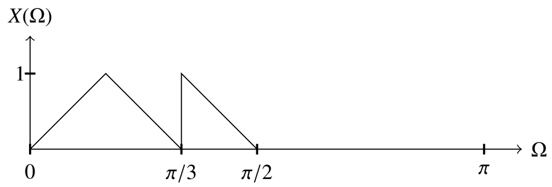
ØV12 — MULTIRATE

Innleveringsfrist: **20. november** 2020.

Ukeoppgavene skal løses selvstendig og vurderes i øvingstimene. Det forventes at alle har satt seg inn i fagets øvingsopplegg og godkjenningskrav for øvinger. Dette er beskrevet påhjemmesiden til IN3190:
`http://www.uio.no/studier/emner/matnat/ifi/IN3190/h20/informasjon-om-ovingsopplegget/`

Oppgave 1 — Opp- og nedsampling 1.5 Points

Et signal $x[n]$ har Fourier transformasjon $X(\Omega)$ som gitt under



Signalet benyttes som inngangssignal på systemene I og II definert under:

I: $x[n] \rightarrow \boxed{\uparrow 3} \rightarrow w_1[n] \rightarrow \boxed{H_0(z)} \rightarrow z_1[n] \rightarrow \boxed{\downarrow 2} \rightarrow y_1[n]$

II: $x[n] \rightarrow \boxed{\downarrow 2} \rightarrow w_2[n] \rightarrow \boxed{\uparrow 3} \rightarrow z_2[n] \rightarrow \boxed{H_0(z)} \rightarrow y_2[n]$

"$\rightarrow \boxed{\downarrow M} \rightarrow$" betyr nedsampling med faktor M (beholde hvert Mte sampel) og "$\rightarrow \boxed{\uparrow N} \rightarrow$" betyr null-interpolering med faktor N (sette inn $N-1$ nuller mellom hvert sampel). $H_0(z)$ er et ideelt lavpassfilter med cut-off frekvens $w_c = \pi/3$ og forsterkning (gain) lik 2.

For begge systemer, skisser Fourier transformasjonen til signalene $w_1[n]$, $w_2[n]$, $z_1[n]$, $z_2[n]$, $y_1[n]$ og $y_2[n]$. Husk akser og benevning på alle plott. (1/4 poeng for hvert rett plott).

Oppgave 2 — MA-filtre 2 Points

Et MA-filter av orden $K-1$ er et kausalt FIR-filter med K koeffisienter, og en impulsrespons gitt ved:

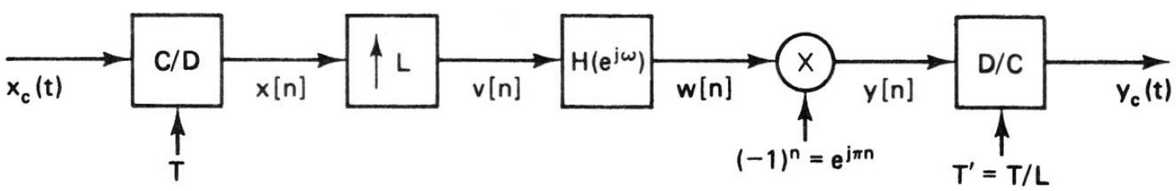
$$h[n] = \frac{1}{K}\sum_{k=0}^{K-1} \delta[n-k] \tag{1}$$

a) Finn frekvensresponsen $H(\Omega)$ til MA-filteret av orden $K-1$.
b) Finn ved regning hvor mange nullpunkter et MA-filter av orden $K-1$ har, og hvilke frekvenser de nuller ut.
c) Hvilke ordner kan et MA-filter ha hvis det skal nulle ut frekvensen $\Omega = \frac{\pi}{P}$, der P er et heltall.
d) Vis at et MA-filter av orden $K-1$ kan implementeres som et FIR-filter med impulsrespons $h_{FIR}[n]$ i kaskade med et IIR-filter med impulsrespons $h_{IIR}[n]$ der

$$h_{FIR}[n] = \frac{1}{K}(\delta[n] - \delta[n-K]), \quad h_{IIR}[n] = u[n] \tag{2}$$

Oppgave 3 — Opp- og nedsampling 2 Points

Et analogt signal $x_c(t)$ konverteres til et digitalt signal, oppsamples og filtreres før det multipliseres med signalet $e^{j\pi n}$. Deretter utføres en kombinert nedsampling og konvertering tilbake til et analogt signal. Systemet er vist skjematisk i figuren under.

