INF4170 – Logikk

Forelesning 2: Førsteordens logikk

Arild Waaler

Institutt for informatikk, Universitetet i Oslo

10. september 2013

Dagens plan

1. Innledning til førsteordens logikk
2. Førsteordens logikk - syntaks
3. Førsteordens logikk - semantikk
4. Førsteordens sekventkalkyle
5. Sunnhet av førsteordens sekventkalkyle
6. Kompletthet av LK

1. Innledning til førsteordens logikk
   - Introduksjon
   - Overblikk
   - Syntaks
   - Eksempler på førsteordens språk
   - Syntaks
   - Eksempler på førsteordens formler

Introduksjon

- I utsagnslogikk kan vi analysere de logiske konnektivene $\neg$, $\wedge$, $\vee$ og $\rightarrow$, og resonnering som gjøres med slike.
- Førsteordens logikk (også kalt predikatlogikk) utvider utsagnslogikk med *kvantorer*:
  - $\exists$ (eksistenskvantoren) og
  - $\forall$ (allkvantoren).
- Vi kan med disse uttrykke påstander om at det finnes et objekt med en bestemt egenskap eller at alle objekter har en bestemt egenskap.
- Førsteordens logikk er langt rikere enn utsagnslogikk.
- Førsteordens logikk er ikke avgjørbart.

Noen eksempler

Noen påstander som vi kan representere og analysere ved førsteordens logikk er følgende:

- "Ethvert heltall er enten partall eller oddetall."
- "Det fins uendelig mange primtall."
- "Mellom to brøktall fins det annet brøktall."
- "Hvis a er mindre enn b og b er mindre enn c, så er a mindre enn c."

Flere eksempler

Av mindre matematisk art:

- "Alle Ifi-studenter er late."
- "Ingen Ifi-studenter er late."
- "Noen Ifi-studenter er late."
- "Alle Ifi-studenter som er late, får problemer på eksamen."
- "Noen Ifi-studenter som er late, får ingen problemer på eksamen."
- "Enhver Ifi-student er enten lat eller ikke lat."
- "Alle bevisbare formler er gyldige."
- "Det fins to sheriffer i byen."

Overblikk

Syntaks: førsteordens språk og formler – en utvidelse av utsagnslogikk.

Semantikk: tolkninger av førsteordens formler – modeller, sannhet, oppfyllbarhet, gyldighet.

Kalkyle: tillegg av regler.

Sunnhet: alle bevisbare sekventer er gyldige.

Kompletthet: alle gyldige sekventer er bevisbare.

Syntaks

Definisjon (Førsteordens språk - logiske symboler)

Alle førsteordens språk består av følgende logiske symboler:

- *De logiske konnektivene* $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$ *og* $\neg$.
- *Hjelpesymbolene '(' og ')' og ',' .*
- *Kvantorene* $\exists$ *(det fins) og* $\forall$ *(for alle).*
- *En tellbart uendelig mengde* $\mathcal{V}$ *av variable* $x_1, x_2, x_3, \ldots$
  (vi skriver x, y, z, $\ldots$, *for variable).*

Syntaks

Definisjon (Førsteordens språk - ikke-logiske symboler)

I tillegg består et førsteordens språk av følgende mengder av ikke-logiske symboler:

- *En tellbar mengde av konstantsymboler* $c_1, c_2, c_3, \ldots$.
- *En tellbar mengde av funksjonssymboler* $f_1, f_2, f_3, \ldots$.
- *En tellbar mengde av relasjonssymboler* $R_1, R_2, R_3, \ldots$.

Vi antar at mengdene av variable, konstant-, funksjons- og relasjonssymboler er disjunkte, og vi assosierer med ethvert funksjons- og relasjonssymbol et ikke-negativt heltall, kalt ariteten til symbolet.

Syntaks

Merk

- *Det eneste som skiller to førsteordens språk fra hverandre er de ikke-logiske symbolene.*

Definisjon (Signatur)

- *De ikke-logiske symbolene utgjør det som kalles en signatur.*
- *En signatur angis ved et tuppel* $\langle c_1, c_2, c_3, \ldots; f_1, f_2, f_3, \ldots; R_1, R_2, R_3, \ldots \rangle$, *hvor konstant-, funksjons- og relasjonssymboler er adskilt med semikolon.*

Syntaks

Definisjon (Termer)

Mengden $\mathcal{T}$ av *første-ordens termer* *er induktivt definert som den minste mengden slik at:*

- *Enhver variabel og konstant er en term.*
- *Hvis f er et funksjonssymbol med aritet n og $t_1, \ldots, t_n$ er termer, så er $f(t_1, \ldots, t_n)$ en term.*

Eksempler på førsteordens språk

Et enkelt språk: $\langle a; f, g; P, R \rangle$

- Konstantsymboler: a
- Funksjonssymboler: f (med aritet 1) og g (med aritet 2)
- Relasjonssymboler: P (med aritet 1) og R (med aritet 2)

Termer i dette språket:

- $a, x, y, \ldots, f(a), f(x), f(y), \ldots$
- $g(a, a), g(a, x), g(a, y), g(x, x), g(x, y), g(y, y), \ldots$
- $f(f(a)), f(f(x)), f(f(y)), \ldots$

Notasjon

Så lenge det er entydig og ariteten er kjent, kan vi droppe parentesene og skrive fa, fx, fy, gaa, gax, $\ldots$.

