nok en anonym prosedyre

```
? ((lambda (proc n)
     (proc proc n))
   (lambda (fac n)
     (if (= n 1)
         1
         (* n (fac fac (- n 1)))))
   5)
→ 120
```

[1] og uten `while` osv.

Rekursjon med anonyme prosedyrer

- fakultet bare med `lambda` og uten `define`[1]

```
? ((lambda (proc n)
     (proc proc n))
   (lambda (fac n)
     (if (= n 1)
         1
         (* n (fac fac (- n 1)))))
   5)
→ 120
```

- Merk: hvis vi er nøyaktik har vi ikke definert faktultetsfunkjon, men et kall av fakultet med en argument 5
- enkelt å generalisere
- mer komplisert: generalisere selvanvendelse for vilkårlige rekursive funksjoner ⇒ "Y-kombinator"

[1] og uten `while` osv.

Repetisjon: Sekvensoperasjoner

- Vi har tidligere jobbet mye med sekvensoperasjoner definert for lister.
- F.eks. `map`, `reduce` (accumulate), `filter`, m.fl.

```
(define (reduce proc init items)
  (if (null? items)
      init
      (proc (car items)
            (reduce proc init (cdr items)))))

? (reduce * 1 '(2 2 2)) → 8
```

Repetisjon: Sekvensoperasjoner

- Vi har tidligere jobbet mye med sekvensoperasjoner definert for lister.
- F.eks. `map`, `reduce` (accumulate), `filter`, m.fl.

```
(define (reduce proc init items)
  (if (null? items)
      init
      (proc (car items)
            (reduce proc init (cdr items)))))

? (reduce * 1 '(2 2 2)) → 8
```

```
(define (interval low high)
  (if (> low high)
      '()
      (cons low (interval (+ low 1) high))))

? (interval 0 5) → (0 1 2 3 4 5)
```

Repetisjon: Sekvensoperasjoner

- Vi har tidligere jobbet mye med sekvensoperasjoner definert for lister.
- F.eks. `map`, `reduce` (accumulate), `filter`, m.fl.

```
(define (reduce proc init items)
  (if (null? items)
      init
      (proc (car items)
            (reduce proc init (cdr items)))))

? (reduce * 1 '(2 2 2)) → 8
```

```
(define (interval low high)
  (if (> low high)
      '()
      (cons low (interval (+ low 1) high))))

? (interval 0 5) → (0 1 2 3 4 5)

? (reduce + 0 (interval 0 5)) → 15
```

Inkrementell beregning vs sekvensoperasjoner

```
(define (mystery low high)
  (define (recurse count sum)
    (cond ((> count high) sum)
          ((prime? count)  ; anta at prime? er gitt
           (recurse (+ count 1) (+ count sum)))
          (else (recurse (+ count 1) sum))))
  (recurse low 0))
```

```
? (mystery 1 5) →
```

Inkrementell beregning vs sekvensoperasjoner

```
(define (sum-primes low high)
  (define (recurse count sum)
    (cond ((> count high) sum)
          ((prime? count)  ; anta at prime? er gitt
           (recurse (+ count 1) (+ count sum)))
          (else (recurse (+ count 1) sum))))
  (recurse low 0))
```

```
? (sum-primes 1 5) → 10
```

Inkrementell beregning vs sekvensoperasjoner



```
(define (sum-primes low high)
  (define (recurse count sum)
    (cond ((> count high) sum)
          ((prime? count)  ; anta at prime? er gitt
           (recurse (+ count 1) (+ count sum)))
          (else (recurse (+ count 1) sum))))
  (recurse low 0))
```

```
? (sum-primes 1 5) → 10
```

```
(define (sum-primes low high)
  (reduce + 0 (filter prime? (interval low high))))
```

- Å uttrykke beregninger som manipulasjon av sekvenser kan være elegant, konsist og modulært, sammenliknet med 'inkrementell' kode.
- Men finnes det relevante forskjeller i tids- eller plasskompleksitet?

Begrensninger ved ‘sekvenstilnærmingen’

- I visse tilfeller kan teknikken bli veldig (og unødvendig) lite effektiv:

```
? (car (cdr (filter prime? (interval 100 100000)))) → 103
```

Begrensninger ved ‘sekvenstilnærmingen’

- I visse tilfeller kan teknikken bli veldig (og unødvendig) lite effektiv:

```
? (car (cdr (filter prime? (interval 100 100000)))) → 103
```

- Det beregnes én lang sekvens, så én til, men bare 4 elementer ‘brukes’.

Begrensninger ved ‘sekvenstilnærmingen’

- I visse tilfeller kan teknikken bli veldig (og unødvendig) lite effektiv:

```
? (car (cdr (filter prime? (interval 100 100000)))) → 103
```

- Det beregnes én lang sekvens, så én til, men bare 4 elementer ‘brukes’.
- Med en mer tradisjonell programmeringsstil ville vi gjort beregningen inkrementelt, med de ulike operasjonene sammenvevd.
- (F.eks ved å iterativt teste en tellervariabel, og returnere så fort vi hadde kommet til det andre primtallet.)

Begrensninger ved ‘sekvenstilnærmingen’

- I visse tilfeller kan teknikken bli veldig (og unødvendig) lite effektiv:

```
? (car (cdr (filter prime? (interval 100 100000)))) → 103
```

- Det beregnes én lang sekvens, så én til, men bare 4 elementer ‘brukes’.
- Med en mer tradisjonell programmeringsstil ville vi gjort beregningen inkrementelt, med de ulike operasjonene sammenvevd.
- (F.eks ved å iterativt teste en tellervariabel, og returnere så fort vi hadde kommet til det andre primtallet.)
- Kan vi beholde den elegante strukturen ved sekvensoperasjonene uten å miste effektiviteten ved inkrementelle beregninger?
- Løsningen: strømmer.

Strømmer

```
? (stream-car
    (stream-cdr
      (stream-filter prime? (stream-interval 100 100000))))
→ 103
```

Strømmer

```
? (stream-car
    (stream-cdr
      (stream-filter prime? (stream-interval 100 100000))))
→ 103
```

Strømmer

```
? (stream-car
    (stream-cdr
      (stream-filter prime? (stream-interval 100 100000))))
→ 103
```

- Ideen: elementene genereres ikke før vi ber om å få se dem.
- En strøm er altså en sekvens som konstrueres mens den brukes, men lar oss late som om hele sekvensen allerede finnes.
- Først beskrevet av Peter Landin i 1965.
- Utsatt evaluering (*delayed evaluation*).



