UNIVERSITETET
I OSLO

INF2220: Forelesning 12

Kombinatorisk søking

Beregnbarhet og kompleksitet

UNIVERSITETET
I OSLO

KOMBINATORISK SØKING

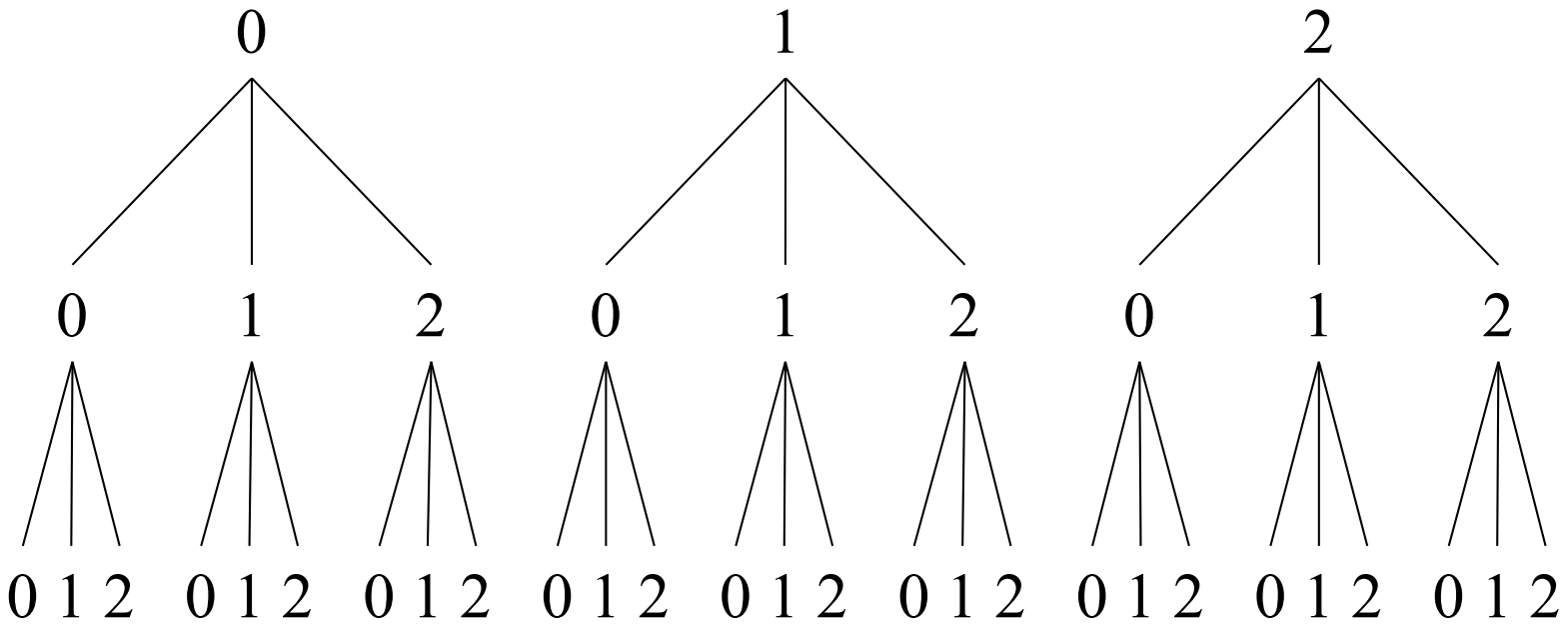
Oversikt

- Generering av permutasjoner
  - Lett: Sekvens-generering
  - Vanskelig: Alle tallene må være forskjellige
- Eksempel: Finne korteste reiserute
- Eksempel: Dronning-oppgaven
- Mer direkte generering av permutasjoner

Les notatet ”Kombinatorisk søking, rekursjon, avskjæring” av Stein Krogdahl og Arne Maus.