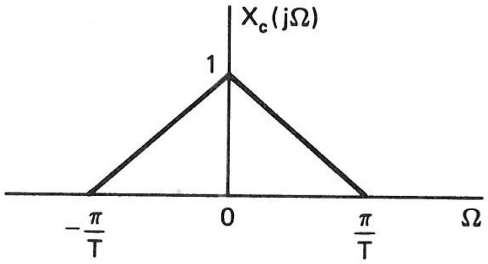


Skjematisk skisse av system.

Filteres som benyttes i systemet er spesifisert som følger:

$$H(\omega) = H(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & |\omega| < \pi/L, \\ 0, & \pi/L < |\omega| \leq \pi. \end{cases}$$

Inngangsignalet $x_c(t)$ har amplitudespekter, $X_c(j\Omega)$, som følger:



Amplitudespekter til inngangsignal $x_c(t)$.

a) Skisser spektrene til $x[n]$, $v[n]$, $w[n]$, $y[n]$ og $y_c(t)$ hvor dette er signalene som vist i skissen av systemet over.

Oppgave 4 — Flervalgsoppgave 2.5 Points

I de følgende 5 deloppgavene er det gitt flere svaralternativer, kun ett av disse er riktig. Du må angi ett og bare ett svaralternativ for hver deloppgave. Rett svar gir 1/2 poeng, galt svar gir -1/4 poeng, åpent svar gir 0 poeng. Gardering (mer enn ett svar på en deloppgave) gir 0 poeng.

Oppgave 4-1

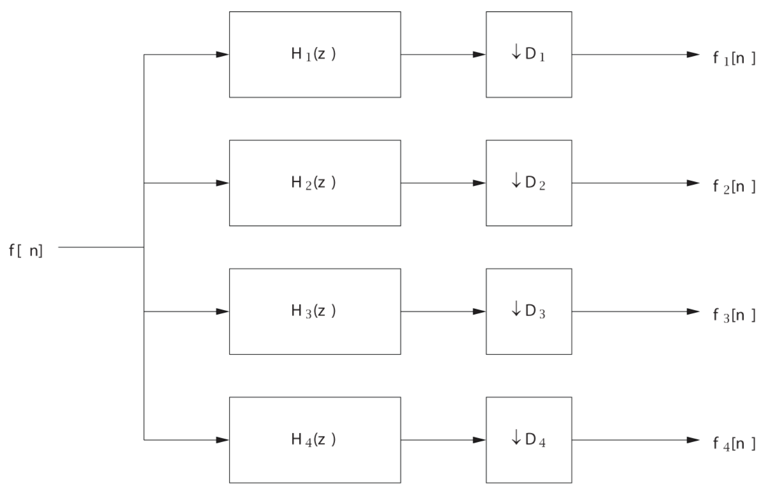
Figur 1 viser en anvendelse av multi-rate signalbehandling, kalt en *filterbank*, som blir brukt i f.eks. MP3-koding. Filterbanken splitter et innsignal $f[n]$ (som her antas samplet ved laveste frekvens som tilfredsstiller Shannons samplingsteorem) opp i 4 delsignaler $f_1[n]$, $f_2[n]$, $f_3[n]$ og $f_4[n]$. Filtrene $H_1(z), \cdots, H_4(z)$ er ideelle båndpass-filtre med magnituderespons som vist i Figur 2. Disse filtrene blir brukt til å båndbegrense de 4 delsignalene. Anta at nedsamplingsfaktorene $D_1, \cdots, D_4$ velges slik at hvert delsignal er samplet med laveste samplingsrate som tilfredsstiller Shannons samplingsteorem. Avgjør om summen av antall sampler pr. sekund for signalene $f_1[n], \cdots, f_4[n]$ er, i forhold til antall sampler pr. sekund for signalet $f[n]$: 0.5 p.

a) Større.

