Zoom gruppetime 4. Mai

Monday, May 4, 2020 10:11 AM

Eksamen 2015

6 Hva betyr det at et språk er i NP?

- Språket A er bestemt av en NTM som kjører i polynomisk tid
- Språket A har en verifiserer V som kan verifisere om $w \in A$ gitt en potensiell "løsning" c. V må kjøre i polynomisk tid.

7 $x_1, \ldots, x_k \in \mathbb{N}$. $\{x_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ kan sumsplittes hvis det finnes en $i \in \mathbb{N}$ og en permutasjon $y_1, \ldots, y_k$ av $x_1, \ldots, x_k$ slik at

$$y_1 + \cdots + y_i = y_{i+1} + \cdots + y_k.$$

SSPLIT = $\{\langle x_1, \ldots, x_k \rangle : x_1, \ldots, x_k \in \mathbb{N}$ og kan sum-splittes$\}$.

Ex: $\langle 4, 3, 7, 3, 6, 9 \rangle \in$ SSPLIT

$4 + 3 + 3 + 6 = 7 + 9$ ← løsning.

Hvorfor er SSPLIT i NP?

En NTM som bestemmer SSPLIT i poly-

En NTM som bestemmer SSPLIT i polytid er f.eks.

N = " Gitt input $\langle x_1, \dots, x_k \rangle$:"

1. ikke-deterministisk gjett en måte å splitte $x_1, \dots, x_k$ i to summer på.
2. Sjekk at de to summene er like.
3. Aksepter hvis like, hvis ikke, reject.

8 $SUBSET\text{-}SUM = \{ \langle S, t \rangle : S = \{x_1, \dots, x_k\}$ og for en eller annen $\{y_1, \dots, y_\ell\} \subseteq S$ så har vi at $\sum_{i=1}^{\ell} y_i = t \}$

SUBSET-SUM er NP-komplett!

Er gitt en polynomtid beregnbar funksjon

$$f(\langle \underbrace{\{x_1, \dots, x_k\}}_{S}, t \rangle) = \begin{cases} \langle 1 \rangle & b \leq 0 \\ \langle x_1, \dots, x_k, a, b \rangle & b > 0 \end{cases}$$

hvor $a = t+1$ og $b = (x_1 + \dots + x_k) - t + 1$

Vis at $\langle S, t \rangle \in SUBSET\text{-}SUM \Rightarrow f(\langle S, t \rangle) \in SSPLIT$

Løsning: Anta at $\langle S, t \rangle \in SUBSET\text{-}SUM$

Da er $S = \{x_1, \dots, x_k\}$ og det finnes en delmengde $\{y_1, \dots, y_\ell\} \subseteq S$ hvor

$\sum y_i = t$ [illegible]

en delmengde $\{y_1, \ldots, y_\ell\} \subseteq S$ hvor $\sum_{i=1}^{\ell} y_i = t$. Da $a = t+1$ og $b = (x_1 + \cdots + x_k) + 1 - t$.

Vi ser at $\sum x_i \geq \sum y_i = t$, så da er $b > 0$. Da har vi at

$$f(\langle S, t \rangle) = \langle x_1, \ldots, x_k, a, b \rangle.$$

Vil vise at $\langle x_1, \ldots, x_k, a, b \rangle \in SSPLIT$.

må sum-splittes!

Definer $S = \sum_{i=1}^{k} x_i$, $X = S - t$

Da kan $x_1, \ldots, x_k$ deles i to deler som har summene t og X respektivt.

$\{y_1, \ldots, y_\ell\} \subseteq S$ — sum t

$\{y_1, \ldots, y_\ell\}^c \subseteq S$ — sum X ← komplement

Altså har vi $x_1, \ldots, x_k, a, b$

$S = X + t$ $\quad t+1$ $\quad S - t + 1 = X + 1$

Splitter sånn her:

① $y_1, \ldots, y_\ell, b$ har sum $t + b$

② $y_{\ell+1}, \ldots, y_k, a$ har sum $X + a$

Sjekker at de har samme sum:

$$t + b = t + X + 1 = X + (t+1) = X + a.$$

Så da er $f(\langle S,t\rangle) = \langle x_1, \ldots, x_k, a, b\rangle \in$ SSPLIT.

1 Vis at

$f(\langle S,t\rangle) \in$ SSPLIT $\Rightarrow \langle S,t\rangle \in$ SUBSET-SUM.

Antar at $f(\langle S,t\rangle) \in$ SSPLIT.

$\langle x_1, \ldots, x_k, a, b\rangle$

$f(\langle S,t\rangle)$ kan ikke være $\langle 1\rangle$, fordi en mengde med 1 element kan ikke sum-splittes

Vi har at $a = t+1$ og $b = (\Sigma x_i) - t + 1$.

og vi vet at $\langle x_1, \ldots, x_k, a, b\rangle$ kan sum-splittes. Skal se på alle mulige "splitter":

① Kan ikke splitte $a+b = x_1, \ldots, x_k$:

$$a+b = t+1+(\Sigma x_i)-t+1 = (\Sigma x_i)+2$$
$$> \Sigma x_i$$

② Hva med $b = a + x_1 + \ldots + x_k$?

$$b = (\Sigma x_i) - t + 1 = (t+1) + (\Sigma x_i)$$

men da må $t=0$. Men da er

$\langle S,t\rangle = \langle S, 0\rangle \in$ SUBSET-SUM

(fordi $\emptyset$ er en løsning).