Sekvens-generering

Alle mulige sekvenser av lengde tre av tallene 0, 1 og 2:



Sekvens-generering: mulig implementasjon

Oppgave:
Generaliser dette til å generere alle mulige sekvenser av lengde n av tallene fra 0 til n-1.

```
// Startkall: gen3(0);

int[] p = new int[3];

void gen3(int plass) {
    for (int siffer = 0; siffer < 3; siffer++) {
        p[plass] = siffer;
        if (plass < 2) {
            gen3(plass + 1);
        } else {
            System.out.println(""+p[0]+p[1]+p[2]);
        }
    }
}
```

Generalisering

Alle mulige sekvenser av lengde n av t

Oppgave:
Hva må til for å endre dette slik at det bare genereres sekvenser hvor alle sifrene er ulike?

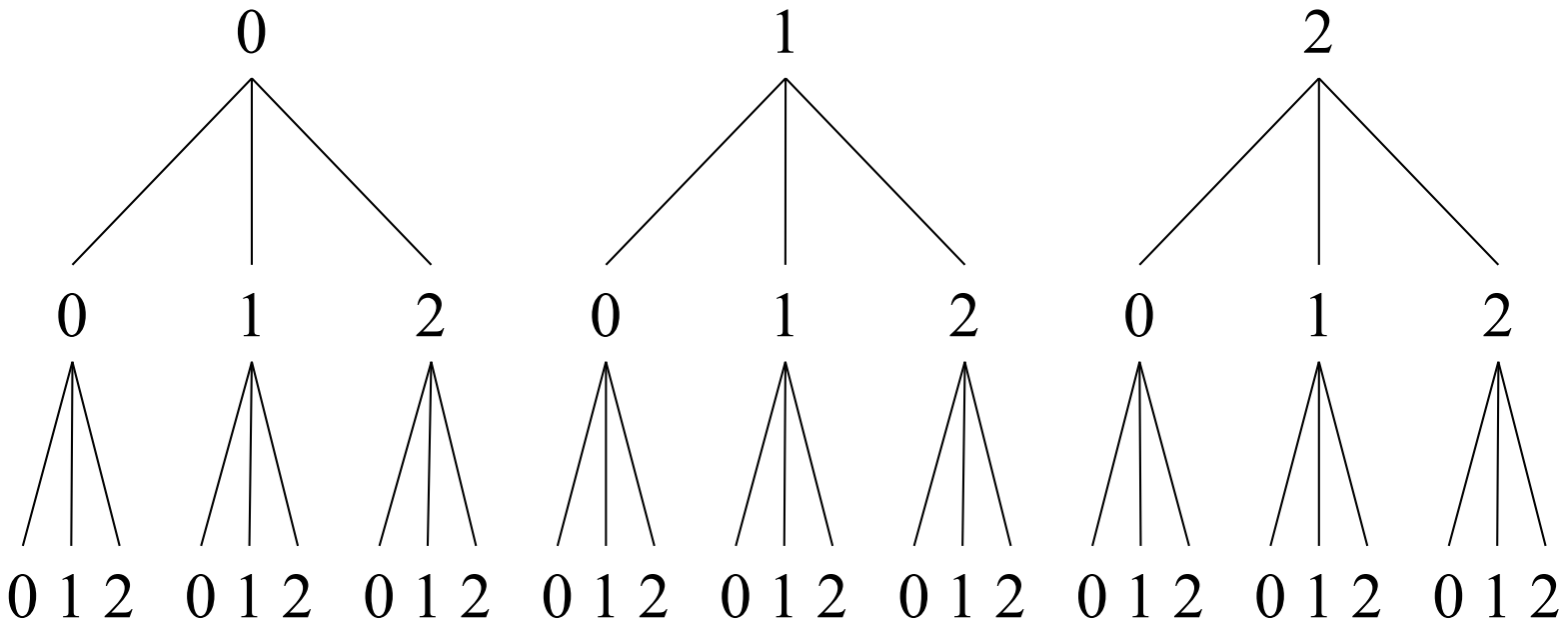
```
class Gen {
    int[] p; int n;

    Gen(int i) { n = i; p = new int[n]; }

    void gen(int plass) {
        for (int siffer = 0; siffer < n; siffer++) {
            p[plass] = siffer;
            if (plass < n - 1) {
                gen(plass + 1);
            } else {
                for (int i = 0; i < n; i++) {
                    System.out.print(p[i]);
                }
                System.out.print("\n");
            }
        }
    }
}
```