Eksempler på førsteordens språk

Et språk for aritmetikk: $\langle 0; s, +; = \rangle$

- Konstantsymboler: 0
- Funksjonssymboler: s (med aritet 1) og $+$ (med aritet 2)
- Relasjonssymboler: $=$

Kommentarer:

- Termer: $x, y, 0, s0, ss0, sss0, +xy, +00, +(s0)0, +0s0, \dots$
- *Ikke* termer: $= (\mathrm{x}, \mathrm{x}), ++, +0, \dots$
- Når vi skriver $+xy$ bruker vi prefiks notasjon.
- Vi bruker også infiks notasjon og skriver:
  $(x + y), (0 + 0), (s0 + 0), (0 + s0), \dots$.

Eksempler på førsteordens språk

Et annet språk for aritmetikk: $\langle 0, 1; +, \times; =, < \rangle$

- Konstantsymboler: $0, 1$
- Funksjonssymboler: $+$ og $\times$ (begge med aritet 2)
- Relasjonssymboler: $=$ og $<$ (begge med aritet 2)

Et språk for mengdelære: $\langle \emptyset; \cap, \cup; =, \in \rangle$

- Konstantsymboler: $\emptyset$
- Funksjonssymboler: $\cap$ og $\cup$ (begge med aritet 2)
- Relasjonssymboler: $=$ og $\in$ (begge med aritet 2)

Eksempler på førsteordens språk

Et språk for familierelasjoner: $\langle \text{Ola}, \text{Kari}; \text{mor}, \text{far}; \text{Mor}, \text{Far}, \text{Slektning} \rangle$

- Konstantsymboler: Ola og Kari
- Funksjonssymboler: mor, far (begge med aritet 1)
- Relasjonssymboler: Mor, Far, Slektning (alle med aritet 2)

Termer i språket for familierelasjoner:

- x, Ola og Kari er termer.
- mor(Ola), mor(Kari), far(Ola) og far(Kari) er termer.
- mor(x) og far(x) er termer.
- mor(mor(x)) og mor(far(Kari)) er termer.

Syntaks

Definisjon (Atomær formel - førsteordens)

Hvis R er et relasjonssymbol med aritet n og $t_1, \ldots, t_n$ er termer, så er $R(t_1, \ldots, t_n)$ en atomær formel.

Merk

- *Hvis R har aritet 0, så er R en atomær formel. Dette svarer til utsagnsvariable i utsagnslogikk.*
- *Så lenge det er entydig og ariteten er kjent skriver vi Rx, Rfa, $Rafa$, etc. for $R(x)$, $R(f(a))$ og $R(a, f(a))$.*

Syntaks

Definisjon (Førsteordens formler)

Mengden $\mathcal{F}$ av *førsteordens formler* *er den minste mengden slik at:*

1. *Alle atomære formler er formler.*
2. *Hvis φ og ψ er formler, så er $\neg\varphi$, $(\varphi \wedge \psi)$, $(\varphi \vee \psi)$ og $(\varphi \to \psi)$ formler.*
3. *Hvis φ er en formel og x er en variabel, så er $\forall x \varphi$ og $\exists x \varphi$ formler.*

Alle forekomster av en variabel x i φ sies å være *bundet* *i formlene $\forall x \varphi$ og $\exists x \varphi$ og innenfor* *skopet* *til den gjeldende kvantoren.*

Eksempler på førsteordens formler

Et språk for beundring: $\langle a, b; ; \mathrm{Idol}, \mathrm{Liker}\rangle$

- Konstantsymboler: a og b
- Funksjonssymboler: (ingen)
- Relasjonssymboler: Idol (med aritet 1) og Liker (med aritet 2)

Formler i språket:

- Atomære formler: $\mathrm{Idol}(x), \mathrm{Idol}(a), \mathrm{Liker}(a, a), \mathrm{Liker}(a, b)$
- $\exists x \mathrm{Idol}(x)$ - "det fins et Idol"
- $\forall x \exists y \mathrm{Liker}(x, y)$ - "alle liker noen"
- $\forall x \mathrm{Liker}(x, a)$ - "alle liker a"
- $\neg \exists x \mathrm{Liker}(x, b)$ - "ingen liker b"
- $\forall x (\mathrm{Idol}(x) \rightarrow \mathrm{Liker}(x, x))$ - "alle idoler liker seg selv"

Eksempler på førsteordens formler

I språket for aritmetikk $\langle 0; s, +; = \rangle$, så har vi formlene

- $s0 + s0 = ss0$ - "en pluss en er to"
- $\forall x \forall y (x + y = y + x)$ - "addisjon er kommutativt"
- $\forall x \exists y (y = sx)$ - "alle tall har en etterfølger"
- $\neg \exists x (0 = sx)$ - "0 er ikke etterfølgeren til noe"
- $\exists x \exists y \neg (x = y)$ - "det fins to forskjellige objekter"