Strømmer: Grensesnittet

- En strøm skal ha en 'kontrakt' som ligner på vanlige lister:

```
(stream-car (cons-stream x y))   ≡   x
(stream-cdr (cons-stream x y))   ≡   y
```

- Har også konstanten `the-empty-stream` og predikatet `stream-null?`.
- (For øyeblikket skal vi bare late som om disse var innebygget i Scheme.)
- På overflaten kan vi bruke strømmer som om de var lister. . .
- men `cdr`-verdien av en strøm evalueres ikke ved `cons-stream`, men først ved `stream-cdr`!

cons og cons-stream

- `cons-stream` gir et 'løfte' om at `cdr`-verdien kan beregnes ved behov.
- Først når vi bruker `stream-cdr` lages elementet (løftet innfris).
- Etterspørselen styrer beregningstidspunkt (*computing on demand*).



cons og cons-stream

- `cons-stream` gir et 'løfte' om at cdr-verdien kan beregnes ved behov.
- Først når vi bruker `stream-cdr` lages elementet (løftet innfris).
- Etterspørselen styrer beregningstidspunkt (*computing on demand*).



```
? (cons (+ 1 2)
        (+ 3 4))
```

→

cons og cons-stream

- `cons-stream` gir et 'løfte' om at cdr-verdien kan beregnes ved behov.
- Først når vi bruker `stream-cdr` lages elementet (løftet innfris).
- Etterspørselen styrer beregningstidspunkt (*computing on demand*).



```
? (cons (+ 1 2)
        (+ 3 4))
→ (3 . 7)
```

cons og cons-stream

- `cons-stream` gir et 'løfte' om at cdr-verdien kan beregnes ved behov.
- Først når vi bruker `stream-cdr` lages elementet (løftet innfris).
- Etterspørselen styrer beregningstidspunkt (*computing on demand*).



```
? (cons (+ 1 2)
        (+ 3 4))
→ (3 . 7)

? (cons-stream (+ 1 2)
               (+ 3 4))
→
```

cons og cons-stream

- `cons-stream` gir et 'løfte' om at cdr-verdien kan beregnes ved behov.
- Først når vi bruker `stream-cdr` lages elementet (løftet innfris).
- Etterspørselen styrer beregningstidspunkt (*computing on demand*).



```
? (cons (+ 1 2)
        (+ 3 4))
→ (3 . 7)

? (cons-stream (+ 1 2)
               (+ 3 4))
→ (3 . #<promise>)
```

cons og cons-stream

- `cons-stream` gir et 'løfte' om at cdr-verdien kan beregnes ved behov.
- Først når vi bruker `stream-cdr` lages elementet (løftet innfris).
- Etterspørselen styrer beregningstidspunkt (*computing on demand*).



```
? (cons (+ 1 2)
        (+ 3 4))
→ (3 . 7)

? (cons-stream (+ 1 2)
               (+ 3 4))
→ (3 . #<promise>)

? (stream-cdr
    (cons-stream (+ 1 2)
                 (+ 3 4)))
→
```

cons og cons-stream

- `cons-stream` gir et 'løfte' om at cdr-verdien kan beregnes ved behov.
- Først når vi bruker `stream-cdr` lages elementet (løftet innfris).
- Etterspørselen styrer beregningstidspunkt (*computing on demand*).



```
? (cons (+ 1 2)
        (+ 3 4))
→ (3 . 7)

? (cons-stream (+ 1 2)
               (+ 3 4))
→ (3 . #<promise>)

? (stream-cdr
    (cons-stream (+ 1 2)
                 (+ 3 4)))
→ 7
```

Sekvensoperasjoner for strømmer

- Liknende grensesnitt som lister, så listeoperasjonene kan lett tilpasses:

```
(define (filter pred seq)
  (cond ((null? seq) '())
        ((pred (car seq))
         (cons (car seq)
               (filter pred (cdr seq))))
        (else (filter pred (cdr seq)))))
```

Sekvensoperasjoner for strømmer

- Liknende grensesnitt som lister, så listeoperasjonene kan lett tilpasses:

```
(define (filter pred seq)
  (cond ((null? seq) '())
        ((pred (car seq))
         (cons (car seq)
               (filter pred (cdr seq))))
        (else (filter pred (cdr seq)))))
```

Sekvensoperasjoner for strømmer

- Liknende grensesnitt som lister, så listeoperasjonene kan lett tilpasses:

```
(define (filter pred seq)
  (cond ((null? seq) '())
        ((pred (car seq))
         (cons (car seq)
               (filter pred (cdr seq))))
        (else (filter pred (cdr seq)))))


(define (stream-filter pred seq)
  (cond ((stream-null? seq) the-empty-stream)
        ((pred (stream-car seq))
         (cons-stream
          (stream-car seq)
          (stream-filter pred (stream-cdr seq))))
        (else (stream-filter pred (stream-cdr seq)))))
```

Eksempel med `interval`

```
(define (interval low high)
  (if (> low high)
      '()
      (cons low (interval (+ low 1) high))))
```

Eksempel med interval

```
(define (interval low high)
  (if (> low high)
      '()
      (cons low (interval (+ low 1) high))))

(define (stream-interval low high)
  (if (> low high)
    the-empty-stream
    (cons-stream low (stream-interval (+ low 1) high))))
```

Eksempel med `interval`

```
(define (interval low high)
  (if (> low high)
      '()
      (cons low (interval (+ low 1) high))))

(define (stream-interval low high)
  (if (> low high)
    the-empty-stream
    (cons-stream low (stream-interval (+ low 1) high))))
```

- En strøm utsetter evalueringen av sin `cdr` inntil den blir etterspurt.

Eksempel med `interval`

```
(define (interval low high)
  (if (> low high)
      '()
      (cons low (interval (+ low 1) high))))

(define (stream-interval low high)
  (if (> low high)
    the-empty-stream
    (cons-stream low (stream-interval (+ low 1) high))))
```

- En strøm utsetter evalueringen av sin `cdr` inntil den blir etterspurt.

```
? (interval 1 10) → (1 2 3 4 5 6 7 8 9 10)
```

Eksempel med `interval`

```
(define (interval low high)
  (if (> low high)
      '()
      (cons low (interval (+ low 1) high))))

(define (stream-interval low high)
  (if (> low high)
    the-empty-stream
    (cons-stream low (stream-interval (+ low 1) high))))
```

- En strøm utsetter evalueringen av sin `cdr` inntil den blir etterspurt.

```
? (interval 1 10) → (1 2 3 4 5 6 7 8 9 10)

? (stream-interval 1 10) →
```

Eksempel med interval

```
(define (interval low high)
  (if (> low high)
      '()
      (cons low (interval (+ low 1) high))))

(define (stream-interval low high)
  (if (> low high)
    the-empty-stream
    (cons-stream low (stream-interval (+ low 1) high))))
```

- En strøm utsetter evalueringen av sin `cdr` inntil den blir etterspurt.

```
? (interval 1 10) → (1 2 3 4 5 6 7 8 9 10)

? (stream-interval 1 10) →  (1 . #<promise>)
```

Eksempel med interval

```
(define (interval low high)
  (if (> low high)
      '()
      (cons low (interval (+ low 1) high))))

(define (stream-interval low high)
  (if (> low high)
    the-empty-stream
    (cons-stream low (stream-interval (+ low 1) high))))
```