Permutasjoner

Alle mulige kombinasjoner av tallene 1-3 slik at hvert tall bare er brukt en gang:



Permutasjoner

Alle mulige permutasjoner av tallene fra 0 til n-1:

```
class Gen {
    int[] p; int n; boolean[] brukt;
    Gen(int i) {
        n = i; p = new int[n]; brukt = new boolean[n];
        for (int j=0; j<n; j++) { brukt[j] = false; }
    }

    void gen(int plass) {
        for (int siffer = 0; siffer < n; siffer++) {
            if (!brukt[siffer]) {
                brukt[siffer] = true;
                p[plass] = siffer;
                if (plass < n - 1) { gen(plass + 1); }
                else { < Lever p til videre bruk. > }
                brukt[siffer] = false;
            }
        }
    }
}
```

Kombinatorisk søking

Har: Et endelig antall elementer.
Skal: Finne en rekkefølge, gjøre et utplukk, lage en oppdeling, …

Eksempler:

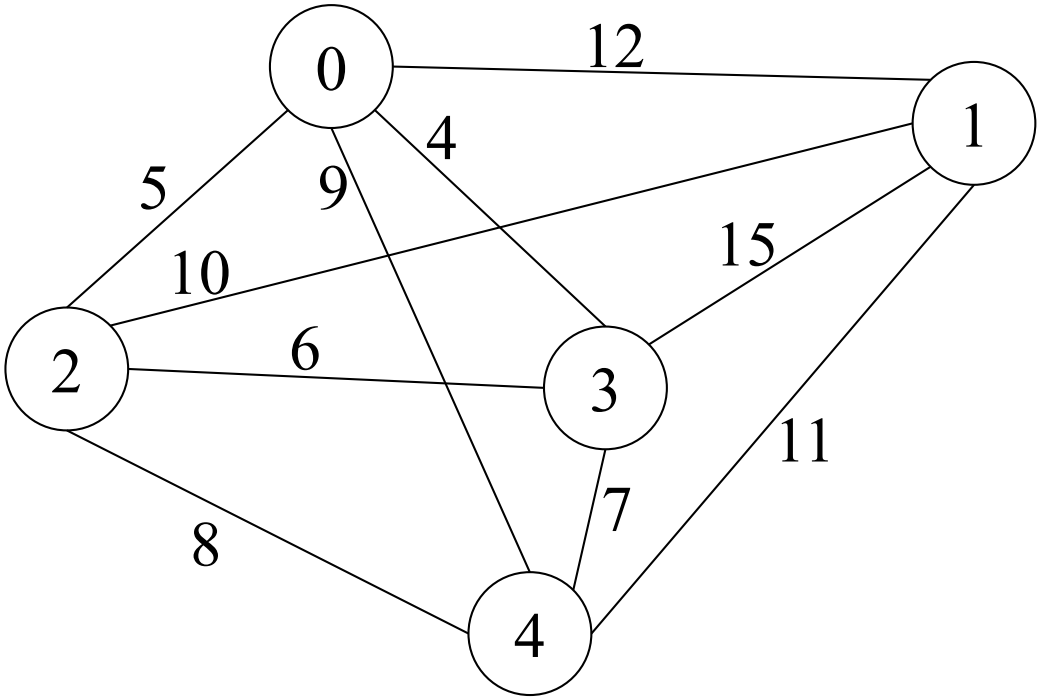
- Plassere 8 dronninger på et sjakkbrett slik at ingen av dronningene kan slå hverandre.
- Finne korteste rundtur blant 'n' byer hvor hver by bare besøkes en gang (avstanden mellom ethvert par av byer er kjent).

Vi har da problemer hvor vi må:

1. Lage alle interessante kombinasjoner.
2. Teste om en kombinasjon er en løsning på det aktuelle problemet.

NB: Ofte slår vi disse sammen, slik at vi bare lager kombinasjoner som er potensielle løsninger.