2. Førsteordens logikk - syntaks
   - Repetisjon
   - Frie variable
   - Substitusjoner
   - Lukkede og åpne formler

Repetisjon

Et førsteordens språk $\mathcal{L}$ består av:

1. Logiske symboler
   - konnektiver: $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$ og $\neg$
   - hjelpesymboler: '(' og ')' og ','
   - kvantorer: $\exists$ og $\forall$
   - variable: $\mathcal{V} = \{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$
2. Ikke-logiske symboler:
   - en tellbar mengde konstantsymboler
   - en tellbar mengde funksjonssymboler (med aritet)
   - en tellbar mengde relasjonssymboler (med aritet)

- De ikke-logiske symbolene utgjør en signatur

$$\langle \underbrace{c_1, c_2, c_3, \ldots}_{\textit{konstantsymboler}} ; \underbrace{f_1, f_2, f_3, \ldots}_{\textit{funksjonssymboler}} ; \underbrace{R_1, R_2, R_3, \ldots}_{\textit{relasjonssymboler}} \rangle.$$

Repetisjon

Vi så følgende signaturer sist:

enkelt språk:	$\langle$	a	;	f, g	;	P, R	$\rangle$
aritmetikk 1:	$\langle$	0	;	$s, +$	;	$=$	$\rangle$
aritmetikk 2:	$\langle$	$0, 1$	;	$+, \times$	;	$=, <$	$\rangle$
mengdelære:	$\langle$	$\emptyset$	;	$\cap, \cup$	;	$=, \in$	$\rangle$
familierelasjoner:	$\langle$	Ola, Kari	;	mor, far	;	Mor, Far, Slektning	$\rangle$
beundring:	$\langle$	a, b	;		;	Idol, Liker	$\rangle$

Repetisjon

Hvis et førsteordens språk $\mathcal{L}$ er gitt, så får vi (definert induktivt):

1. Mengden $\mathcal{T}$ av termer i $\mathcal{L}$:
   - Enhver variabel og konstant er en term.
   - Hvis f er et funksjonssymbol med aritet n og $t_1, \ldots, t_n$ er termer,så er $f(t_1, ..., t_n)$ en term.
2. Mengden $\mathcal{F}$ av formler i $\mathcal{L}$:
   - Hvis R er et relasjonssymbol med aritet n og $t_1, \ldots, t_n$ er termer,så er $R(t_1, \ldots, t_n)$ en (atomær) formel.
   - Hvis φ og ψ er formler,så er $\neg\varphi$, $(\varphi \wedge \psi)$, $(\varphi \vee \psi)$ og $(\varphi \to \psi)$ formler.
   - Hvis φ er en formel og x er en variabel,så er $\forall x \varphi$ og $\exists x \varphi$ formler.

Alle forekomster av en variabel x i φ sies å være bundet i formlene $\forall x \varphi$ og $\exists x \varphi$ og innenfor skopet til den gjeldende kvantoren.

Repetisjon

I språket for beundring $\langle a, b; -; \text{Idol}, \text{Liker}\rangle$ kan vi uttrykke:

1:	Alice liker Bob:	$\text{Liker}(a, b)$
2:	Alice liker alle:	$\forall x \text{Liker}(a, x)$
3:	Alice liker alle som Bob liker:	$\forall x(\text{Liker}(b, x) \to \text{Liker}(a, x))$
4:	Noen liker seg selv:	$\exists x \text{Liker}(x, x)$
5:	Bob liker alle som liker seg selv:	$\forall x(\text{Liker}(x, x) \to \text{Liker}(b, x))$
6:	Ingen liker både Alice og Bob:	$\neg\exists x(\text{Liker}(x, a) \land \text{Liker}(x, b))$
		$\forall x(\text{Liker}(x, a) \to \neg\text{Liker}(x, b))$
7:	Noen liker ikke seg selv:	$\exists x \neg\text{Liker}(x, x)$
8:	Bob liker noen som liker Alice:	$\exists x(\text{Liker}(b, x) \land \text{Liker}(x, a))$
9:	En som blir likt av alle er et idol:	$\forall x(\forall y \text{Liker}(y, x) \to \text{Idol}(x))$
10:	Et idol blir likt av alle:	$\forall x(\text{Idol}(x) \to \forall y \text{Liker}(y, x))$

Frie variable i termer

Definisjon (Frie variable i en term)

$\mathrm{FV}(t)$ *betegner mengden av frie variable i termen* t.

Definisjon (Lukket term)

En term t *er lukket hvis* $\mathrm{FV}(t) = \emptyset$, *dvs.* t *inneholder ingen frie variable.*

Eksempel

I språket $\langle a, b; f; - \rangle$ *har vi:*

- *Termen* $f(x, a)$ *har en fri variabel* x.
- *Termen* $f(a, b)$ *har ingen frie variable og er en lukket term.*

Rekursive definisjoner

Når mengder er definert *induktivt*, så kan vi definere funksjoner over denne mengden rekursivt ved å

1. gi verdi til de "atomære" elementene (i basismengden), og
2. gi verdi til "sammensatte" elementene (fra induksjonssteget) ved å bruke verdiene som ble gitt til komponentene.

Den presise, rekursive definisjonen av FV er følgende.