- En strøm utsetter evalueringen av sin `cdr` inntil den blir etterspurt.

```
? (interval 1 10) → (1 2 3 4 5 6 7 8 9 10)

? (stream-interval 1 10) →  (1 . #<promise>)

? (stream-cdr (stream-interval 1 10)) →
```

Eksempel med interval

```
(define (interval low high)
  (if (> low high)
      '()
      (cons low (interval (+ low 1) high))))

(define (stream-interval low high)
  (if (> low high)
    the-empty-stream
    (cons-stream low (stream-interval (+ low 1) high))))
```

- En strøm utsetter evalueringen av sin cdr inntil den blir etterspurt.

```
? (interval 1 10) → (1 2 3 4 5 6 7 8 9 10)

? (stream-interval 1 10) →  (1 . #<promise>)

? (stream-cdr (stream-interval 1 10)) →  (2 . #<promise>)
```

Tilbake til primtalleksemplet

```
? (stream-car
    (stream-cdr
      (stream-filter prime? (stream-interval 100 100000))))
→ 103

? (car (cdr (filter prime? (interval 100 100000))))
→ 103
```

- Begge uttrykkene returnerer det andre primtallet større enn 100.
- Listeversjonen kaller predikatet ca 100.000 ganger og lager ca 110.000 cons-celler.
- Strømversjonen kaller predikatet 4 ganger og lager 6 cons celler.

Evalueringsstrategier (repetisjon fra 2. forelesning)

Applicative-order evaluation

- Evaluer argumentene: kall prosedyre på verdiene.
- Standard i Scheme.
- Andre navn: *strict* / *eager evaluation*, *call-by-value*.

Evalueringsstrategier (repetisjon fra 2. forelesning)



Applicative-order evaluation

- Evaluer argumentene: kall prosedyre på verdiene.
- Standard i Scheme.
- Andre navn: *strict / eager evaluation*, *call-by-value*.

Normal-order evaluation

- Prosedyren kalles med argument*uttrykkene*: evalueres først ved behov.
- Andre navn: *non-strict / lazy evaluation*, *call-by-name*, *call-by-need*.

- Gir samme resultat så lenge vi holder oss til ren funksjonell kode (og endelige datastrukturer og endelige beregninger), men kan gi forskjeller i effektivitet.

Evalueringsstrategier (repetisjon fra 2. forelesning)

Applicative-order evaluation

- Evaluer argumentene: kall prosedyre på verdiene.
- Standard i Scheme.
- Andre navn: *strict* / *eager evaluation*, *call-by-value*.

Normal-order evaluation

- Prosedyren kalles med argument*uttrykkene*: evalueres først ved behov.
- Andre navn: *non-strict* / *lazy evaluation*, *call-by-name*, *call-by-need*.

- Gir samme resultat så lenge vi holder oss til ren funksjonell kode (og endelige datastrukturer og endelige beregninger), men kan gi forskjeller i effektivitet.
- `delay` gir oss kontroll til å velge selv når uttrykk evalueres.
- Skal se at den kan brukes for å implementere `cons-stream`.

Utsatt evaluering med `delay`

- `delay` er en *special form* som tar et uttrykk som argument og returnerer et 'løfte' om at uttrykket kan evalueres senere.
- Prosedyren `force` lar oss innfri løftet: evaluerer uttrykk som har blitt 'satt på vent' med `delay`.

```
? (define foo (* 21 2))

? foo →
```

Utsatt evaluering med `delay`

- `delay` er en *special form* som tar et uttrykk som argument og returnerer et 'løfte' om at uttrykket kan evalueres senere.
- Prosedyren `force` lar oss innfri løftet: evaluerer uttrykk som har blitt 'satt på vent' med `delay`.

```
? (define foo (* 21 2))

? foo →  42
```

Utsatt evaluering med `delay`

- `delay` er en *special form* som tar et uttrykk som argument og returnerer et 'løfte' om at uttrykket kan evalueres senere.
- Prosedyren `force` lar oss innfri løftet: evaluerer uttrykk som har blitt 'satt på vent' med `delay`.

```
? (define foo (* 21 2))

? foo →  42

? (define bar (delay (* 21 2)))

? bar →
```

Utsatt evaluering med `delay`



- `delay` er en *special form* som tar et uttrykk som argument og returnerer et 'løfte' om at uttrykket kan evalueres senere.
- Prosedyren `force` lar oss innfri løftet: evaluerer uttrykk som har blitt 'satt på vent' med `delay`.

```
? (define foo (* 21 2))

? foo →  42

? (define bar (delay (* 21 2)))

? bar →  #<promise>
```

Utsatt evaluering med `delay`



- `delay` er en *special form* som tar et uttrykk som argument og returnerer et 'løfte' om at uttrykket kan evalueres senere.
- Prosedyren `force` lar oss innfri løftet: evaluerer uttrykk som har blitt 'satt på vent' med `delay`.

```
? (define foo (* 21 2))

? foo →  42

? (define bar (delay (* 21 2)))

? bar →  #<promise>

? (force bar) →  42
```

Å "implementere" strømmer i Scheme



- `cons-stream` en special form som bruker `delay` på `cdr`-argumentet:

```
(cons-stream x y)  ≡  (cons x (delay y))
```

Å "implementere" strømmer i Scheme



- `cons-stream` en special form som bruker `delay` på `cdr`-argumentet:

```
(cons-stream x y)  ≡  (cons x (delay y))
```

- Hvorfor må `cons-stream` være en *special form* (ikke vanlig prosedyre)?

Å "implementere" strømmer i Scheme



- `cons-stream` en special form som bruker `delay` på `cdr`-argumentet:

```
(cons-stream x y)  ≡  (cons x (delay y))
```

- Hvorfor må `cons-stream` være en *special form* (ikke vanlig prosedyre)?
- Resten av strømgrensesnittet kan realiseres som vanlige prosedyrer:

```
(define (stream-car stream)
  (car stream))
```

Å "implementere" strømmer i Scheme



- `cons-stream` en special form som bruker `delay` på `cdr`-argumentet:

```
(cons-stream x y)  ≡  (cons x (delay y))
```

- Hvorfor må `cons-stream` være en *special form* (ikke vanlig prosedyre)?
- Resten av strømgrensesnittet kan realiseres som vanlige prosedyrer:

```
(define (stream-car stream)
  (car stream))

(define (stream-cdr stream)
  ...
```

Å "implementere" strømmer i Scheme



- `cons-stream` en special form som bruker `delay` på `cdr`-argumentet:

```
(cons-stream x y)  ≡  (cons x (delay y))
```

- Hvorfor må `cons-stream` være en *special form* (ikke vanlig prosedyre)?
- Resten av strømgrensesnittet kan realiseres som vanlige prosedyrer:

```
(define (stream-car stream)
  (car stream))

(define (stream-cdr stream)
  (force (cdr stream)))
```

Å "implementere" strømmer i Scheme



- `cons-stream` en special form som bruker `delay` på `cdr`-argumentet:

```
(cons-stream x y)  ≡  (cons x (delay y))
```