Eksempel: Korteste reiserute



Korteste vei: 36.0

Korteste reiserute (by nr): 0 2 1 4 3 0

Korteste reiserute

UNIVERSITETET I OSLO

- nytt navn finnVeier, variabelnavn ”by” i stedet for ”siffer”
- startkall: finnVeier(1); p[0] = 0 er startbyen

```
void finnVeier(int plass) {
    for (int by = 1; by < n; by++) {
        if (!brukt[by]&&
            !(lengde + avstand[p[plass-1]][by] >= minLengde)){
            brukt[by] = true;
            lengde += avstand[p[plass-1]][by];
            p[plass] = by;
            if (plass < n - 1) {
                finnVeier(plass + 1);
            } else if (lengde + avstand[by][0] < minLengde) {
                minLengde = lengde + avstand[by][0];
                < Lever p til videre bruk. >
            }
            brukt[by] = false;
            lengde -= avstand[p[plass-1]][by];
        }
    }
}
```

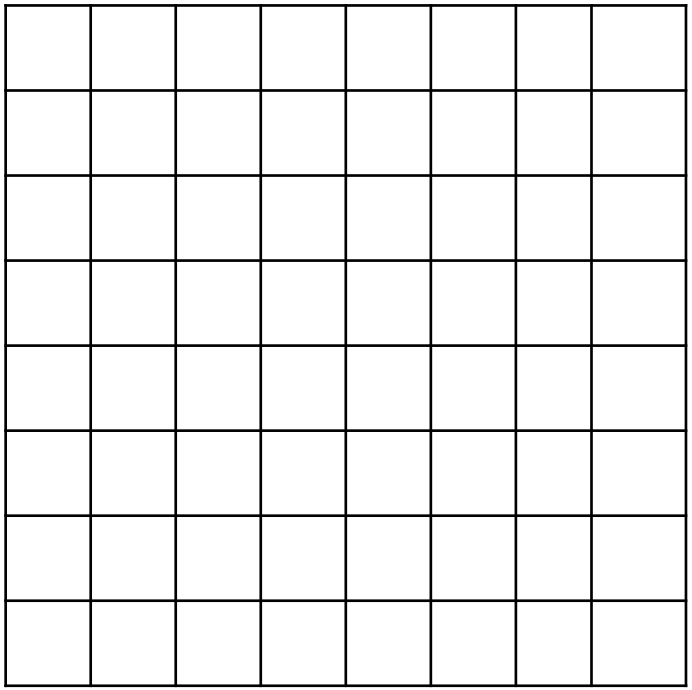
float lengde: lengden på nåværende rute

float[][] avstand: avstanden mellom ethvert par av byer

float minlengde: korteste hittil

Dronningproblemet

- Hvordan plassere n dronninger på et nxn-sjakkbrett slik at ingen av dronningene kan slå hverandre?



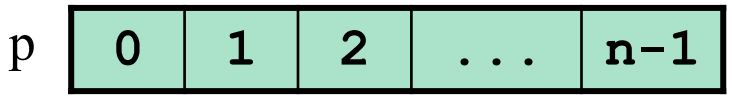
Alternativ generering av permutasjoner

En mer direkte (og mer effektiv?) generering av permutasjoner.

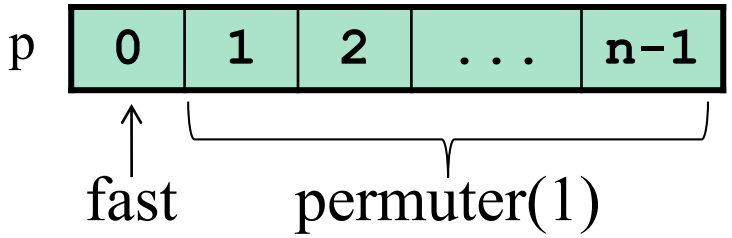
- Initielt: Arrayen p inneholder de aktuelle elementene.

- Metoden permuter(i):
  - Skal generere alle permutasjoner fra og med indeks i.
  - Skal levere tilbake arrayen p slik den var da metoden ble kalt.