Definisjon (Frie variable - definert rekursivt)

Gitt en term t, la mengden $\mathsf{FV}(t)$ *av frie variable i t være definert rekursivt ved:*

- $\mathsf{FV}(x_i) = \{x_i\}$, *for en variabel x_i, og*
- $\mathsf{FV}(c_i) = \emptyset$, *for en konstant c_i, og*
- $\mathsf{FV}(f(t_1, \ldots, t_n)) = \mathsf{FV}(t_1) \cup \cdots \cup \mathsf{FV}(t_n)$, *for et funksjonssymbol f med aritet n.*

Frie variable i formler

Definisjon (Frie variable i en formel)

En variabelforekomst i en førsteordens formel er fri hvis den ikke er bundet, dvs. hvis den ikke er innenfor skopet til en kvantor. Vi skriver FV(φ) *for mengden av frie variable i* φ.

Eksempel ($\forall x Rxy \land Pz$)

- x *er bundet*
- y *er fri*
- z *er fri*

Eksempel ($\forall x Pxy \to \forall z Pzx$)

- x *er bundet*
- x *er fri*
- y *er fri*
- z *er bundet*

Oppgave

Gi den presise, rekursive, definisjonen av frie variable i en formel.

Substitusjoner

Definisjon (Substitusjon for termer)

La s og t være termer og x en variabel. Da er $s[t/x]$, det vi får ved å erstatte alle forekomster av x i s med t, definert rekursivt ved:

1. $y[t/x] = \begin{cases} t & \text{hvis } x = y \\ y & \text{ellers} \end{cases}$ *(når s er en variabel y).*
2. $c[t/x] = c$ *(når s er en konstant c).*
3. $f(t_1[t/x], \ldots, t_n[t/x])$ *(når s er en funksjonsterm $f(t_1, \ldots, t_n)$).*

Eksempel

- $f(x, y, a)[y/x] = f(x[y/x], y[y/x], a[y/x]) = f(y, y, a)$
- $f(y, y, a)[b/y] = f(y[b/y], y[b/y], a[b/y]) = f(b, b, a)$

Substitusjoner

Definisjon (Substitusjon for formler)

$\varphi[t/x]$ er definert rekursivt ved:

1. $R(t_1, \dots, t_n)[t/x] = R(t_1[t/x], \dots, t_n[t/x])$
2. $\neg\psi[t/x] = \neg(\psi[t/x])$
3. $(\varphi_1 \circ \varphi_2)[t/x] = (\varphi_1[t/x] \circ \varphi_2[t/x])$, *hvor* $\circ \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$
4. $\mathrm{Q}y\psi[t/x] = \begin{cases} \mathrm{Q}y(\psi[t/x]) & \textit{hvis } x \neq y \\ \mathrm{Q}y\psi & \textit{ellers} \end{cases}$, *hvor* $\mathrm{Q} \in \{\forall, \exists\}$

Eksempel

- $(Pxy \wedge \forall xPxy)[a/x] = (Pay \wedge \forall xPxy)$
- $(Pxy \wedge \forall xPxy)[a/y] = (Pxa \wedge \forall xPxa)$

Substitusjoner

- Vi ser at substitusjon ikke blir gjort for bundne variable.
- Vi har enda et tilfelle hvor vi ønsker å forhindre substitusjon.

Eksempel

- $\exists x \text{Liker}(x, y)[f(x)/y] = \exists x \text{Liker}(x, f(x))$

- Her blir en variabel bundet *etter* substitusjon.
- Dette kan endre meningen til en formel på en måte som vi ikke ønsker.

Substitusjoner

Definisjon

Vi sier at t er fri for x i φ hvis ingen variabel i t blir bundet som følge av å substituere t for x i φ.

Eksempel

Termen $f(x)$ er ikke fri for y i formelen $\exists x \text{Liker}(x, y)$.

- En måte å unngå dette på er å omdøpe bundne variable først.
- F.eks. se på $\exists z \text{Liker}(z, y)$ i stedet for $\exists x \text{Liker}(x, y)$.
- Fra nå av antar vi at alle substitusjoner er "fri for", dvs. at ingen variable blir bundet som følge av en substitusjon.

Lukkede og åpne formler

Definisjon (Lukket/åpen formel)

En formel φ *er* *lukket* *hvis* $\mathsf{FV}(\varphi) = \emptyset$*, dvs.* φ *inneholder ingen frie variable. En formel er* *åpen* *hvis den ikke inneholder noen kvantorer.*

Eksempel

- $\forall x Pxa$ *er lukket*
- $\forall x Pxy$ *er ikke lukket*
- Pxy *er ikke lukket, men åpen*
- Pab *er åpen og lukket*

3 Førsteordens logikk - semantikk

- Introduksjon
- Modeller
- Hovedeksempel - et figurspråk
- Tolkning av termer og formler
- Oppsummering
- Språk og modeller - et komplekst forhold
- En utvidelse av figurspråket
- Oppfyllbarhet av førsteordens formler
- Bruke språket til å beskrive modeller

Introduksjon

- Hvordan skal vi tolke førsteordens formler?
- Hva skal $\forall x \varphi$ og $\exists x \varphi$ bety?
- Hva kan vi bruke førsteordens formler til å uttrykke?