- Hvorfor må `cons-stream` være en *special form* (ikke vanlig prosedyre)?
- Resten av strømgrensesnittet kan realiseres som vanlige prosedyrer:

```
(define (stream-car stream)
  (car stream))

(define (stream-cdr stream)
  (force (cdr stream)))

(define the-empty-stream '())
```

Å "implementere" strømmer i Scheme



- `cons-stream` en special form som bruker `delay` på `cdr`-argumentet:

```
(cons-stream x y)  ≡  (cons x (delay y))
```

- Hvorfor må `cons-stream` være en *special form* (ikke vanlig prosedyre)?
- Resten av strømgrensesnittet kan realiseres som vanlige prosedyrer:

```
(define (stream-car stream)
  (car stream))

(define (stream-cdr stream)
  (force (cdr stream)))

(define the-empty-stream '())

(define (stream-null? stream)
  ...
```

Å "implementere" strømmer i Scheme



- `cons-stream` en special form som bruker `delay` på `cdr`-argumentet:

```
(cons-stream x y)  ≡  (cons x (delay y))
```

- Hvorfor må `cons-stream` være en *special form* (ikke vanlig prosedyre)?
- Resten av strømgrensesnittet kan realiseres som vanlige prosedyrer:

```
(define (stream-car stream)
  (car stream))

(define (stream-cdr stream)
  (force (cdr stream)))

(define the-empty-stream '())

(define (stream-null? stream)
  (null? stream))
```

Hvordan "så" implementere `delay` og `force`?



- `delay` og `force` er innebygd i Scheme, men det kan være opplysende å reflektere rundt hvordan vi kunne definert dem selv.

Hvordan "så" implementere `delay` og `force`?



- `delay` og `force` er innebygd i Scheme, men det kan være opplysende å reflektere rundt hvordan vi kunne definert dem selv.

Hva skjer?

```
(lambda (x) (display (+ x 2))) ;; -> ??
```

Hvordan "så" implementere `delay` og `force`?

- `delay` og `force` er innebygd i Scheme, men det kan være opplysende å reflektere rundt hvordan vi kunne definert dem selv.

Hva skjer?

```
(lambda (x) (display (+ 1 2))) ;; -> ??
```

Hvordan "så" implementere `delay` og `force`?

- `delay` og `force` er innebygd i Scheme, men det kan være opplysende å reflektere rundt hvordan vi kunne definert dem selv.

Hva skjer?

```
(lambda (x) (display (+ 1 2))) ;; -> ??
```

- Evaluering av et uttrykk kan utsettes ved å gjøre det til prosedyrekropp:

```
(delay exp)  ≡  (lambda () exp)
```

- Dette kan så regnes som et løfte om å beregne `exp` senere.

Hvordan "så" implementere `delay` og `force`?

- `delay` og `force` er innebygd i Scheme, men det kan være opplysende å reflektere rundt hvordan vi kunne definert dem selv.

Hva skjer?

```
(lambda (x) (display (+ 1 2))) ;; -> ??
```

- Evaluering av et uttrykk kan utsettes ved å gjøre det til prosedyrekropp:

```
(delay exp)  ≡  (lambda () exp)
```

- Dette kan så regnes som et løfte om å beregne `exp` senere.
- For å utføre selve beregningen kaller vi bare prosedyreobjektet:

```
(define (force promise)
  (promise))
```

Et eksempel i mer detalj

```
? (define s (stream-interval 1 10))
? s → (1 . #<promise>)
? (stream-cdr s) → (2 . #<promise>)
```

- Hva skjer egentlig i kallene på `stream-interval` og `stream-cdr`?

Et eksempel i mer detalj

```
? (define s (stream-interval 1 10))
? s → (1 . #<promise>)
? (stream-cdr s) → (2 . #<promise>)
```

- Hva skjer egentlig i kallene på `stream-interval` og `stream-cdr`?

```
? (stream-interval 1 10)
```

Et eksempel i mer detalj

```
? (define s (stream-interval 1 10))
? s → (1 . #<promise>)
? (stream-cdr s) → (2 . #<promise>)
```

- Hva skjer egentlig i kallene på `stream-interval` og `stream-cdr`?

```
? (stream-interval 1 10)
⇒ (cons-stream 1 (stream-interval 2 10)
```

Et eksempel i mer detalj

```
? (define s (stream-interval 1 10))
? s → (1 . #<promise>)
? (stream-cdr s) → (2 . #<promise>)
```

- Hva skjer egentlig i kallene på `stream-interval` og `stream-cdr`?

```
? (stream-interval 1 10)
⇒ (cons-stream 1 (stream-interval 2 10)
⇒ (cons 1 (delay (stream-interval 2 10)))
```

Et eksempel i mer detalj

```
? (define s (stream-interval 1 10))
? s → (1 . #<promise>)
? (stream-cdr s) → (2 . #<promise>)
```

- Hva skjer egentlig i kallene på `stream-interval` og `stream-cdr`?

```
? (stream-interval 1 10)
⇒ (cons-stream 1 (stream-interval 2 10)
⇒ (cons 1 (delay (stream-interval 2 10)))
⇒ (cons 1 (lambda () (stream-interval 2 10)))
```

Et eksempel i mer detalj

```
? (define s (stream-interval 1 10))
? s → (1 . #<promise>)
? (stream-cdr s) → (2 . #<promise>)
```

- Hva skjer egentlig i kallene på `stream-interval` og `stream-cdr`?

```
? (stream-interval 1 10)
⇒ (cons-stream 1 (stream-interval 2 10)
⇒ (cons 1 (delay (stream-interval 2 10)))
⇒ (cons 1 (lambda () (stream-interval 2 10)))
⇒ (1 . (lambda () (stream-interval 2 10)))
```

Et eksempel i mer detalj

```
? (define s (stream-interval 1 10))
? s → (1 . #<promise>)
? (stream-cdr s) → (2 . #<promise>)
```

- Hva skjer egentlig i kallene på `stream-interval` og `stream-cdr`?

```
? (stream-interval 1 10)
⇒ (cons-stream 1 (stream-interval 2 10)
⇒ (cons 1 (delay (stream-interval 2 10)))
⇒ (cons 1 (lambda () (stream-interval 2 10)))
⇒ (1 . (lambda () (stream-interval 2 10)))
```

```
? (stream-cdr s)
```

Et eksempel i mer detalj

```
? (define s (stream-interval 1 10))
? s → (1 . #<promise>)
? (stream-cdr s) → (2 . #<promise>)
```

- Hva skjer egentlig i kallene på `stream-interval` og `stream-cdr`?

```
? (stream-interval 1 10)
⇒ (cons-stream 1 (stream-interval 2 10)
⇒ (cons 1 (delay (stream-interval 2 10)))
⇒ (cons 1 (lambda () (stream-interval 2 10)))
⇒ (1 . (lambda () (stream-interval 2 10)))
```

```
? (stream-cdr s)
⇒ (stream-cdr (1 . (lambda () (stream-interval 2 10))))
```

