Løsningsforslag

UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i : INF2310 — Digital bildebehandling

Eksamensdag : Tirsdag 29. mars 2011

Tid for eksamen : 15:00 – 19:00

Oppgavesettet er på : **5 sider**

Vedlegg : **Ingen**

Tillatte hjelpemidler: **Ingen**

- Det er 11 oppgaver i dette oppgavesettet.

- Les gjennom hele oppgaven før du begynner å løse oppgaven. Kontroller at oppgavesettet er komplett før du begynner å besvare det. Dersom du savner opplysninger i oppgaven, kan du selv legge dine egne forutsetninger til grunn og gjøre rimelige antagelser, så lenge de ikke bryter med oppgavens "ånd". Gjør i såfall rede for forutsetningene og antagelsene du gjør.

- Det er tilsammen 21 delspørsmål, og det lønner seg å disponere tiden slik at man får besvart alle oppgavene. Hvis dere står fast på enkeltoppgaver, gå videre slik at dere får gitt et kort svar på alle oppgaver.

- **Alle svar skal begrunnes.** Gjør rede for bruken av eventuelle teoremer, prinsipper eller forutsetninger slik at en tredjeperson kan følge dine resonnementer.

- Dette oppgavesettet foreligger på bokmål, nynorsk og engelsk. Dersom du er usikker på fagtermene som er brukt i den norske oppgaveteksten – siden læreboka er på engelsk - kan du be eksamensvaktene om å få også den engelske oppgaveteksten.

1. Sampling og geometrisk transform

Anta at vi har et (kontinuerlig) båndbegrenset bilde med en høyeste frekvens $f_{max} = 2mm^{-1}$.

a) Det som er avbildet er bl.a. noen punktkilder som står så nær hverandre at de så vidt kan skilles fra hverandre i bildet. Gi en nedre grense for hvor tett disse punktkildene står.

Plasser en mengde tenkte punktkilder med avstand T i mellom seg på en rekke. Siden punktene kan skilles får vi da et signal med periode T i bildet. T kan ikke være mindre enn minste periode i bildet: $T >= T_{min} = 1/f_{max}=1/2mm=0.5mm$.

b) Hvor tett må vi sample dette bildet for å unngå aliasing? Gi en nedre grense for *samplingsfrekvensen*, f_s. La oss videre anta at vi har samplet bildet med en rate så vidt over denne grensen.

Samplingsteoremet krever $f_s>2f_{max}$, altså må $f_s>2*2mm^{-1}=4mm^{-1}$.

c) Anta at den geometriske transformen er:

$$x' = 0.5x + 100$$
$$y' = 0.5y + 200$$

der x og y er koordinatene i ”innbildet”, x' og y' er de transformerte koordinatene. La oss videre anta at det benyttes en ”vanlig” resampling ved baklengstransformasjon.

Hva vil den effektive samplingsraten være etter en slik transform, og hvilke (uønskede) effekter vil dette kunne gi opphav til?

Den effektive, nye samplingsraten blir halvert: fsNy=0.5fs. Altså vil vi i vårt bilde, hvor vi har samplet med så lav rate vi kan, ende opp med aliasingproblemer.

2. Et avbildnings- og bildebehandlingssystem

Forklar eventuelle prinsipielle problemer med rekkefølgen i dette avbildnings- og bildeanalyse-systemet:

Avbildning -> Sampling -> Analyse av romlig oppløsning fra det samplede bildet -> Anti-aliasing -> Videre strukturanalyse av bildet

Vi er nødt til å utføre eventuell anti-aliasing **før** sampling.

3. Histogrammer

La oss anta at vi har følgende 4x4 gråtonebilde:

1	3	2	1
5	4	5	3
4	1	1	2
2	3	2	1

Skissér gråtonehistogrammet, *h*, det normaliserte histogrammet, *p*, samt det kumulative histogrammet, *c*, til bildet.

[5, 4, 3, 2, 2] [5/16, 4/16, 3/16, 2/16, 2/16] [5/16, 9/16, 12/16, 14/16, 1]

4. Gråtonetransform og bildestandardisering

Anta gråtonetransformen T[i] = ai + b, der a og b er konstanter.

a) Hvilken effekt har parametrene a og b på gråtonehistogrammet til det resulterende bildet?
Forklar også effekten av a og b på kontrasten og lysheten til bildet.

b vil flytte hele histogrammet; gjøre bildet lysere hvis b>0 eller mørkere hvis b<0. a vil strekke histogrammet; gjøre det bredere om a>1 og smalere om -1<a<1, samt speilvende histogrammet om a<0.

b) Man kan gi en serie bilder lik varians og middelverdi ved å benytte slike gråtonetransformer. Hva prøver man å oppnå ved slik standardisering av varians og middelverdi?