  (Hva er det førsteordens formler *ikke* kan uttrykke?)
- Hva gjør en formel sann / gyldig / oppfyllbar?
- Å gi en semantikk er å si noe om forholdet mellom språk og virkelighet.
  - Valuasjoner gir en semantikk for klassisk utsagnslogikk.
- I førsteordens logikk vil modeller gi oss en semantikk.

Introduksjon

En modell består intuitivt av

1. en mengde, og
2. en tolkning av alle ikke-logiske symboler slik at
   - et konstantsymbol tolkes som et element i mengden,
   - et funksjonssymbol tolkes som en funksjon på mengden, og
   - et relasjonssymbol tolkes som en relasjon på mengden.

Vi skal først definere modeller helt presist, også skal vi definere hva det vil si at en formel er sann i en modell.

Husk

Hvis D en mengde, så består D^n av alle n-tupler av elementer fra D, for $n \geq 0$.

$$D^n = \{\langle d_1, \ldots, d_n \rangle \mid d_1, \ldots, d_n \in D\}$$

Modeller

La et førsteordens språk $\mathcal{L}$ være gitt.

Definisjon (Modell)

En modell $\mathcal{M}$ for $\mathcal{L}$ består av en ikke-tom mengde D, kalt domenet til $\mathcal{M}$, og en funksjon $(\cdot)^{\mathcal{M}}$ som tolker alle ikke-logiske symboler på følgende måte:

- *Hvis c er et konstantsymbol, så er $c^{\mathcal{M}} \in D$.*
- *Hvis f er et funksjonsymbol med aritet n,så er $f^{\mathcal{M}}$ en funksjon fra $D^n = \underbrace{D \times \cdots \times D}_{n}$ til D.*
- *Hvis R er et relasjonssymbol med aritet n,så er $R^{\mathcal{M}}$ en relasjon på $D^n = \underbrace{D \times \cdots \times D}_{n}$.*

Vi skriver $|\mathcal{M}|$ for domenet D til modellen $\mathcal{M}$.

Noen kommentarer

1. Et funksjonssymbol f med aritet 0 kan betraktes som en konstant.
   - Da er $f^{\mathcal{M}}$ en funksjon fra D^0 til D.
   - Siden D^0 består av kun ett element $\langle\rangle$ - det tomme tuppelet - så består $f^{\mathcal{M}}$ også av kun ett element $\langle\langle\rangle, e\rangle$, hvor $e \in D$.
   - Vi kan derfor identifisere $f^{\mathcal{M}}$ med e.
2. Et relasjonssymbol R med aritet 0 kan betraktes som en utsagnsvariabel.
   - Da er $R^{\mathcal{M}}$ en delmengde av D^0.
   - Siden D^0 består av kun ett element $\langle\rangle$ - det tomme tuppelet -så fins det nøyaktig to muligheter for $R^{\mathcal{M}}$.
   - Enten så er $R^{\mathcal{M}}$ tom eller så er $\langle\rangle \in R^{\mathcal{M}}$.
   - Vi kan derfor tenke på D^0 som **Bool**.
3. Et tuppel $\langle e\rangle$, hvor $e \in D$, kan vi identifisere med elementet e.
   - Når et relasjonssymbol R har aritet 1,så skriver vi derfor $\{e_1, \ldots, e_n\}$ i stedet for $\{\langle e_1\rangle, \ldots, \langle e_n\rangle\}$.
   - Vi antar derfor også at $R^{\mathcal{M}} \subseteq D$.

Hovedeksempel - et figurspråk

Relasjonssymbol	aritet
Sirkel	1
Firkant	1
Trekant	1
Stor	1
Liten	1
Mindre	2

- Konstantsymboler: a, b, c, d, e, f.
- Funksjonssymboler: ingen.
- Vi leser på denne måten:

  Sirkel(x): "x er en sirkel"

  Firkant(x): "x er en firkant"

  Trekant(x): "x er en trekant"

  Stor(x): "x er stor"

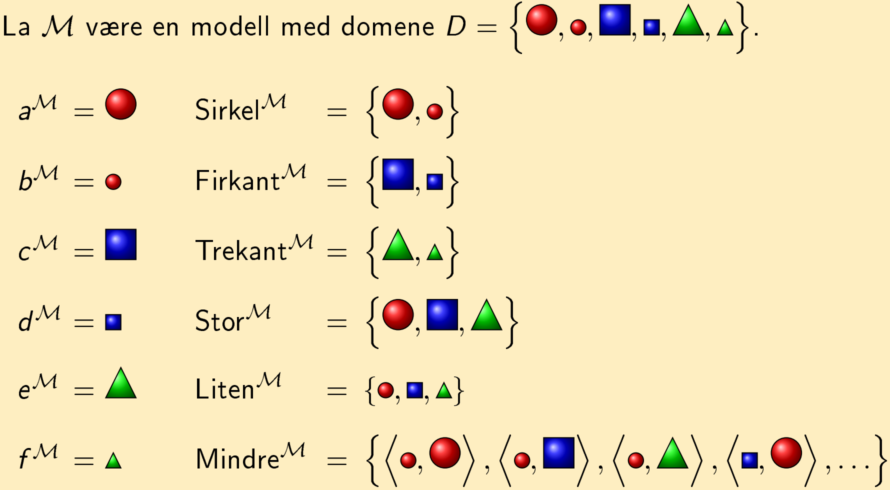
  Liten(x): "x er liten"

  Mindre(x, y): "x er mindre enn y"

La oss nå lage en modell for dette språket!