Et eksempel i mer detalj

```
? (define s (stream-interval 1 10))
? s → (1 . #<promise>)
? (stream-cdr s) → (2 . #<promise>)
```

- Hva skjer egentlig i kallene på `stream-interval` og `stream-cdr`?

```
? (stream-interval 1 10)
⇒ (cons-stream 1 (stream-interval 2 10)
⇒ (cons 1 (delay (stream-interval 2 10)))
⇒ (cons 1 (lambda () (stream-interval 2 10)))
⇒ (1 . (lambda () (stream-interval 2 10)))
```

```
? (stream-cdr s)
⇒ (stream-cdr (1 . (lambda () (stream-interval 2 10))))
⇒ (force (cdr (1 . (lambda () (stream-interval 2 10)))))
```

Et eksempel i mer detalj

```
? (define s (stream-interval 1 10))
? s → (1 . #<promise>)
? (stream-cdr s) → (2 . #<promise>)
```

- Hva skjer egentlig i kallene på `stream-interval` og `stream-cdr`?

```
? (stream-interval 1 10)
⇒ (cons-stream 1 (stream-interval 2 10)
⇒ (cons 1 (delay (stream-interval 2 10)))
⇒ (cons 1 (lambda () (stream-interval 2 10)))
⇒ (1 . (lambda () (stream-interval 2 10)))
```

```
? (stream-cdr s)
⇒ (stream-cdr (1 . (lambda () (stream-interval 2 10))))
⇒ (force (cdr (1 . (lambda () (stream-interval 2 10)))))
⇒ (force (lambda () (stream-interval 2 10)))
```

Et eksempel i mer detalj

```
? (define s (stream-interval 1 10))
? s → (1 . #<promise>)
? (stream-cdr s) → (2 . #<promise>)
```

- Hva skjer egentlig i kallene på `stream-interval` og `stream-cdr`?

```
? (stream-interval 1 10)
⇒ (cons-stream 1 (stream-interval 2 10)
⇒ (cons 1 (delay (stream-interval 2 10)))
⇒ (cons 1 (lambda () (stream-interval 2 10)))
⇒ (1 . (lambda () (stream-interval 2 10)))
```

```
? (stream-cdr s)
⇒ (stream-cdr (1 . (lambda () (stream-interval 2 10))))
⇒ (force (cdr (1 . (lambda () (stream-interval 2 10)))))
⇒ (force (lambda () (stream-interval 2 10)))
⇒ ((lambda () (stream-interval 2 10)))
```

Et eksempel i mer detalj

```
? (define s (stream-interval 1 10))
? s → (1 . #<promise>)
? (stream-cdr s) → (2 . #<promise>)
```

- Hva skjer egentlig i kallene på `stream-interval` og `stream-cdr`?

```
? (stream-interval 1 10)
⇒ (cons-stream 1 (stream-interval 2 10)
⇒ (cons 1 (delay (stream-interval 2 10)))
⇒ (cons 1 (lambda () (stream-interval 2 10)))
⇒ (1 . (lambda () (stream-interval 2 10)))
```

```
? (stream-cdr s)
⇒ (stream-cdr (1 . (lambda () (stream-interval 2 10))))
⇒ (force (cdr (1 . (lambda () (stream-interval 2 10)))))
⇒ (force (lambda () (stream-interval 2 10)))
⇒ ((lambda () (stream-interval 2 10)))
⇒ (stream-interval 2 10)
```

Et eksempel i mer detalj

```
? (define s (stream-interval 1 10))
? s → (1 . #<promise>)
? (stream-cdr s) → (2 . #<promise>)
```

- Hva skjer egentlig i kallene på `stream-interval` og `stream-cdr`?

```
? (stream-interval 1 10)
⇒ (cons-stream 1 (stream-interval 2 10)
⇒ (cons 1 (delay (stream-interval 2 10)))
⇒ (cons 1 (lambda () (stream-interval 2 10)))
⇒ (1 . (lambda () (stream-interval 2 10)))
```

```
? (stream-cdr s)
⇒ (stream-cdr (1 . (lambda () (stream-interval 2 10))))
⇒ (force (cdr (1 . (lambda () (stream-interval 2 10)))))
⇒ (force (lambda () (stream-interval 2 10)))
⇒ ((lambda () (stream-interval 2 10)))
⇒ (stream-interval 2 10)
⇒ (cons-stream 2 (stream-interval 3 10))
 ...
```

En mer realistisk implementasjon av `delay`

```
(delay exp)  ≡  (lambda () exp)
```

- Definisjonen av `delay` over er tilstrekkelig for utsatt evaluering...
- men den kan gjøres mye mer effektiv!
- I motsetning til i/o-'strømmer' støtter strømmer *random access*.
- Strømelementer kan brukes flere ganger:
- Med definisjonen så langt må vi da innfri samme løfte flere ganger.
- Memoisering kan bygges inn i `delay`.

Memoisering og utsatt evaluering

- Spesialisert memoisering: fungerer kun for prosedyrer uten argumenter.

```
(delay exp) ≡ (memoize (lambda () exp))
```

```
(define (memoize proc)
  (let ((forced? #f)
        (result #f))
    (lambda ()
      (if (not forced?)
          (begin (set! result (proc))
                 (set! forced? #t)))
      result)))
```

Memoisering og utsatt evaluering

- Spesialisert memoisering: fungerer kun for prosedyrer uten argumenter.

```
(delay exp) ≡ (memoize (lambda () exp))
```

```
(define (memoize proc)
  (let ((forced? #f)
        (result #f))
    (lambda ()
      (if (not forced?)
          (begin (set! result (proc))
                 (set! forced? #t)))
      result)))
```

Memoisering og utsatt evaluering

- Spesialisert memoisering: fungerer kun for prosedyrer uten argumenter.

```
(delay exp) ≡ (memoize (lambda () exp))
```

```
(define (memoize proc)
  (let ((forced? #f)
        (result #f))
    (lambda ()
      (if (not forced?)
          (begin (set! result (proc))
                 (set! forced? #t)))
      result)))
```

Memoisering og utsatt evaluering

- Spesialisert memoisering: fungerer kun for prosedyrer uten argumenter.

```
(delay exp) ≡ (memoize (lambda () exp))
```

```
(define (memoize proc)
  (let ((forced? #f)
        (result #f))
    (lambda ()
      (if (not forced?)
          (begin (set! result (proc))
                 (set! forced? #t)))
      result)))
```

Memoisering og utsatt evaluering

- Spesialisert memoisering: fungerer kun for prosedyrer uten argumenter.

```
(delay exp) ≡ (memoize (lambda () exp))
```

```
(define (memoize proc)
  (let ((forced? #f)
        (result #f))
    (lambda ()
      (if (not forced?)
          (begin (set! result (proc))
                 (set! forced? #t)))
      result)))
```

Memoisering og utsatt evaluering

- Spesialisert memoisering: fungerer kun for prosedyrer uten argumenter.

```
(delay exp) ≡ (memoize (lambda () exp))
```

```
(define (memoize proc)
  (let ((forced? #f)
        (result #f))
    (lambda ()
      (if (not forced?)
          (begin (set! result (proc))
                 (set! forced? #t)))
      result)))
```