Varians er knyttet opp mot kontrasten i bildet, og middelverdi sier noe om lysheten. Man ønsker å standardisere kontrasten og lysheten til bildene.

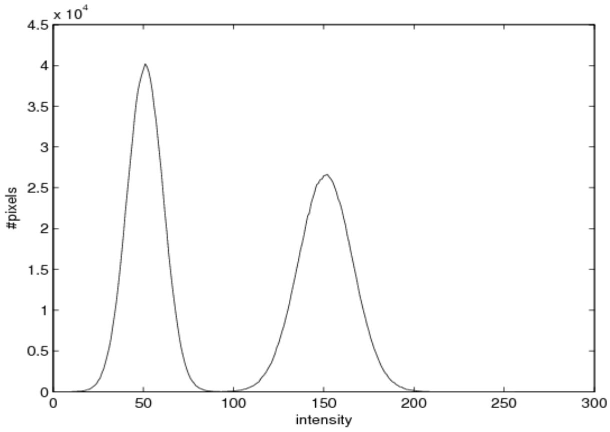
5. En logaritmisk gråtonetransform

Anta gråtonetransformen T[i] = log(i+1). Hva vil denne transformen gjøre med kontrasten i henholdsvis de mørke og lyse intensitetsintervallene?

Stigningstallet til transformen er høyt ved lave intensitetsverdier, og lavt ved høye verdier; følgelig vil transformen øke kontrasten i de mørke områdene og minke kontrasten i de lyse områdene.

6. Gråtonetransform og rekonstruksjon

Anta at vårt 8-bits bilde har følgende histogram:



La oss anta at vi skal rekvantisere bildet til 1 bit per piksel, altså til et bilde bestående av 0-ere og 1-ere. Skisser gråtonetransformen (T[i]) du ville benyttet. Hvilken verdi for 0 og hvilken verdi for 1 ville du benyttet ved rekonstruksjon til et 8 bits bilde? Gi en (kort) begrunnelse for dine valg for både gråtonetransform og rekonstruksjons-verdier.

Vi ville valgt en terskel rundt bunnpunktet mellom de to toppene, altså T[i] = 0 for 0<=i<=90 og 1 for i>90. [Omtrent.] Rekonstruksjon: 0->50 (første toppen), 1->150 (andre toppen). Ser man på sluttransformen som en histogramsøyleflytter, vil totalfeilen være summen av hver søyles høyde multiplisert med hvor mye den ble flyttet. De valgte transformparametrene gir bortimot minimal slik totalfeil.

7. Histogramutjevning

Hva er histogramutjevning? For et generelt bilde, beskriv gråtonetransformen som utfører en histogramutjevning.

Et forsøk på å maksimere kontrasten ved å lage et (tilnærmet) flatt resultathistogram. Transformen vi benytter er en skalert variant av bildets kumulative histogram.

8. Filtrering

Gitt et 3 x 3 utsnitt av et 3 bits gråtonebilde med pikselverdier

0	5	1
3	7	4
1	4	2

Hvilken verdi vil senterpikslet her få hvis vi bruker:

a) Et 3x3 uniformt konvolusjonsfilter,
skalert ved å dividere med summen av filterkoeffisientene?

(0+5+1+3+7+4+1+4+2)/9 = 27/9 = 3.

b) Et filter som er resultatet av konvolusjonen [1 2 1] * $[1\ 2\ 1]^T$,
skalert ved å dividere med summen av filterkoeffisientene?
Filtret blir
1 2 1
2 4 2
1 2 1
Og svaret blir
(0+1+1+2 + 2x(5+4+4+3) + 4x7)/16 = 64/16 = 4.

c) Et 3x3 kvadratisk medianfilter?

Sorterer de 9 pikselverdiene: 0 1 1 2 3 4 4 5 7.

I midten finner vi medianen M= 3.

d) Et 3x3 pluss-formet medianfilter?

Sorterer de 5 pikselverdiene: 3 4 4 5 7.

I midten finner vi medianen, M= 4.

NB! Her er det ikke nok å bare gi et svar i form av en pikselverdi.
Du må også gi en kort begrunnelse, eller en utregning.

