



UNIVERSITETET
I OSLO

RELASJONSALGEBRA

Regning med relasjoner

Relasjonsalgebraen

- definerer en mengde av operasjoner på relasjoner
- gir oss et språk til å beskrive spørsmål om innholdet i relasjonene
- er et **prosedyralt** spørrespråk:
Vi sier *hvordan* svaret skal beregnes
(Alternativet er **deklarative** spørrespråk som SQL hvor vi bare sier *hva svaret skal oppfylle*)
- utgjør det teoretiske grunnlaget for prosessering av SQL-spørringer mot relasjonsdatabaser ('SQL-queries')

Algebra

- **Domene** (samling av verdier)
- **Atomære operander**
 - Konstanter
(representerer konkrete verdier i domenet)
 - Variable
(representerer vilkårlige verdier fra domenet)
- **Operatorer**
 - Tar som argumenter operander
 - Leverer som resultat en operand
- **Uttrykk**
 - Bygges av atomære operander med operatorer og parenteser

Eksempel: Heltallsalgebra

- Domene: Heltallene
- Konstanter: ..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...
- Variable: x, y, z, ...
- Operatorer: +, -, ×, /
- Eksempler på uttrykk:

$$2 + 5$$

$$((2-x) \times 5) + (y/z)$$

Klassisk relasjonsalgebra

- Domene: Endelige relasjoner
- Atomære operander:
 - Konstanter: Alle endelige relasjoner
 - Variable: Representerer vilkårlige endelige relasjoner
- Operatorer:
 - union
 - snitt
 - differanse
 - kartesisk produkt
 - projeksjon
 - seleksjon
 - join
 - renavning
 - divisjon

Mengdeoperatorer

- **Union:** $R \cup S$
- **Snitt:** $R \cap S$
- **Differanse:** $R - S$

R og S må ha skjemaer med identiske attributtmengder (og identiske domener)

Før operasjonen utføres, må S ordnes slik at attributtene kommer i samme rekkefølge som i R

Union

- RUS er en relasjon hvor
 - alle tupler som er i R eller i S eller i både R og S, er i RUS
(Om t er i både R og S, er t likevel bare representert én gang i RUS
(fordi en relasjon er en *mengde*))
 - ingen andre tupler forekommer i RUS

Eksempel på vanlig mengdeunion:

$$\{a,b,c\} \cup \{a,c,d\} = \{a,b,c,d\}$$

Snitt

- $R \cap S$ er en relasjon hvor
 - alle tupler som er i både R og S, er i $R \cap S$
 - ingen andre tupler forekommer i $R \cap S$

Eksempel på vanlig mengdesnitt:

$$\{a,b,c\} \cap \{a,c,d\} = \{a,c\}$$

Differanse

- $R-S$ er en relasjon hvor
 - alle tupler som er i R , men ikke i S , er i $R-S$
 - ingen andre tupler forekommer i $R-S$

Eksempel på vanlig mengdedifferanse:

$$\{a,b,c\} - \{a,c,d\} = \{b\}$$

Operatorer som fjerner deler av en relasjon

- Seleksjon: $\sigma_C(R)$
- Projeksjon: $\pi_L(R)$

Seleksjon

- $\sigma_C(R)$ er relasjonen som fås fra R ved å velge ut de tuplene i R som tilfredsstillers betingelsen C
- C er et vilkårlig boolsk uttrykk bygget opp fra atomer på formen $op_1 \theta op_2$ der
 - operandene op_1 og op_2 er
 - enten to attributter i R med samme domene
 - eller ett attributt i R og en konstant fra dette attributtets domene
 - operatoren $\theta \in \{ =, \neq, <, >, \leq, \geq, \text{LIKE} \}$
(LIKE er bare tillatt når op_2 er en konstant)

Projeksjon

- $\pi_L(R)$ hvor R er en relasjon og L er en liste av attributter i R , er relasjonen som fås fra R ved å velge ut kolonnene til attributtene i L
 - Relasjonen har et skjema med attributtene i L
 - Ingen tupler skal forekomme flere ganger i $\pi_L(R)$

Renavning

- $\rho_{S(A_1, A_2, \dots, A_n)}(R)$ renavner R til en relasjon med navn S og attributter A_1, A_2, \dots, A_n
- $\rho_S(R)$ renavner R til en relasjon med navn S
Attributtnavnene fra R beholdes

Operatorer som spleiser tupler

- Kartesisk produkt: $R \times S$
- Naturlig join: $R \bowtie S$
- Theta-join: $R \bowtie_{\theta} S$