Memoisering og utsatt evaluering

- Spesialisert memoisering: fungerer kun for prosedyrer uten argumenter.

```
(delay exp) ≡ (memoize (lambda () exp))
```

```
(define (memoize proc)
  (let ((forced? #f)
        (result #f))
    (lambda ()
      (if (not forced?)
          (begin (set! result (proc))
                 (set! forced? #t)))
      result)))
```

Memoisering og utsatt evaluering

- Spesialisert memoisering: fungerer kun for prosedyrer uten argumenter.

```
(delay exp) ≡ (memoize (lambda () exp))
```

```
(define (memoize proc)
  (let ((forced? #f)
        (result #f))
    (lambda ()
      (if (not forced?)
          (begin (set! result (proc))
                 (set! forced? #t)))
      result)))
```

Memoisering og utsatt evaluering

- Spesialisert memoisering: fungerer kun for prosedyrer uten argumenter.

```
(delay exp) ≡ (memoize (lambda () exp))
```

```
(define (memoize proc)
  (let ((forced? #f)
        (result #f))
    (lambda ()
      (if (not forced?)
          (begin (set! result (proc))
                 (set! forced? #t)))
      result)))
```

```
? (define (foo x)
    (display "I was called!")
    x)
```

Memoisering og utsatt evaluering

- Spesialisert memoisering: fungerer kun for prosedyrer uten argumenter.

```
(delay exp) ≡ (memoize (lambda () exp))
```

```
(define (memoize proc)
  (let ((forced? #f)
        (result #f))
    (lambda ()
      (if (not forced?)
          (begin (set! result (proc))
                 (set! forced? #t)))
      result)))
```

```
? (define (foo x)
    (display "I was called!")
    x)
? (define bar (delay (foo 42)))
```

Memoisering og utsatt evaluering

- Spesialisert memoisering: fungerer kun for prosedyrer uten argumenter.

```
(delay exp) ≡ (memoize (lambda () exp))
```

```
(define (memoize proc)
  (let ((forced? #f)
        (result #f))
    (lambda ()
      (if (not forced?)
          (begin (set! result (proc))
                 (set! forced? #t)))
      result)))
```

```
? (define (foo x)
    (display "I was called!")
    x)
? (define bar (delay (foo 42)))
? bar → #<promise>
```

Memoisering og utsatt evaluering

- Spesialisert memoisering: fungerer kun for prosedyrer uten argumenter.

```
(delay exp) ≡ (memoize (lambda () exp))
```

```
(define (memoize proc)
  (let ((forced? #f)
        (result #f))
    (lambda ()
      (if (not forced?)
          (begin (set! result (proc))
                 (set! forced? #t)))
      result)))
```

```
? (define (foo x)
    (display "I was called!")
    x)
? (define bar (delay (foo 42)))
? bar → #<promise>
? (force bar)
```

Memoisering og utsatt evaluering

- Spesialisert memoisering: fungerer kun for prosedyrer uten argumenter.

```
(delay exp) ≡ (memoize (lambda () exp))
```

```
(define (memoize proc)
  (let ((forced? #f)
        (result #f))
    (lambda ()
      (if (not forced?)
          (begin (set! result (proc))
                 (set! forced? #t)))
      result)))
```

```
? (define (foo x)
    (display "I was called!")
    x)
? (define bar (delay (foo 42)))
? bar → #<promise>
? (force bar)
⇝ I was called!
→ 42
```

Memoisering og utsatt evaluering

- Spesialisert memoisering: fungerer kun for prosedyrer uten argumenter.

```
(delay exp) ≡ (memoize (lambda () exp))
```

```
(define (memoize proc)
  (let ((forced? #f)
        (result #f))
    (lambda ()
      (if (not forced?)
          (begin (set! result (proc))
                 (set! forced? #t)))
      result)))
```

```
? (define (foo x)
    (display "I was called!")
    x)
? (define bar (delay (foo 42)))
? bar → #<promise>
? (force bar)
⇝ I was called!
→ 42
? bar → #<promise>
```

Memoisering og utsatt evaluering

- Spesialisert memoisering: fungerer kun for prosedyrer uten argumenter.

```
(delay exp) ≡ (memoize (lambda () exp))
```

```
(define (memoize proc)
  (let ((forced? #f)
        (result #f))
    (lambda ()
      (if (not forced?)
          (begin (set! result (proc))
                 (set! forced? #t)))
      result)))
```

```
? (define (foo x)
    (display "I was called!")
    x)
? (define bar (delay (foo 42)))
? bar → #<promise>
? (force bar)
⇝ I was called!
→ 42
? bar → #<promise>
? (force bar) →
```

Memoisering og utsatt evaluering

- Spesialisert memoisering: fungerer kun for prosedyrer uten argumenter.

```
(delay exp) ≡ (memoize (lambda () exp))
```

```
(define (memoize proc)
  (let ((forced? #f)
        (result #f))
    (lambda ()
      (if (not forced?)
          (begin (set! result (proc))
                 (set! forced? #t)))
      result)))
```

```
? (define (foo x)
    (display "I was called!")
    x)
? (define bar (delay (foo 42)))
? bar → #<promise>
? (force bar)
⇝ I was called!
→ 42
? bar → #<promise>
? (force bar) →  42
```

- merk: (proc) er en kall på proc (uten argumenter)

Utsatt evaluering og destruktive operasjoner



- Utsatt evaluering går ikke så bra i hop med mutasjoner:

```
? (define a 4)
? (define b (delay (+ 1 a)))
? (set! a 0)
? (force b) →
```

Utsatt evaluering og destruktive operasjoner

- Utsatt evaluering går ikke så bra i hop med mutasjoner:

```
? (define a 4)
? (define b (delay (+ 1 a)))
? (set! a 0)
? (force b) → 1
```

- Verdien til den utsatte evalueringen avhenger av tidspunktet for når den faktisk kalles: kan lett skape mye forvirring (og bugs)!