9. En konvolusjonsoperator

En operator T_1 er definert ved

$$T_1 = [1\ \ 2\ \ 3\ \ 2\ \ 1] * [-1\ \ 0\ \ 2\ \ 0\ \ -1]^T + [1\ \ 2\ \ 3\ \ 2\ \ 1]^T * [-1\ \ 0\ \ 2\ \ 0\ \ -1]$$

a) Forklar hva slags operator dette er.

Dette er en sum av to konvolusjoner.
Den første er en lavpass-filtrering i x-retning konvolvert med et estimat av den andre deriverte i (negativ) y-retning. Den andre er en lavpass-filtrering i y-retning konvolvert med et estimat av den andre deriverte i (negativ) x-retning.
Altså er T_1 en diskret tilnærming til Laplace-operatoren, med negativt fortegn:

$$\nabla^2 I = \frac{\partial^2 I}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 I}{\partial x^2}$$

(Ligningen er en del av løsningsforslaget)

b) Beskriv operatoren T_1 ved filtre av størrelse 3x3. Hvilke kjente filtre er dette?

Lavpassfiltret [1 2 3 2 1] kan skrives som [1 1 1]*[1 1 1], mens estimatoren for den andrederiverte, [-1 0 2 0 -1], kan skrives som -[1 0 -1]*[1 0 -1].
Vi ser da at operatoren T_1 kan beskrives ved 3x3 filtre som ganske enkelt er de to Prewitt-filtrene.

$$T_1 = [1 \;\; 2 \;\; 3 \;\; 2 \;\; 1] * [-1 \;\; 0 \;\; 2 \;\; 0 \;\; -1]^T + [1 \;\; 2 \;\; 3 \;\; 2 \;\; 1]^T * [-1 \;\; 0 \;\; 2 \;\; 0 \;\; -1]$$
$$= \{-[1 \;\; 1 \;\; 1]*[1 \;\; 1 \;\; 1]*[1 \;\; 0 \;\; -1]^T * [1 \;\; 0 \;\; -1]^T\} + \{-[1 \;\; 1 \;\; 1]^T * [1 \;\; 1 \;\; 1]^T * [1 \;\; 0 \;\; -1] * [1 \;\; 0 \;\; -1]\}$$
$$= -\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \right\}$$

(Ligningen er en del av løsningsforslaget)

10. Transformer og Fourier-spektra

a) Anta gråtonetransformen T[i] = i + c, altså at vi legger til en konstant, c, til hver piksel. Hvordan vil en slik transform virke inn på Fourier-spekteret til bildet?
Kun «DC-komponenten», altså basisen tilsvarende nullfrekvensen, vil endres. Alle de andre basisbildene står ortogonalt på nullfrekvensbilde.

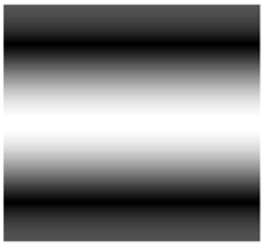
b) Anta et bilde med helt sort bakgrunn, og med en kanin plassert i bildets sentrum. Hvis man flyttet kaninen fem piksler til høyre, hvordan ville dette endret bildets frekvensspektrum?
En slik forflytning ville kun endret på fasen, altså ville spekteret forblitt uendret. Jfr. shiftteoremet.

11. Konvolusjon og frekvensrespons

a) Hva sier konvolusjonsteoremet?

b) Under følger to konvolusjonskjerner og to tilhørende frekvensresponser.
I vår fremstilling av spektrene tilsvarer sort en lav verdi og hvitt en høy verdi, og nullfrekvensen er sentrert midt i bildet.

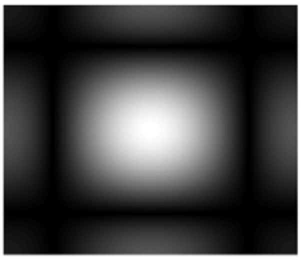
$$\begin{matrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{matrix} \qquad\qquad \begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$



Hvilket spekter tilhører det første filteret, og hvilket tilhører det andre?

Konvolusjon i bildedomenet tilsvarer en multiplikasjon i frekvensdomenet. Og omvendt.

c) Hvis man multipliserer de to frekvensresponsene sammen element for element får vi resultatet under. Hvilken konvolusjonsfilterkjerne svarer til denne frekvensresponsen?



Konvolusjonsteoremet sier oss at en slik multiplikasjon i frekvensdomenet er det samme som en konvolusjon i bildedomenet. Altså kan vi konvolvere de to filterkjernene og få et filter med en slik frekvensrespons. Et 3x3 (skalert) middelverdifilter.

TAKK FOR OPPMERKSOMHETEN!