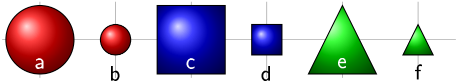
Hovedeksempel - et figurspråk

En tolkning av figurspråket



Hovedeksempel - et figurspråk

Vi foregriper begivenhetene og ser på hvilke atomære formler som er sanne og usanne i modellen $\mathcal{M}$.



Sant

- Sirkel(a)
- Firkant(c)
- Liten(b)
- Mindre(b, e)

Usant

- Trekant(a)
- Stor(b)
- Mindre(a, b)
- Mindre(a, a)

Tolkning av termer og formler

- Vi så i eksempelet over at vi hadde et konstantsymbol for hvert element i domenet, men det er ikke alltid slik.
- Når vi skal tolke formler er det nyttig å ha en konstant for hvert element.

Definisjon (Utvidet språk $\mathcal{L}(\mathcal{M})$)

La $\mathcal{L}$ være et førsteordens språk og $\mathcal{M}$ en modell for $\mathcal{L}$. Da er $\mathcal{L}(\mathcal{M})$ det førsteordens språket man får fra $\mathcal{L}$ ved å legge til nye konstantsymboler for hvert element i $|\mathcal{M}|$. Hvis a er i $|\mathcal{M}|$, så skriver vi $\bar{a}$ for den nye konstanten. Hvis $\mathcal{N}$ er en modell for $\mathcal{L}(\mathcal{M})$, så krever vi at $\bar{a}^{\mathcal{N}} = a$.

- Når vi tolker termer og formler fra språket $\mathcal{L}$ i en modell $\mathcal{M}$, så bruker vi det utvidete språket $\mathcal{L}(\mathcal{M})$ og antar at $\mathcal{M}$ er en $\mathcal{L}(\mathcal{M})$-modell.

Tolkning av termer og formler

Definisjon (Tolkning av lukkede termer)

La $\mathcal{L}$ være et førsteordens språk og $\mathcal{M}$ en modell for $\mathcal{L}$. Anta at $\mathcal{M}$ er en $\mathcal{L}(\mathcal{M})$-modell. Da tolker vi en lukket term $f(t_1, \ldots, t_n)$ på følgende måte:

$$f(t_1, \ldots, t_n)^{\mathcal{M}} = f^{\mathcal{M}}(t_1^{\mathcal{M}}, \ldots, t_n^{\mathcal{M}}).$$

Oppgave

Dette er en rekursiv definisjon. Skriv ut hele definisjonen.

Tolkning av termer og formler

Definisjon (Tolkning av lukkede formler)

La $\mathcal{L}$ være et førsteordens språk og $\mathcal{M}$ en modell for $\mathcal{L}$. Anta a $\mathcal{M}$ er en $\mathcal{L}(\mathcal{M})$-modell. Vi definerer ved rekursjon hva det vil si at en lukket formel φ er sann i $\mathcal{M}$; vi skriver $\mathcal{M} \models \varphi$ når φ er sann i $\mathcal{M}$ / $\mathcal{M}$ gjør φ sann.

- *For atomære formler: $\mathcal{M} \models R(t_1, \ldots, t_n)$ hvis $\langle t_1^{\mathcal{M}}, \ldots, t_n^{\mathcal{M}} \rangle \in R^{\mathcal{M}}$.*
- *$\mathcal{M} \models \neg\varphi$ hvis det ikke er tilfelle at $\mathcal{M} \models \varphi$.*
- *$\mathcal{M} \models \varphi \wedge \psi$ hvis $\mathcal{M} \models \varphi$ og $\mathcal{M} \models \psi$.*
- *$\mathcal{M} \models \varphi \vee \psi$ hvis $\mathcal{M} \models \varphi$ eller $\mathcal{M} \models \psi$.*
- *$\mathcal{M} \models \varphi \to \psi$ hvis $\mathcal{M} \models \varphi$ impliserer $\mathcal{M} \models \psi$.*
- *$\mathcal{M} \models \forall x\varphi$ hvis $\mathcal{M} \models \varphi[\bar{a}/x]$ for alle a i $|\mathcal{M}|$.*
- *$\mathcal{M} \models \exists x\varphi$ hvis $\mathcal{M} \models \varphi[\bar{a}/x]$ for minst en a i $|\mathcal{M}|$.*

Tolkning av termer og formler

Definisjon (Oppfyllbarhet)

En lukket formel φ er oppfyllbar hvis det fins en modell $\mathcal{M}$ som gjør φ sann. Vi sier også at $\mathcal{M}$ oppfyller φ og at $\mathcal{M}$ en en modell for φ.