Utsatt evaluering og destruktive operasjoner



- Utsatt evaluering går ikke så bra i hop med mutasjoner:

```
? (define a 4)
? (define b (delay (+ 1 a)))
? (set! a 0)
? (force b) → 1
```

- Verdien til den utsatte evalueringen avhenger av tidspunktet for når den faktisk kalles: kan lett skape mye forvirring (og bugs)!
- Enda mer forrvirrende hvis det er optimisert med memoisering i tillegg:

```
? (set! a 100)
? (force b) →
```

Utsatt evaluering og destruktive operasjoner



- Utsatt evaluering går ikke så bra i hop med mutasjoner:

```
? (define a 4)
? (define b (delay (+ 1 a)))
? (set! a 0)
? (force b) → 1
```

- Verdien til den utsatte evalueringen avhenger av tidspunktet for når den faktisk kalles: kan lett skape mye forvirring (og bugs)!
- Enda mer forrvirrende hvis det er optimisert med memoisering i tillegg:

```
? (set! a 100)
? (force b) → 1
```

Noen hjelpeprosedyrer fra oblig 3a

```
(define (stream-ref s n)
  (if (= n 0)
      (stream-car s)
      (stream-ref (stream-cdr s) (- n 1))))

? (stream-ref (stream-interval 1 1000000) 7)
→ 8
```

Noen hjelpeprosedyrer fra oblig 3a

```
(define (stream-ref s n)
  (if (= n 0)
      (stream-car s)
      (stream-ref (stream-cdr s) (- n 1))))

? (stream-ref (stream-interval 1 1000000) 7)
→ 8
```

```
(define (show-stream stream n)
  (cond ((= n 0) (display "...\n"))
        ((stream-null? stream) (newline))
        (else (display (stream-car stream))
              (display " ")
              (show-stream (stream-cdr stream) (- n 1)))))

? (show-stream (stream-interval 1 1000000) 7)
⇝ 1 2 3 4 5 6 7 ...
```

Noen hjelpeprosedyrer fra oblig 3a

```
(define (stream-ref s n)
  (if (= n 0)
      (stream-car s)
      (stream-ref (stream-cdr s) (- n 1))))

? (stream-ref (stream-interval 1 1000000) 7)
→ 8
```

```
(define (show-stream stream n)
  (cond ((= n 0) (display "...\n"))
        ((stream-null? stream) (newline))
        (else (display (stream-car stream))
              (display " ")
              (show-stream (stream-cdr stream) (- n 1)))))

? (show-stream (stream-interval 1 1000000) 7)
⇝ 1 2 3 4 5 6 7 ...
```

- Antar også at vi har `stream-map` fra obligen.

Uendelige strømmer

- Vi har sett at en strøm er en sekvens som konstrueres mens den brukes.
- Kan dermed definere en *uendelig* sekvens, uten å faktisk beregne den.
- De naturlige tallene via en rekursiv strømgenerator:

```
? (define (integers-starting-from n)
    (cons-stream n (integers-starting-from (+ n 1))))
```

Uendelige strømmer



- Vi har sett at en strøm er en sekvens som konstrueres mens den brukes.
- Kan dermed definere en *uendelig* sekvens, uten å faktisk beregne den.
- De naturlige tallene via en rekursiv strømgenerator:

```
? (define (integers-starting-from n)
    (cons-stream n (integers-starting-from (+ n 1))))

? (define nats (integers-starting-from 1))
```

Uendelige strømmer

- Vi har sett at en strøm er en sekvens som konstrueres mens den brukes.
- Kan dermed definere en *uendelig* sekvens, uten å faktisk beregne den.
- De naturlige tallene via en rekursiv strømgenerator:

```
? (define (integers-starting-from n)
    (cons-stream n (integers-starting-from (+ n 1))))

? (define nats (integers-starting-from 1))
```

- Veldefinert p.g.a. utsatt evaluering.
  - Hva mangler i forhold til rekursjonen vi har sett før?
  - Hva ville skjedd om vi brukte `cons`?

Uendelige strømmer

- Vi har sett at en strøm er en sekvens som konstrueres mens den brukes.
- Kan dermed definere en *uendelig* sekvens, uten å faktisk beregne den.
- De naturlige tallene via en rekursiv strømgenerator:

```
? (define (integers-starting-from n)
    (cons-stream n (integers-starting-from (+ n 1))))

? (define nats (integers-starting-from 1))
```

- Veldefinert p.g.a. utsatt evaluering.
  - Hva mangler i forhold til rekursjonen vi har sett før?
  - Hva ville skjedd om vi brukte `cons`?
- Kan kombineres med andre strømprosedyrer og strømmer, f.eks.

```
? (define odds (stream-filter odd? nats))

? (show-stream odds 5) ⇝ 1 3 5 7 9 ...
```

Uendelige strømmer (forts.)

- Kan også definere uendelige strømmer direkte ved å la strømmen referere til seg selv rekursivt. (SICP: 'implisitt strømdefinisjon')
- Veldefinert p.g.a. utsatt evaluering.

```
? (define ones (cons-stream 1 ones))
```

Uendelige strømmer (forts.)

- Kan også definere uendelige strømmer direkte ved å la strømmen referere til seg selv rekursivt. (SICP: 'implisitt strømdefinisjon')
- Veldefinert p.g.a. utsatt evaluering.

```
? (define ones (cons-stream 1 ones))

? (define ones (cons 1 ones))
```

Uendelige strømmer (forts.)

- Kan også definere uendelige strømmer direkte ved å la strømmen referere til seg selv rekursivt. (SICP: 'implisitt strømdefinisjon')
- Veldefinert p.g.a. utsatt evaluering.

```
? (define ones (cons-stream 1 ones))

? (define ones (cons 1 ones)) ⇝ ones: undefined; error.
```

Uendelige strømmer (forts.)

- Kan også definere uendelige strømmer direkte ved å la strømmen referere til seg selv rekursivt. (SICP: 'implisitt strømdefinisjon')
- Veldefinert p.g.a. utsatt evaluering.

```
? (define ones (cons-stream 1 ones))

? (define ones (cons 1 ones)) ⇝ ones: undefined; error.

? (define (add-streams stream1 stream2)
    (stream-map + stream1 stream2))
```

Uendelige strømmer (forts.)

- Kan også definere uendelige strømmer direkte ved å la strømmen referere til seg selv rekursivt. (SICP: 'implisitt strømdefinisjon')
- Veldefinert p.g.a. utsatt evaluering.

```
? (define ones (cons-stream 1 ones))

? (define ones (cons 1 ones)) ⇝ ones: undefined; error.

? (define (add-streams stream1 stream2)
    (stream-map + stream1 stream2))

? (define nats
    (cons-stream 1 (add-streams ones nats)))
```

Uendelige strømmer (forts.)

- Kan også definere uendelige strømmer direkte ved å la strømmen referere til seg selv rekursivt. (SICP: 'implisitt strømdefinisjon')
- Veldefinert p.g.a. utsatt evaluering.

```
? (define ones (cons-stream 1 ones))

? (define ones (cons 1 ones)) ⇝ ones: undefined; error.

? (define (add-streams stream1 stream2)
    (stream-map + stream1 stream2))

? (define nats
    (cons-stream 1 (add-streams ones nats)))
```

- Definisjonen av `nats` her fungerer fordi akkurat nok av strømmen er konstruert til at vi kan bruke den rekursivt i `add-streams`:
  - 2. element = 1. element + én
  - 3. element = 2. element + én
  - o.s.v.

Repetisjon: Fibonaccitall

$$\text{fib}(n) = \begin{cases} 0 & \text{hvis } n = 0 \\ 1 & \text{hvis } n = 1 \\ \text{fib}(n-1) + \text{fib}(n-2) & \text{ellers} \end{cases}$$

- Illustrerte trerekursive prosesser med en prosedyre for å beregne tall i Fibonacci-rekken:
- $0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144 \ldots$
- Bortsett fra de to første er hvert tall summen av de to foregående.