③ Hva med $a = b + x_1 + \ldots + x_k$?

$$a = t+1 = (\Sigma x_i) - t + 1 + (\Sigma x_i)$$

$$a = t+1 = (\Sigma x_i) - t + 1 + (\Sigma x_i)$$

$$= \underbrace{2(\Sigma x_i) - t}_{2(\Sigma x_i) - t = t} + 1$$

men da må $\Sigma x_i = t$.

$\langle S, t \rangle \in$ SUBSET-SUM, fordi summen av hele S er lik t.

(9) Vis hvis $a + \sum_{i=1}^{n} z_i = b + \sum_{i=1}^{m} y_i$

hvor $\sum_{i=1}^{n} z_i + \sum_{i=1}^{m} y_i = \sum_{i=1}^{k} x_i$, $n+m=k$, og

$z_i \in S$, $y_i \in S$? Da ser vi at

$$\underbrace{(t+1)}_{a} + \Sigma z_i = \underbrace{(\Sigma x_i) - t + 1 + \Sigma y_i}_{b}$$

$$\Rightarrow 2t = \Sigma x_i + \Sigma y_i - \Sigma z_i = 2\Sigma y_i$$

$$\Rightarrow t = \Sigma y_i$$

Og da ser vi at $\{y_1, \ldots, y_m\} \subseteq S$ har sum lik t, så da er

$\langle S, t \rangle \in$ SUBSET-SUM

Siden vi har dekket alle muligheter har vi vist at

$f(\langle S, t \rangle) \in$ SSPLIT $\Rightarrow \langle S, t \rangle \in$ SUBSET-SUM

10 Er SSPLIT NP-komplett?

10 Er SSPLIT NP-komplett?

Ja Vi viste i oppgave 8 og 9

at SUBSET-SUM $\leq_p$ SSPLIT.

Ved teorem 7.36 er SSPLIT

NP-komplett, fordi SUBSES-SUM er NP-komplett.

OPPGAVER FRA SIPSER:

7.29:

SET-SPLIT = $\{\langle S, C\rangle$: S er en endelig mengde, og C er en mengde med $k > 0$ delmengder av S, slik at hvert element i S kan få fargen rød eller blå, og ingen av delmengdene $C_i \in C$ har alle elementene i samme farge$\}$.

Ex: $\langle S, C\rangle = \langle S, \{C_1, \ldots, C_k\}\rangle$

$\langle \{1,2,3,4,5\}, \{\{1,2\}, \{1,4\}, \{3,5,4\}\}\rangle$

S C

S C

Vil vise at SET-SPLIT er NP-komplett.

① SET-SPLIT $\in$ NP fordi man kan verifisere at en fargekoding av S er "gyldig" i polynomisk tid

② Må vise at SET-SPLIT er NP-hardt.
Gjør dette ved å vise 3SAT $\leq_p$ SET-SPLIT.

Må konstruere en polynomisk tid beregnbar funksjon f som "oversetter" 3SAT problemer til SET-SPLIT.
Vil ha

$$\phi \in 3SAT \iff f(\phi) \in SET\text{-}SPLIT$$

f fungerer slik: En 3SAT formel er

$$\phi = C_1 \wedge C_2 \wedge \cdots \wedge C_k, \quad C_i = (c_1 \vee c_2 \vee c_3),$$

$\langle\phi\rangle$ har literaler $x_1, \overline{x}_1, \ldots, x_m, \overline{x}_m$.

La $S = \{x_1, \overline{x}_1, \ldots, x_m, \overline{x}_m, y\}$, hvor y er et ekstra element vi legger til.
For hver klausul C_i i ϕ, la G_i bestå av literalene som forekommer i C_i. Pluss elementet a.

består av literalene som forekommer i C_i, pluss elementet y.

Da er $G_i \subseteq S$ for alle i.

Putter alle G_i inn i en mengde C.

For å unngå problemer når ϕ er den tomme konjunksjonen, lar vi også $G_{x_i} = \{x_i, \overline{x_i}\}$ for alle literalene x_i være i C. Da har vi at

$C = \{G_1, \ldots, G_k, G_{x_1}, \ldots, G_{x_m}\}$

Da har vi fra $\langle \phi \rangle$ konstruert $\langle S, C \rangle$.

Må vise at $\phi \in 3SAT \iff f(\phi) = \langle S, C \rangle \in SET\text{-}SPLIT$.

Hvis $\phi \in 3SAT$ lar vi s være "assignmentet" av literalene som gjør ϕ sann.

Farg alle literalene som er sanne røde, og alle usanne blå, og farg y blå.

Fra konstruksjon av $f(\phi) = \langle S, C \rangle$ vil alle delmengdene i C inneholde minst et rødt og et blått element hver.

Så da er $f(\phi) = \langle S, C \rangle \in SET\text{-}SPLIT$.

Vis også at hvis $\phi \notin 3SAT$, så er $f(\phi) = \langle S, C \rangle \notin$ SET-SPLIT.

Lekse å vise dette selv!

Da har vi vist at $3SAT \leq_p$ SET-SPLIT.

Ved teorem 7.36 er SET-SPLIT NP-komplett.