ØV6 — Transformanalyse 2

Innleveringsfrist: **25. september** 2020.

Ukeoppgavene skal løses selvstendig og vurderes i øvingstimene. Det forventes at alle har satt seg inn i fagets øvingsopplegg og godkjenningskrav for øvinger. Dette er beskrevet påhjemmesiden til IN3190:
`http://www.uio.no/studier/emner/matnat/ifi/IN3190/h20/informasjon-om-ovingsopplegget/`

Oppgave 1 — Oppgave 5.41 fra læreboka: Matlab/Python 3 Poeng

5.41 (Frequency Response of Averaging Filters) The averaging of data uses both FIR and IIR filters. Consider the following averaging filters:

Filter 1: $y[n] = \dfrac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} x[n-k]$ (*N*-point moving average)

Filter 2: $y[n] = \dfrac{2}{N(N+1)}\sum_{k=0}^{N-1} (N-k)x[n-k]$ (*N*-point weighted moving average)

Filter 3: $y[n] - \alpha y[n-1] = (1-\alpha)x[n], \quad \alpha = \frac{N-1}{N+1}$ (first-order exponential average)

(a) Confirm that the dc gain of each filter is unity. Which of these are FIR filters?

(b) Sketch the frequency response magnitude of each filter with $N = 4$ and $N = 9$. How will the choice of N affect the averaging?

(c) To test your filters, generate the signal $x[n] = 1-(0.6)^n$, $0 \le n \le 300$, add some noise, and apply the noisy signal to each filter and compare the results. Which filter would you recommend?

Bruk MATLAB/Python!

$\boxed{\text{Filter 3: } H\left(e^{j\omega}\right) = \frac{1-\alpha}{1-\alpha e^{-j\omega}}}$

Oppgave 2- oppgave 3.4 fra Manolakis 2 Poeng

Use the method of partial fraction expansion to determine the sequences corresponding to the following z-transforms:

(a) $X(z) = \frac{1-\frac{1}{3}z^{-1}}{(1-z^{-1})(1+2z^{-1})}$, all possible ROCs.

(b) $X(z) = \frac{1-z^{-1}}{1-\frac{1}{4}z^{-1}}$, $x[n]$ is causal. $\boxed{\text{Hint: bruk Tabell 3.1 og delbrøksoppspaltning}}$

(c) BONUS: $X(z) = \frac{1}{(1-0.5z^{-1})(1-0.25z^{-1})}$, $x[n]$ is absolutely summable.

Table 3.1 Some common z-transform pairs

	Sequence $x[n]$	z-Transform $X(z)$	ROC
1.	$\delta[n]$	1	All z
2.	$u[n]$	$\frac{1}{1-z^{-1}}$	$\lvert z\rvert > 1$
3.	$a^n u[n]$	$\frac{1}{1-az^{-1}}$	$\lvert z\rvert > \lvert a\rvert$
4.	$-a^n u[-n-1]$	$\frac{1}{1-az^{-1}}$	$\lvert z\rvert < \lvert a\rvert$
5.	$na^n u[n]$	$\frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$	$\lvert z\rvert > \lvert a\rvert$
6.	$-na^n u[-n-1]$	$\frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$	$\lvert z\rvert < \lvert a\rvert$
7.	$(\cos\omega_0 n)u[n]$	$\frac{1-(\cos\omega_0)z^{-1}}{1-2(\cos\omega_0)z^{-1}+z^{-2}}$	$\lvert z\rvert > 1$
8.	$(\sin\omega_0 n)u[n]$	$\frac{(\sin\omega_0)z^{-1}}{1-2(\cos\omega_0)z^{-1}+z^{-2}}$	$\lvert z\rvert > 1$
9.	$(r^n\cos\omega_0 n)u[n]$	$\frac{1-(r\cos\omega_0)z^{-1}}{1-2(r\cos\omega_0)z^{-1}+r^2z^{-2}}$	$\lvert z\rvert > r$
10.	$(r^n\sin\omega_0 n)u[n]$	$\frac{(\sin\omega_0)z^{-1}}{1-2(r\cos\omega_0)z^{-1}+r^2z^{-2}}$	$\lvert z\rvert > r$

Oppgave 3— Revidert oppg. 3.15 fra læreboken (Manolakis & Ingle): 3 Poeng

Et LTI system har følgende differensligning (input/output forhold):

$$y[n] = \frac{3}{4}y[n-1] - \frac{1}{8}y[n-2] + x[n]$$

a) Vis at systemfunksjonen $H(z)$ er lik uttrykket under. Hva er ROC? Er systemet stabilt? 1 p.

$$H(z) = \frac{1}{(1-\frac{1}{4}z^{-1})(1-\frac{1}{2}z^{-1})}$$

b) Finn impulsresponsen $h[n]$ til systemet. Hint: Delbrøksoppspaltning og Tabell 3.1 .5 p.

c) Finn stepresponsen $s[n]$ til systemet, mao. hva er $y[n]$ når $x[n] = u[n]$? .5 p.

d) Du skal nå bruker $filter$-funksjonen til MATLAB for å verifisere uttrykkene du kom frem til i b) og c). Plott uttrykket du har for $h[n]$ for $0 < n < 10$ i en figur, og $s[n]$ i en annen. Når man slår opp $filter$-funksjonen, finner man at "$y = filter(b, a, x)$ filters the input data x using a rational transfer function defined by the numerator and denominator coefficients b and a." Hva er vektorkoeffisientene a og b for vårt system her? Hint: se kapittel 3.7 i Rao. Plott og sammenlign hva slags uttrykk du får for $h[n]$ og $s[n]$ ved å bruke denne $filter$-funksjonen isteden. 1 p.

Oppgave 4— Tema: Sammenhenger frekvensresponser og poler/nullpunkter. Oppgave 5.07 fra læreboka (Manolakis & Ingle). : 2 Poeng

Determine the system function, magnitude response, and phase response of the following systems and use the pole-zero pattern to explain the shape of their magnitude response:

(a) $y[n] = \frac{1}{2}(x[n] - x[n-1])$, $\boxed{|H(e^{j\omega})| = |sin(\omega/2)|,\ \angle H(e^{j\omega}) = \pi/2 - \omega/2}$

(b) $y[n] = \frac{1}{2}(x[n] - x[n-2])$, Hint: Gjenbruk (a), så sparer du regning. $|H(e^{j\omega})| = |sin(\omega)|$, $\angle H(e^{j\omega}) = \pi/2 - \omega$

Generelt hint til forenkling: *Trigonometriske identiteter!*