UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i:	IN3190/4190 og INF3470/4470 — Digital signalbehandling
Eksamensdag:	Konteeksamen 2019
Tid for eksamen:	09:00 – 13:00
Oppgavesettet er på 5 sider.	
Vedlegg:	Ingen
Tillatte hjelpemidler:	Ingen

Kontroller at oppgavesettet er komplett før
du begynner å besvare spørsmålene.

Oppgave 1 Sampling

Et kontinuerlig-tid signal er gitt ved

$$x_{\mathrm{c}}(t) = \sin(30\pi t) + \cos(60\pi t).$$

1a Samplingsperiode **Points: 1**

Vi sampler signalet $x_{\mathrm{c}}(t)$ med en samplingsperiode T for å få diskret-tidsignalet

$$x[n] = \sin\left(\frac{\pi n}{5}\right) + \cos\left(\frac{2\pi n}{5}\right).$$

Finn et valg av T som er konsistent med denne informasjonen.

1b Samplingsperiode unikhet **Points: 2**

Er ditt valg av T i Del (a) unikt? Hvis så, forklar hvorfor. Hvis ikke, gi et annet valg av T som er konsistent med den oppgitte informasjonen og vis at diskret-tid signalet x[n] som du nå får er det samme som i Oppgave 1a.

Oppgave 2 LTI-systemer

2a Periodiske sekvenser **Points: 2**

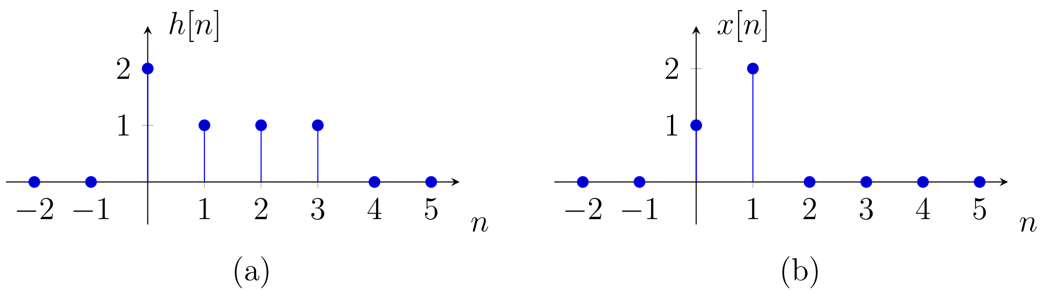
Gitt to periodiske signaler $x_1[n]$ og $x_2[n]$ med fundamentale perioder gitt som henholdsvis N_1 og N_2.

1. Hva er kravet for at signalet $x[n] = x_1[n] + x_2[n]$ skal være periodisk?
2. Hva vil så den fundamentale perioden til signalet $x[n]$ være?

(Fortsettes på side 2.)

2b Response til et LTI-system **Points: 2**

La $h[n]$ (gitt i Figur 1(a)) være impulsresponsen til et LTI-system. Finn responsen $y[n]$ når $x[n]$ (gitt i Figur 1(b)) er inputsignalet.



Figur 1 – Impulsresponsen (gitt i (a)) og inputsignalet (gitt i (b)) til et LTI-system.

2c z-transform **Points: 2**

Vis at z-transformen til signalet $x[n] = (\frac{1}{3})^n u[n] + 2^n u[-n-1]$ er $X(z) = \frac{-5z}{3z^2-7z+2}$. Bestem dets konvergensregion (ROC).

Oppgave 3 Transformanalyse av LTI-system

Vi har et system gitt ved

$$y[n] = \frac{1}{2}(x[n] - x[n-1] - y[n-1]).$$

3a Frekvensrespons **Points: 2**

Vis at frekvensresponsen $H\left(e^{j\omega}\right)$ til dette systemet kan uttrykkes ved

$$H\left(e^{j\omega}\right) = \frac{j}{2} \cdot \tan\left(\frac{\omega}{2}\right).$$

3b Magnituderespons **Points: 2**

Finn et uttrykk for magnituderesponsen $|H\left(e^{j\omega}\right)|$ til dette systemet, og plott det. Pass på å sette på aksebenevninger.