Kartesisk produkt

- $R \times S$ er relasjonen som fås fra R og S ved å danne alle mulige sammensetninger av ett tuppel fra R og ett tuppel fra S
- Vi sier ofte at et tuppel t fra R og et tuppel u fra S blir **konkateneret** til et tuppel $v=t \cdot u$ i $R \times S$
- I resultatskjemaet løses eventuell navnelikhet mellom attributter i R og S ved å **kvalifisere** navnene med opprinnelsesrelasjonen: $R.A$, $S.A$
- Hvis R og S er samme relasjon, må en av dem først renavnes

Naturlig join

- $R \bowtie S$ er relasjonen som fås fra R og S ved å danne alle mulige sammensmeltinger av ett tuppel fra R med ett fra S der tuplene skal stemme overens i samtlige attributter med sammenfallende navn
 - Fellesattributtene forekommer bare en gang i de sammensmeltede attributtene
 - Resultatskjemaet har attributtene i R etterfulgt av de attributtene i S som ikke også forekommer i R

Hengetupler

- Et *hengetuppel* (dangling tuple) er et tuppel i en av relasjonene som ikke har noe matchende tuppel i den andre relasjonen
- Hengetupler får ingen representant i resultatrelasjonen etter en join

Theta-join

- Generalisering av naturlig join
- Relasjonen $R \bowtie_{\theta} S$, hvor θ er en betingelse (boolsk uttrykk), fremkommer slik:
 1. Beregn $R \times S$
 2. Velg ut de tuplene som tilfredsstill betingelsen θ
- Atomene i θ har formen $A \varphi B$ der A og B er attributter i henholdsvis R og S , A og B har samme domene, og $\varphi \in \{ =, \neq, <, >, \leq, \geq \}$

Ekvijoin

- Spesialtilfelle av en theta-join $R \bowtie_{\theta} S$ hvor betingelsen θ tilfredstiller følgende krav:
 1. θ inneholder ingen andre boolske operatører enn AND, dvs at θ har formen $\theta_1 \text{ AND } \theta_2 \text{ AND } \dots \text{ AND } \theta_m$
 2. Hver θ_k for $1 \leq k \leq m$ er på formen $A = B$ der A er et attributt i R og B et attributt i S hvor A og B har samme domene

Divisjon

- I klassisk relasjonsalgebralitteratur forekommer i tillegg en divisjonsoperator ($R \mathbf{div} S$)
Denne er ikke pensum i dette kurset

Operatorer som kan uttrykkes ved andre operatorer

- $R \cap S = R - (R - S)$
 - Så vi trenger ikke \cap
- $R \bowtie_{\theta} S = \sigma_{\theta}(R \times S)$
 - Så vi trenger ikke \bowtie_{θ}
- $R \bowtie S = \pi_L(\sigma_{\theta}(R \times S))$

hvor L er listen av attributtene i R fulgt av de attributtene i S som ikke forekommer i R, og θ er $R.A_1 = S.A_1$ AND ... AND $R.A_k = S.A_k$ der A_1, \dots, A_k er alle attributter som forekommer i både R og S

 - Så vi trenger ikke \bowtie

En minimal mengde operatører

- Operatorene i mengden $\{\cup, -, \sigma, \pi, \times, \rho\}$ kan ikke uttrykkes ved noen av de andre operatorene i mengden
 - Dette er altså en minimal og uavhengig mengde av operatører
 - Vi ønsker likevel å ha med de øvrige operatorene fordi det fins effektive algoritmer for dem og fordi det ofte er enklere å finne spørsmålsformuleringer når vi har dem

Bag

- Kommersielle DBMSer benytter Bag og ikke Set (mengde) som grunntype for å realisere relasjoner
 - Set(D):
Hvert element i D forekommer maksimalt én gang
Rekkefølgen på elementene er likegyldig
 $\{a,b,c\} = \{a,c,b\} = \{a,a,b,c\} = \{c,a,b,a\}$
 - Bag(D):
Hvert element i D kan forekomme mer enn en gang
Rekkefølgen på elementene er likegyldig
 $\{a,b,c\} = \{a,c,b\} \neq \{a,a,b,c\} = \{c,a,b,a\}$

Hvorfor Bag og ikke Set

- Bag gir mer effektive beregninger av union og projeksjon enn Set
- Ved aggregering trenger vi bagfunksjonalitet
- Men: Bag er mer plasskrevende enn Set