Oppfyllbar

- $\exists x \mathrm{Liten}(x)$
- $\exists x(\mathrm{Liten}(x) \land \mathrm{Stor}(x))$
- $\exists x Px \rightarrow \forall x Px$

Ikke oppfyllbar

- $Pa \land \neg Pa$
- $\exists x(\mathrm{Liten}(x) \land \neg \mathrm{Liten}(x))$
- $\neg \mathrm{Stor}(a) \land \forall x \mathrm{Stor}(x)$

Tolkning av termer og formler

Definisjon (Gyldighet)

En lukket formel φ er gyldig hvis den er sann i alle modeller $\mathcal{M}$, ellers så er den falsifiserbar.

Gyldig

- $\forall x Pxa \to \forall z Pza$
- $(\forall x Px \land \forall y Qy) \to \forall x Px$
- $\exists x \mathrm{Liten}(x) \lor \exists x \neg \mathrm{Liten}(x)$

Ikke gyldig (falsfiserbar)

- $\forall x Px$
- $\exists x \mathrm{Stor}(x) \to \forall x \mathrm{Stor}(x)$
- $\exists x Px \to \exists x (Px \land Qx)$

Oppsummering

En modell $\mathcal{M}$ for et språk $\mathcal{L}$ består av

1. en ikke-tom mengde $|\mathcal{M}|$, kalt domenet til $\mathcal{M}$, og
2. en tolkning av alle ikke-logiske symboler i språket.

For eksempel, hvis $\mathcal{L}$ er språket ⟨ 🚺 , 🚹 , ☕ ; 👑 ; ♀ , ♂ ⟩, så må en modell $\mathcal{M}$ gi et domene og en tolkning til alle symbolene.

- 🚺$^{\mathcal{M}}$, 🚹$^{\mathcal{M}}$ og ☕$^{\mathcal{M}}$ må være elementer i domenet.
- 👑$^{\mathcal{M}}$ må være en funksjon på domenet
- ♀$^{\mathcal{M}}$ og ♂$^{\mathcal{M}}$ må være relasjoner på domenet.
- Husk på ariteten til symbolene. (👑 har aritet 2; ♀ og ♂ har aritet 1.)

Oppsummering

Hvis $\mathcal{M}$ er en modell og φ er en lukket formel, så definerte vi $\mathcal{M} \models \varphi$. Vi brukte det utvidete språket - med konstanter for hvert element i domenet - for å gjøre dette.

- For atomære formler: $\mathcal{M} \models R(t_1, \ldots, t_n)$ hvis $\langle t_1^{\mathcal{M}}, \ldots, t_n^{\mathcal{M}} \rangle \in R^{\mathcal{M}}$.
- $\mathcal{M} \models \neg\varphi$ hvis det ikke er tilfelle at $\mathcal{M} \models \varphi$.
- $\mathcal{M} \models \varphi \land \psi$ hvis $\mathcal{M} \models \varphi$ og $\mathcal{M} \models \psi$.
- $\mathcal{M} \models \varphi \lor \psi$ hvis $\mathcal{M} \models \varphi$ eller $\mathcal{M} \models \psi$.
- $\mathcal{M} \models \varphi \to \psi$ hvis $\mathcal{M} \models \varphi$ impliserer $\mathcal{M} \models \psi$.
- $\mathcal{M} \models \forall x\varphi$ hvis $\mathcal{M} \models \varphi[\bar{a}/x]$ for alle a i $|\mathcal{M}|$.
- $\mathcal{M} \models \exists x\varphi$ hvis $\mathcal{M} \models \varphi[\bar{a}/x]$ for minst en a i $|\mathcal{M}|$.

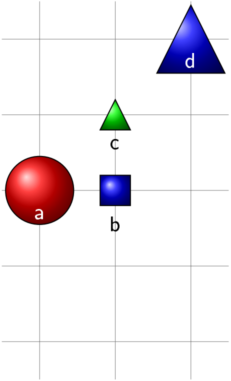
Språk og modeller - et komplekst forhold

- Ved førsteordens språk har vi fått betydelig større uttrykkskraft.
- Modeller kan være rike på struktur.
- Det er et ikke-trivielt forhold mellom språk og modeller.
- Noe av det vi er interessert i:
  - Sjekke om en formel er sann i en modell. (Modellsjekking)
  - Sjekke om en formel er oppfyllbar eller falsifiserbar.
  - Sjekke om en formel er gyldig.
  - Sjekke om formler er uavhengige av hverandre.
  - Bruke språket til å beskrive modeller, forsøke å “fange inn” og beskrive virkeligheten.

En utvidelse av figurspråket

Atomær formel	Intendert tolkning
Sirkel(x)	x er en sirkel
Firkant(x)	x er en firkant
Trekant(x)	x er en trekant
Stor(x)	x er stor
Liten(x)	x er liten
Mindre(x, y)	x er mindre enn y
Over(x, y)	x er nærmere toppen enn y
Under(x, y)	x er nærmere bunnen enn y
VenstreFor(x, y)	x er lenger til venstre enn y
HoyreFor(x, y)	x er lenger til høyre enn y
Inntil(x, y)	x er rett ved siden av, rett over eller rett under y
Mellom(x, y, z)	x, y og z er i samme kolonne, rad eller diagonal, og x er mellom y og z