Repetisjon: Fibonaccitall

- Illustrerte trerekursive prosesser med en prosedyre for å beregne tall i Fibonacci-rekken:
- $0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144 \ldots$
- Bortsett fra de to første er hvert tall summen av de to foregående.

$$\text{fib}(n) = \begin{cases} 0 & \text{hvis } n = 0 \\ 1 & \text{hvis } n = 1 \\ \text{fib}(n-1) + \text{fib}(n-2) & \text{ellers} \end{cases}$$

```
? (define (fib n)
    (cond ((= n 0) 0)
          ((= n 1) 1)
          (else (+ (fib (- n 1))
                   (fib (- n 2))))))
```

Repetisjon: Fibonaccitall

- Illustrerte trerekursive prosesser med en prosedyre for å beregne tall i Fibonacci-rekken:
- $0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144 \ldots$
- Bortsett fra de to første er hvert tall summen av de to foregående.

$$\text{fib}(n) = \begin{cases} 0 & \text{hvis } n = 0 \\ 1 & \text{hvis } n = 1 \\ \text{fib}(n-1) + \text{fib}(n-2) & \text{ellers} \end{cases}$$

```
? (define (fib n)
    (cond ((= n 0) 0)
          ((= n 1) 1)
          (else (+ (fib (- n 1))
                   (fib (- n 2))))))

? (fib 5) → 5

? (fib 6) → 8

? (fib 7) → 13      ;; = 5 + 8

? (fib 8) → 21      ;; = 8 + 13

? (fib 9) → 34      ;; = 13 + 21
```

Fibonaccitallene som en uendelig strøm

- Kan bruke samme 'triks' som for `nats` til å definere fibonaccifølgen som en uendelig strøm `fibs`.
- Sørger for at akkurat nok av `fibs` finnes til at den kan brukes rekursivt:

```
? (define fibs




? (show-stream fibs 20)
⇝ 0 1 1 2 3 5 8 13 21 34 55 89 144 233 377 610 987 1597 2584 4181 .

? (stream-ref fibs 9) → 34
```

Fibonaccitallene som en uendelig strøm

- Kan bruke samme 'triks' som for `nats` til å definere fibonaccifølgen som en uendelig strøm `fibs`.
- Sørger for at akkurat nok av `fibs` finnes til at den kan brukes rekursivt:

```
? (define fibs
    (cons-stream 0



? (show-stream fibs 20)
⇝ 0 1 1 2 3 5 8 13 21 34 55 89 144 233 377 610 987 1597 2584 4181 .

? (stream-ref fibs 9) → 34
```

Fibonaccitallene som en uendelig strøm

- Kan bruke samme 'triks' som for `nats` til å definere fibonaccifølgen som en uendelig strøm `fibs`.
- Sørger for at akkurat nok av `fibs` finnes til at den kan brukes rekursivt:

```
? (define fibs
    (cons-stream 0
      (cons-stream 1


? (show-stream fibs 20)
⇝ 0 1 1 2 3 5 8 13 21 34 55 89 144 233 377 610 987 1597 2584 4181 .

? (stream-ref fibs 9) → 34
```

Fibonaccitallene som en uendelig strøm



- Kan bruke samme 'triks' som for `nats` til å definere fibonaccifølgen som en uendelig strøm `fibs`.
- Sørger for at akkurat nok av `fibs` finnes til at den kan brukes rekursivt:

```
? (define fibs
    (cons-stream 0
      (cons-stream 1
        (add-stream fibs

? (show-stream fibs 20)
⇝ 0 1 1 2 3 5 8 13 21 34 55 89 144 233 377 610 987 1597 2584 4181 .

? (stream-ref fibs 9) → 34
```

Fibonaccitallene som en uendelig strøm



- Kan bruke samme 'triks' som for `nats` til å definere fibonaccifølgen som en uendelig strøm `fibs`.
- Sørger for at akkurat nok av `fibs` finnes til at den kan brukes rekursivt:

```
? (define fibs
    (cons-stream 0
      (cons-stream 1
        (add-stream fibs (stream-cdr fibs)))))

? (show-stream fibs 20)
↝ 0 1 1 2 3 5 8 13 21 34 55 89 144 233 377 610 987 1597 2584 4181 .

? (stream-ref fibs 9) → 34
```

Fibonaccitallene som en uendelig strøm

- Kan bruke samme 'triks' som for `nats` til å definere fibonaccifølgen som en uendelig strøm `fibs`.
- Sørger for at akkurat nok av `fibs` finnes til at den kan brukes rekursivt:

```
? (define fibs
    (cons-stream 0
      (cons-stream 1
        (add-stream fibs (stream-cdr fibs)))))

? (show-stream fibs 20)
⇝ 0 1 1 2 3 5 8 13 21 34 55 89 144 233 377 610 987 1597 2584 4181 .

? (stream-ref fibs 9) → 34
```

- Antall addisjoner for det n-te elementet i strømmen (SICP 3.57):
  - Dersom delay er implementert *med* memoisering: Lineær.
  - *Uten*: Eksponentiell.

Uendelig strøm av uendelige strømmer...

```
? (define (powers-of n)
    (define (iter x)
      (cons-stream x (iter (* x n))))
    (iter n))

? (show-stream (powers-of 2) 5) ⇝ 2 4 8 16 32 ...
```

Uendelig strøm av uendelige strømmer...

```
? (define (powers-of n)
    (define (iter x)
      (cons-stream x (iter (* x n))))
    (iter n))

? (show-stream (powers-of 2) 5) ⇝ 2 4 8 16 32 ...
```

```
? (define power-table (stream-map powers-of nats))
```

Uendelig strøm av uendelige strømmer...

```
? (define (powers-of n)
    (define (iter x)
      (cons-stream x (iter (* x n))))
    (iter n))

? (show-stream (powers-of 2) 5) ⇝ 2 4 8 16 32 ...
```

```
? (define power-table (stream-map powers-of nats))

? (show-stream (stream-ref power-table 0) 5) ⇝ 1 1 1 1 1 ...

? (show-stream (stream-ref power-table 1) 5) ⇝ 2 4 8 16 32 ...

? (show-stream (stream-ref power-table 2) 5) ⇝ 3 9 27 81 243 ...

? (show-stream (stream-ref power-table 3) 5) ⇝ 4 16 64 256 1024

? (show-stream (stream-ref power-table 4) 5) ⇝ 5 25 125 625 3125
```

- Kan tenke på `power-table` som en tabell med uendelig mange og uendelig lange rader, der cellene ikke lages før vi trenger dem.

Nest siste oblig

- Oblig 3a med prekode.
- Hovedfokus: memoisering + strømmer.

3a

Neste gang

- Mer om (uendelige) strømmer og utsatt evaluering.
- Hvordan definere egne *special forms*?
- Makroer: lar oss transformere kode før den blir evaluert eller kompilert.
- Strømmer, tid og tilstand.