Relasjonsalgebraens operatører anvendt på Bag

- Definisjonene blir litt annerledes
- Ikke alle algebraiske lover som holder for Set holder for Bag

$$\text{Eks: } (R \cup S) - T = (R - T) \cup (S - T)$$

Når vi på de videre foilene skriver **bagrelasjon**, mener vi et relasjonsskjema + en ekstensjon (instans) hvor ekstensjonen er en *bag*, og ikke en mengde

Bagunion

- La R og S være bagrelasjoner
- Hvis t er et tuppel som forekommer n ganger i R og m ganger i S , så forekommer t $n+m$ ganger i bagrelasjonen RUS

Eksempel på vanlig bagunion:

$$\{a,a,b,c,c\} \cup \{a,c,c,c,d\} = \{a,a,a,b,c,c,c,c,d\}$$

Bagsnitt

- La R, S være bagrelasjoner
- Hvis t er et tuppel som forekommer n ganger i R og m ganger i S , så forekommer t $\min(n, m)$ ganger i bagrelasjonen $R \cap S$

Eksempel på vanlig bagsnitt:

$$\{a, a, b, c, c\} \cap \{a, c, c, c, d\} = \{a, c, c\}$$

Bagdifferanse

- La R, S være bagrelasjoner
- Hvis t er et tuppel som forekommer n ganger i R og m ganger i S , så forekommer t $\max(0, n-m)$ ganger i bagrelasjonen $R-S$

Eksempel på vanlig bagdifferanse:

$$\{a, a, b, c, c\} - \{a, c, c, c, d\} = \{a, b\}$$

Bagseleksjon

- Hvis R er en bagrelasjon, er $\sigma_{\theta}(R)$ bagrelasjonen som fås fra R ved å anvende θ på hvert enkelt tuppel individuelt og velge ut de tuplene i R som tilfredsstillter betingelsen θ

Bagprosjeksjon

- Hvis R er en bagrelasjon og L er en (ikketom) liste av attributter, er $\pi_L(R)$ bagrelasjonen som fås fra R ved å velge ut kolonnene til attributtene i L
- $\pi_L(R)$ har like mange tupler som R

Kartesisk produkt av bager

- $R \times S$ er bagrelasjonen som fås fra bagrelasjonene R og S ved å danne alle mulige konkateneringer av ett tuppel fra R og ett tuppel fra S
- Hvis R har n tupler og S har m tupler, blir det nm tupler i $R \times S$

Theta-join på bager

- Hvis R og S er bagrelasjoner, fremkommer bagrelasjonen $R \bowtie_{\theta} S$, hvor θ er en betingelse, slik:
 - 1) Beregn $R \times S$ (kartesisk produkt av bager)
 - 2) Velg ut de tuplene som tilfredsstill betingelsen θ

Naturlig join på bager

- Hvis R og S er bagrelasjoner, er $R \bowtie S$ bagrelasjonen som fås ved å sammensmelte matchende tupler i R og S individuelt

Tilleggsoperatorer i relasjonsalgebraen

1. Duplikateliminering
2. Aggregeringsoperatorer
3. Gruppering
4. Sortering
5. Utvidet projeksjon
6. Outerjoin

Duplikateliminasjon

- $\delta(R)$ fjerner flerforekomster av tupler fra bagrelasjonen R
- Resultatet blir en mengde

Aggregeringsoperatører

- Anvendes på bager av atomære verdier for et attributt A
- Standard aggregeringsoperatører:
 - SUM(A) :
Summerer alle verdier i kolonnen til A
Domenet til A må være numeriske verdier
 - AVG(A) :
Beregner gjennomsnittet av verdiene i kolonnen til A (Kolonnen må ha minst én verdi)
Domenet til A må være numeriske verdier

Aggregeringsoperatører (forts.)

- MIN(A), MAX(A):

Plukker ut minste/største verdi i kolonnen til A
(Kolonnen må ha minst én verdi)

Domenet til A må ha en *ordningsrelasjon*

For numeriske verdier er dette $<$

For strenger benyttes leksikografisk ordning

- COUNT(A):

Teller antall tupler i relasjonen som har verdi i kolonnen til A

(dvs at tupler hvor A er nil, ikke telles med)

Gruppering

- Benyttes når vi ønsker å anvende en aggregeringsoperator på grupper av verdier
- $\gamma_L(R)$: L er en liste av elementer på en av følgende former:
 - Et attributt A i R
[A kalles et **grupperingsattributt**]
 - En aggregeringsoperator anvendt på et attributt A i R av formen $AGG(A) \rightarrow AggRes$ hvor AGG er en aggregeringsoperator og AggRes er et ubrukt attributtnavn
[A kalles et **aggregeringsattributt**]
- L får ikke inneholde to like elementer