3c Faserespons **Points: 2**

Finn et uttrykk for faseresponsen $\angle\left(H\left(e^{j\omega}\right)\right)$ til dette systemet, og plott det. Pass på å sette på aksebenevninger.

(Fortsettes på side 3.)

Oppgave 4 FIR-filtre

4a Ideelt lavpassfilter **Points: 2**

Et ideelt lavpassfilter med lineær fase er gitt ved

$$H_{\mathrm{lp}} = \begin{cases} e^{-j\alpha\omega}, & |\omega| < \omega_c \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Finn et enkelt uttrykk for impulsresponsen $h_{\mathrm{lp}}[n]$ til dette filteret.

Hvilke betingelser må α tilfredsstille slik at det korresponderende diskret-tid-filteret har en lineær faserespons?

4b Linear phase filters **Points: 2**

Der er fire typer filtre som følger av betingelsen som er nevnt i Oppgave 4a. Forklar forskjellene og likheter mellom filtertypene. I svaret ditt kan du gjerne inkludere en tabell som viser filtertypene, og bruk 50 ord eller mindre for å forklare tabellen.

4c Symmetrisk impulsrespons **Points: 2**

Anta at vi har et filter med symmetrisk impulsrespons med partallsorden M, dvs.

$$h[n] = h[M-n], \quad 0 \leq n \leq M.$$

Vis at dette filteret har en lineær faserespons. Hva er gruppeforsinkelsen τ_{gd} til dette filteret?

(Fortsettes på side 4.)

Formelsamling

Cosinus og sinus av vinkler i radianer

Vinkel θ i radianer	$\cos(\theta)$	$\sin(\theta)$
0	1	0
$\frac{\pi}{6}$	0.866	0.5
$\frac{\pi}{4}$	0.707	0.707
$\frac{\pi}{3}$	0.5	0.866
$\frac{\pi}{2}$	0	1
$\frac{2\pi}{3}$	-0.5	0.866
$\frac{2\pi}{3}$	-0.707	0.707
$\frac{5\pi}{6}$	-0.866	0.5
π	-1	0

Grunnleggende sammenhenger:

$$
\begin{aligned}
\sin(\alpha \pm \beta) &= \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta \\
\cos(\alpha \pm \beta) &= \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta \\
\sin 2\alpha &= 2\sin\alpha\cos\alpha \\
\cos 2\alpha &= \cos^2\alpha - \sin^2\alpha \\
\sin\alpha + \sin\beta &= 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \\
\sin\alpha - \sin\beta &= 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2} \\
\cos\alpha + \cos\beta &= 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \\
\cos\alpha - \cos\beta &= -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2} \\
\cos^2\alpha + \sin^2\alpha &= 1 \\
\cos\alpha &= \frac{1}{2}(e^{\jmath\alpha} + e^{-\jmath\alpha}) \\
\sin\alpha &= \frac{1}{2\jmath}(e^{\jmath\alpha} - e^{-\jmath\alpha}) \\
\sum_{n=0}^{N-1} a^n &= \begin{cases} N & \text{for } a = 1 \\ \frac{1-a^N}{1-a} & \text{ellers} \end{cases} \\
ax^2 + bx + c = 0 &\Leftrightarrow x_{\pm} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}
\end{aligned}
$$

Konvolusjon:

$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[n-k]h[k] = h[n] * x[n]$$

Diskret tid Fouriertransformasjon (DTFT):

$$
\begin{aligned}
\text{Analyse:} \quad X(\Omega) &= = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-\jmath\Omega n} \\
\text{Syntese:} \quad x[n] &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(\Omega)e^{\jmath\Omega n}d\Omega
\end{aligned}
$$

(Fortsettes på side 5.)

Diskret Fouriertransformasjon (DFT):

$$\begin{aligned}\text{Analyse:} \qquad X[k] &= \sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-j2\pi kn/N}, \quad 0 \leq k \leq N-1 \\ \text{Syntese:} \qquad x[n] &= \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X[k]e^{j2\pi kn/N}, \quad 0 \leq k \leq N-1\end{aligned}$$

z-transformasjonen:

$$\text{Analyse:} \qquad X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n}$$