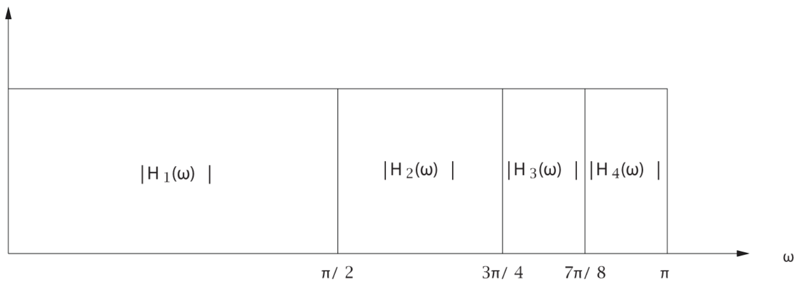
b) Like stort.

c) Mindre.

d) Dette er umulig å avgjøre ut fra informasjonen gitt i oppgaveteksten.



Figur 1: Oppgave 4-1



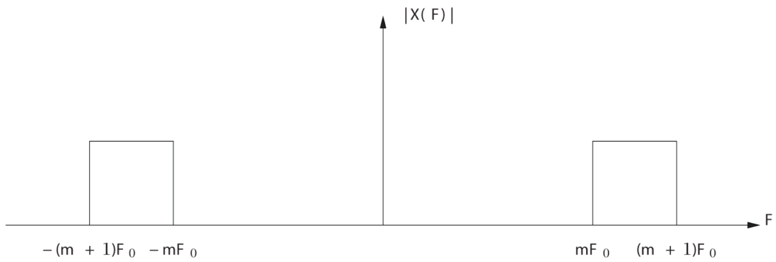
Figur 2: Oppgave 4-1

Oppgave 4-2

Gitt et signal $x(t)$ i kontinuerlig tid, med magnitudespektrum $|X(F)|$ som vist i Figur 3. Hva er minste tilstrekkelige samplingsrate for dette signalet? 0.5 p.

a) $2(m+1)F_0 - 2mF_0$ **b)** $2mF_0 + 2F_0$

c) $2[(m+1)F_0 + mF_0]$ **d)** $(2m+1)F_0$



Figur 3: Oppgave 4-2

Oppgave 4-3

I multi-rate signalbehandling kan vi endre samplingsraten fra f_s til en vilkårlig brøk $\frac{I}{D} f_s$ ved å kombinere oppsampling med en faktor I og nedsampling med en faktor D. Hvis I og D er store tall som ikke er primtall ($I = I_1 I_2 \cdots I_M$, $D = D_1 D_2 \cdots D_N$), så er det mulig å gjennomføre oppsampling og nedsampling i hhv. M og N steg. Under er det gitt fire ulike implementasjoner som alle endrer samplingsraten fra f_s til $\frac{16}{25} f_s$, der $H_m(z)$ er et lavpassfilter med knekkfrekvens π/m. Hvilken av implementasjonene har minst tap av informasjon gitt et inn-signal der f_s tilsvarer Nyquist-raten? 0.5 p.

a) $\rightarrow \boxed{\uparrow 4} \rightarrow \boxed{H_5(z)} \rightarrow \boxed{\downarrow 5} \rightarrow \boxed{\uparrow 4} \rightarrow \boxed{H_5(z)} \rightarrow \boxed{\downarrow 5} \rightarrow$

b) $\rightarrow \boxed{\uparrow 4} \rightarrow \boxed{H_4(z)} \rightarrow \boxed{\uparrow 4} \rightarrow \boxed{H_5(z)} \rightarrow \boxed{\downarrow 5} \rightarrow \boxed{H_5(z)} \rightarrow \boxed{\downarrow 5} \rightarrow$

c) $\rightarrow \boxed{H_5(z)} \rightarrow \boxed{\downarrow 5} \rightarrow \boxed{\uparrow 4} \rightarrow \boxed{H_4(z)} \rightarrow \boxed{\uparrow 4} \rightarrow \boxed{H_5(z)} \rightarrow \boxed{\downarrow 5} \rightarrow$

d) $\rightarrow \boxed{H_5(z)} \rightarrow \boxed{\downarrow 5} \rightarrow \boxed{H_5(z)} \rightarrow \boxed{\downarrow 5} \rightarrow \boxed{\uparrow 4} \rightarrow \boxed{H_4(z)} \rightarrow \boxed{\uparrow 4} \rightarrow \boxed{H_4(z)} \rightarrow$

e) Det er umulig å avgjøre uten mer informasjon om signalet.