Resultatrelasjonen etter gruppering

- Gitt grupperingen $\gamma_L(R)$
Resultatrelasjonen konstrueres slik:
 1. Partisjoner R i grupper,
én gruppe for hver samling av tupler som er like i samtlige grupperingsattributter i L
 2. For hver gruppe, produser et tuppel bestående av
 - i. Grupperingsattributtenes verdi i gruppen
 - ii. For hvert aggregeringsattributt i L ,
aggregeringen over alle tuplene i gruppen
- Resultatrelasjonen får like mange attributter som det er elementer i L , og attributtnavn som angitt av L

Sortering

- $\tau_L(R)$, hvor R er en relasjon og L en liste av attributter A_1, A_2, \dots, A_k , leverer som resultat en liste av tupler som er sortert først etter A_1 , deretter etter A_2 internt i hver bunke med like A_1 -verdier, osv.
- De attributtene som ikke er i listen, ordnes vilkårlig
- Resultatet er en *liste*, så operasjonen er bare meningsfylt som en siste, avsluttende operasjon på relasjoner

Utvidet projeksjon

- $\pi_L(R)$, klassisk: L er en liste av attributter i R
- $\pi_L(R)$, utvidet: L er en liste der hvert element kan være
 - i. Ett enkelt attributt i R
 - ii. Et uttrykk $A \rightarrow B$, hvor A er et attributt i R og B er et ubrukt attributtnavn
Renavner A i R til B i resultatrelasjonen
 - iii. Et uttrykk $E \rightarrow B$, hvor E er et uttrykk bygget opp fra attributter i R, konstanter, aritmetiske operatører og strengoperatører, og B er et ubrukt attributtnavn

Utvidet projeksjon, resultatrelasjon

- Resultatrelasjonen $\pi_L(R)$ fås fra R som følger:
 - Betrakt hvert tuppel i R for seg
 - Substituer inn tuppelets verdier for attributtnavnene i L og beregn uttrykkene i L
 - Resultatrelasjonen er en bag med like mange attributter som elementer i L, og med navn som angitt i L

Outerjoin

- Outerjoin benyttes når man ønsker å ta vare på hengetupler (dangling tuples) fra naturlig join
- $R \overset{\circ}{\bowtie} S$, **outerjoin**: Start med $R \bowtie S$
Legg til hengetupler fra R og S, manglende attributtverdier fylles ut med \perp (nil)
- $R \overset{\circ}{\bowtie}_L S$, **left outerjoin**:
Bare hengetupler fra R legges til
- $R \overset{\circ}{\bowtie}_R S$, **right outerjoin**:
Bare hengetupler fra S legges til

Relasjoner og integritetsregler

- Vi kan uttrykke referanseintegriteter, funksjonelle avhengigheter og flerverdiavhengigheter – og også andre klasser av integritetsregler – i relasjonsalgebraen!

Integritetsregler formulert i relasjonsalgebraen

1. Hvis E er et uttrykk i relasjonsalgebraen, så er $E = \emptyset$ en integritetsregel som sier at E ikke har noen tupler
2. Hvis E_1 og E_2 er uttrykk i relasjonsalgebraen, så er $E_1 \subseteq E_2$ en integritetsregel som sier at ethvert tuppel i E_1 også skal være i E_2
 - Merk at $E_1 \subseteq E_2$ og $E_1 - E_2 = \emptyset$ er ekvivalente, og det er $E = \emptyset$ og $E \subseteq \emptyset$ også, så det er tilstrekkelig med en av formene over
 - Strengt tatt er ikke \emptyset et relasjonsalgebrauttrykk
Vi kunne i stedet ha skrevet $R - R$ (for en vilkårlig relasjon R med samme skjema som E)

Eksempler på integritetsregler

- **Referanseintegritet:** "A er fremmednøkkel til S", hvor B er primærnøkkelen i S:

$$\pi_A(R) \subseteq \pi_B(S)$$

- **FDer:** "A₁ A₂ ... A_n → B₁ B₂ ... B_m" i R:

$$\sigma_{\theta}(\rho_{R_1}(R) \times \rho_{R_2}(R)) = \emptyset$$

hvor θ er uttrykket

R1.A₁=R2.A₁ AND ... AND R1.A_n=R2.A_n AND
(R1.B₁≠R2.B₁ OR ... OR R1.B_m≠R2.B_m)

- **Domeneskranker:**

$$\sigma_{A \neq 'F' \text{ AND } A \neq 'M'}(R) = \emptyset$$