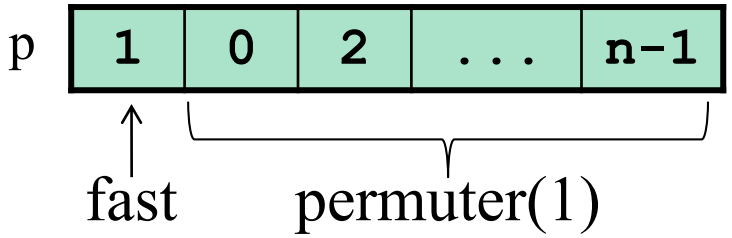
Initielt:



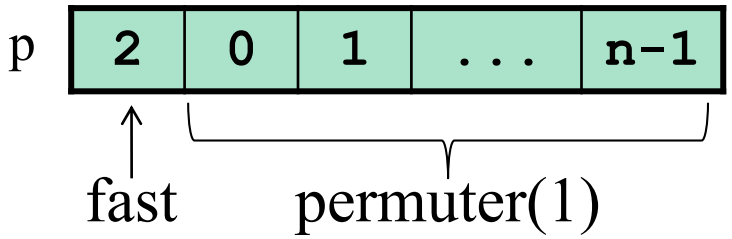
Alle som begynner med 0:



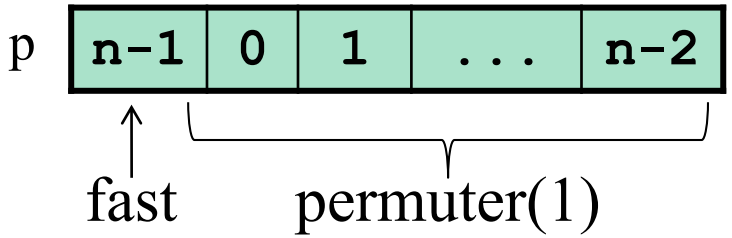
Alle som begynner med 1:



Alle som begynner med 2:



Alle som begynner med n-1:



Direkte generering av permutasjoner

```
// Startkall: permuter(0);

void permuter(int i) {
    if (i == n - 1) {
        < Lever p til videre bruk. >
    } else {
        permuter(i + 1);
        for (int k = i + 1; k < n; k++) {
            bytt(i,k);
            permuter(i + 1);
        }
        roterVenstre(i);
    }
}
```

Hjelpemetodene bytt og roterVenstre

```
void bytt(i,j) {
    int tmp = p[i];
    p[i] = p[j];
    p[j] = tmp;
}
```

```
void roterVenstre(int i) {
    int tmp = p[i];
    for (int k = i + 1; k < n; k++) {
        p[k - 1] = p[k];
    }
    p[n-1] = tmp;
}
```

Repetisjon kombinatorisk søking

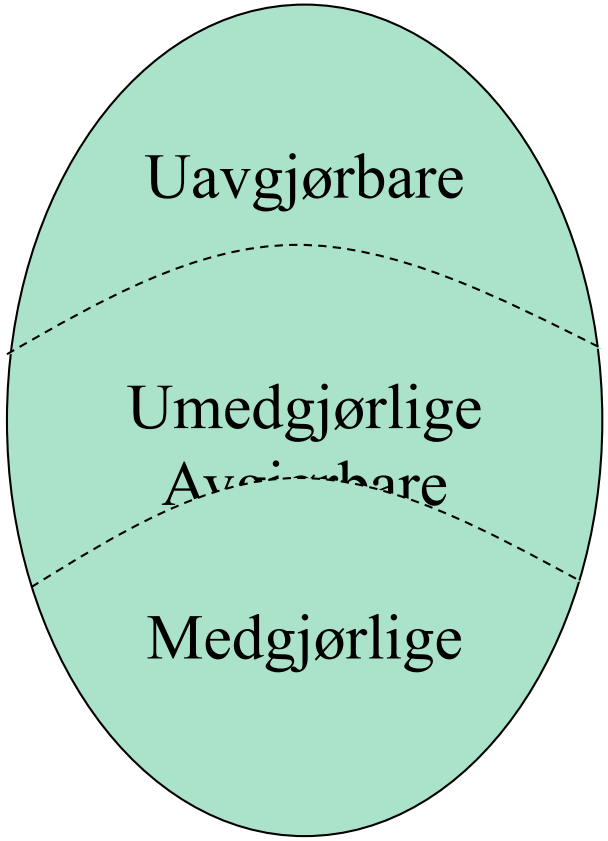
Har: Et endelig antall elementer.