Oppgave 4-4

Gitt et filter $h[n]$ med systemfunksjon $H(z) = \frac{1-1.6z^{-1}+z^{-2}}{1-1.5z^{-1}+0.8z^{-2}}$. Hvor mye forsterker dette filteret dc-komponenten (dvs. komponenten med frekvens $f = 0$) i et signal? 0.5 p.

a) 0 **b)** 1.33

c) 1 **d)** 1.6

Oppgave 4-5

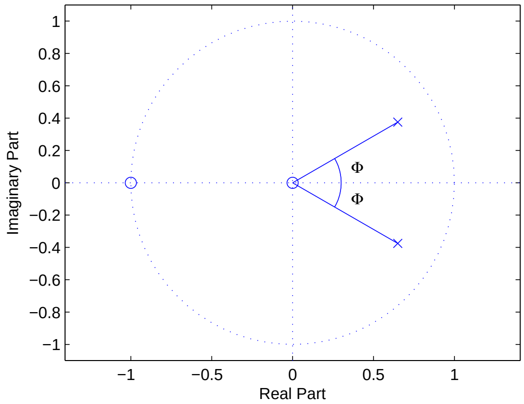
Et filter har pol-nullpunkts plott som gitt i Figur 4. Hvilken av følgende differanselikninger beskriver dette systemet? 0.5 p.

a) $y[n] = -4.7880y[n-1] - 0.5630y[n-2] + x[n] + x[n-1]$

b) $y[n] = 1.2990y[n-1] - 0.5625y[n-2] + x[n] + x[n-1]$

c) $y[n] = -1.7190y[n-1] - 0.5620y[n-2] + x[n] + x[n-1]$

d) $y[n] = 2.5y[n-1] - 0.5610y[n-2] + x[n] + x[n-1]$



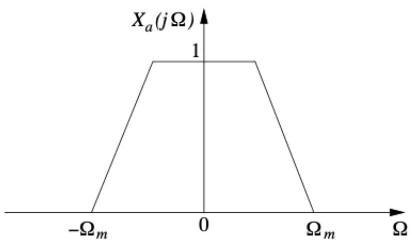
Figur 4: Oppgave 4-5

Oppgave 5 — Sampling og nedsampling 2 Points

Vi har gitt et båndbegrenset signal $x_a(t)$ med en kontinuerlig-tid Fourier transform $X_a(j\Omega)$ som er symmetrisk om $\Omega = 0$, gitt for $\Omega \geq 0$ ved

$$X_a(j\Omega) = \begin{cases} 1, & 0 \leq \Omega \leq \Omega_m/2 \\ 2 - \frac{2\Omega}{\Omega_m}, & \frac{\Omega_m}{2} < \Omega \leq \Omega_m \\ 0, & \Omega > \Omega_m. \end{cases}$$

En skisse av $X_a(j\Omega)$ er vist i Figur 1. Signalet $x_a(t)$ samples så til sekvensen $x[n]$ med samplingsperioden $T = \pi/(2\Omega_m)$.



Figur 1: $x_a(t)$ vist i frekvensdomenet.

Oppgave a

Lag en skisse av $X(e^{j\omega})$ for $0 \leq \omega < 2\pi$.

Oppgave b

$x(n)$ nedsamples så med en faktor 4 til $x_d(n)$. Forklar sammenhengen mellom $X(e^{j\omega})$ og $X_d(e^{j\omega})$. Bruk dette til å lage en skisse av $\left|X_d(e^{j\omega})\right|$ for $0 \leq \omega < 2\pi$.