Skal: Finne en rekkefølge, gjøre et utplukk, …

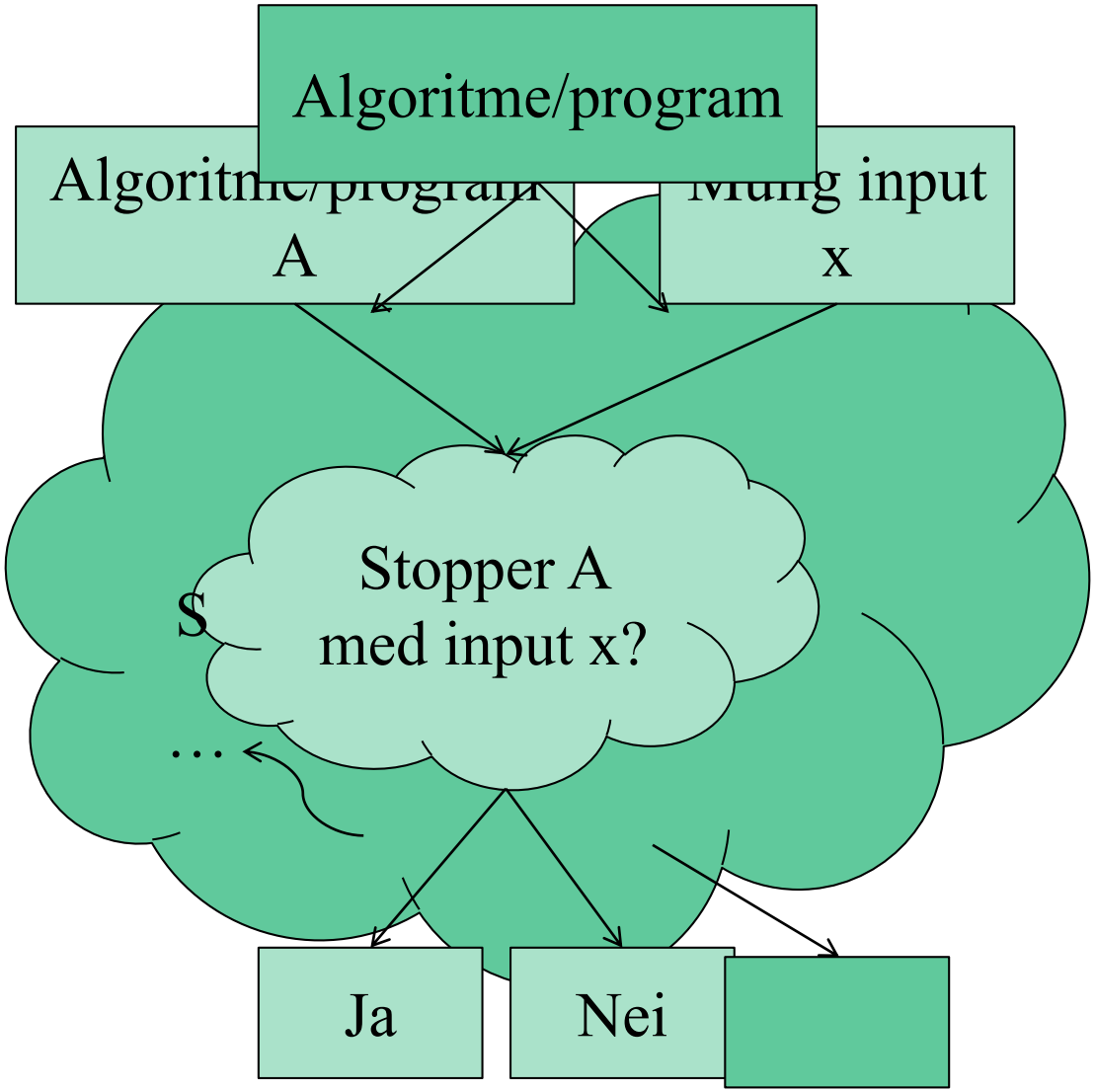
- Del kravet i en enkel og en vrien del.
- Test mest mulig av det vriene kravet underveis.
- Kjenn igjen håpløse delløsninger så tidlig som mulig.

BEREGNBARHET OG KOMPLEKSITET

Klasser av problemer



Et uavgjørbart problem: stoppeproblemet



Klassene P og NP

- P = polynomial-time
- Et problem er i P dersom en løsning kan finnes i polynomisk tid.

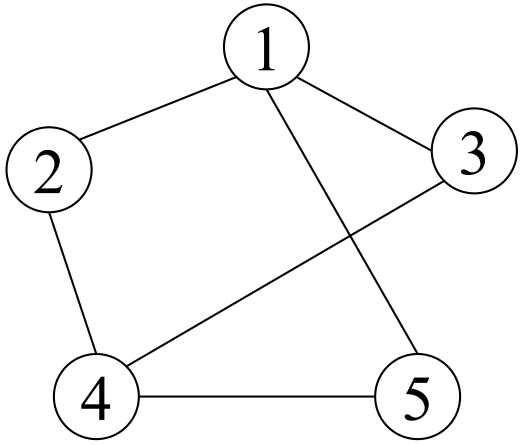
- NP = nondeterministic polynomial-time.
- Et problem er i NP dersom en gitt løsning kan sjekkes i polynomisk tid.

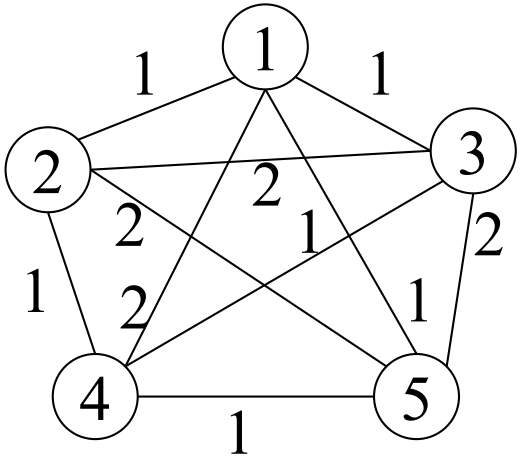
NP-kompletthet

De NP-komplette problemene er de vanskeligste problemene i NP.

Ethvert problem i NP kan reduseres til et NP-komplett problem i polynomisk tid.

Eksempel: Hamiltonsk løkke → Traveling Salesman





VERTEX-COVER

- Gitt en graf, finnes det et delmengde på max k noder slik at alle kanter har minst en node i delmengden.
- *Eksempel:*
  Gitt et nettverk hvor nodene representerer rutere og kantene fysiske forbindelser. Vi ønsker å oppgradere nettverket med (dyre) spesial-rutere for bedre monitorering av nettverket. Er det tilstrekkelig å kjøpe k nye rutere?

SUBSET-SUM

- Gitt et heltall k og en mengde S med n heltall, finnes det er delmengde av S slik at summen av tallene er lik k?
- *Eksempel:*
  Anta at vi har en Web-server og et antall download-forespørsler. For hver forespørsel kan vi lett bestemme størrelsen på den aktuelle filen. Vi ønsker å finne et antall forespørsler slik at summen tilsvarer kapasiteten serveren har i løpet av ett minutt.
  - *NB: Siden problemet er NP-komplett, blir problemet vanskeligere å løse jo mer kapasitet serveren har!*

P = NP???

Interessert i mer?

- INF4130 – Algoritmer: Design og effektivitet
- David Harels bøker:
  - Computers Ltd.: What they *really* can't do (2000)
  - Algorithmics: The spirit of computing (1987/1992/2004)

Neste forelesning: 16. november

DYNAMISK PROGRAMMERING OG PARADIGMER FOR ALGORITMEDESIGN