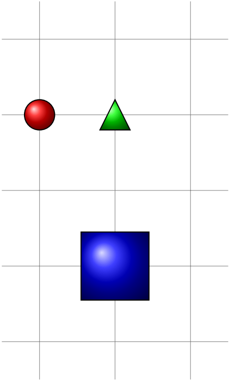
En utvidelse av figurspråket



Forklarende eksempler til semantikken:

- $a^{\mathcal{M}} =$ , $b^{\mathcal{M}} =$ , $c^{\mathcal{M}} =$ , $d^{\mathcal{M}} =$  (vi antar at dette er alle konstantene)
- $\text{Trekant}^{\mathcal{M}} = \{$, $\}$
- $\text{Stor}^{\mathcal{M}} = \{$, $\}$
- $\text{Liten}^{\mathcal{M}} = \{$, $\}$
- $\mathcal{M} \models \text{Under}(a, c)$ fordi $\langle a^{\mathcal{M}}, c^{\mathcal{M}} \rangle = \langle$, $\rangle \in \text{Under}^{\mathcal{M}}$
- $\mathcal{M} \models \neg\text{Under}(a, b)$
- $\mathcal{M} \models \text{VenstreFor}(a, c) \land \neg\text{VenstreFor}(b, c)$
- $\mathcal{M} \models \text{Inntil}(a, b) \land \neg\text{Inntil}(a, c)$
- $\mathcal{M} \models \text{Mellom}(c, a, d) \land \neg\text{Mellom}(c, b, d)$

Oppfyllbarhet av førsteordens formler

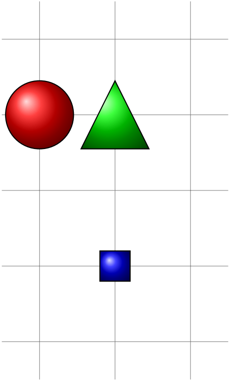


- Er det slik at $\mathcal{M} \vDash \exists x \text{Liten}(x)$?
- For å svare, må vi se på definisjonen av $\models$.

$$\mathcal{M} \models \exists x \text{Liten}(x)$$
$$\Updownarrow$$
$$\text{det fins en } a \in |\mathcal{M}| \text{ slik at } \mathcal{M} \models \text{Liten}(\bar{a})$$
$$\Updownarrow$$
$$\text{det fins en } a \in |\mathcal{M}| \text{ slik at } \bar{a}^{\mathcal{M}} \in \text{Liten}^{\mathcal{M}}$$
$$\Updownarrow$$
$$\text{det fins en } a \in |\mathcal{M}| \text{ slik at } a \in \text{Liten}^{\mathcal{M}}$$

- Siden $\text{Liten}^{\mathcal{M}} = \{$●, ▲$\}$, kan vi konkludere med **JA**.

Oppfyllbarhet av førsteordens formler

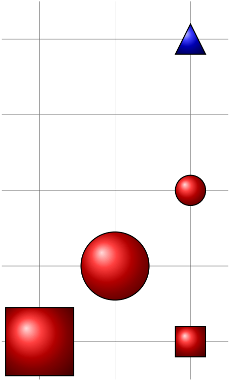


- Er det slik at $\mathcal{M} \models \forall x \mathsf{Stor}(x)$?
- For å svare, må vi se på definisjonen av $\models$.

$$\begin{gathered}
\mathcal{M} \models \forall x \mathsf{Stor}(x) \\
\Updownarrow \\
\text{for alle } a \in |\mathcal{M}| \text{ så } \mathcal{M} \models \mathsf{Stor}(\bar{a}) \\
\Updownarrow \\
\text{for alle } a \in |\mathcal{M}| \text{ så } \bar{a}^{\mathcal{M}} \in \mathsf{Stor}^{\mathcal{M}} \\
\Updownarrow \\
\text{for alle } a \in |\mathcal{M}| \text{ så } a \in \mathsf{Stor}^{\mathcal{M}}
\end{gathered}$$

- Siden $|\mathcal{M}| = \{ , , \}$ og $\mathsf{Stor}^{\mathcal{M}} = \{ , \}$, så kan vi konkludere med **NEI**.

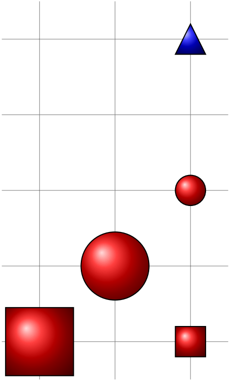
Oppfyllbarhet av førsteordens formler



$$\mathcal{M} \models \forall x(\mathsf{Stor}(x) \to \mathsf{Sirkel}(x))$$
$$\Updownarrow$$
for alle $a \in |\mathcal{M}|$ så
$$\mathcal{M} \models \mathsf{Stor}(\bar{a}) \to \mathsf{Sirkel}(\bar{a})$$
$$\Updownarrow$$
for alle $a \in |\mathcal{M}|$ så
$\mathcal{M} \models \mathsf{Stor}(\bar{a})$ impliserer $\mathcal{M} \models \mathsf{Sirkel}(\bar{a})$
$$\Updownarrow$$
for alle $a \in |\mathcal{M}|$ så
hvis $a \in \mathsf{Stor}^{\mathcal{M}}$, så $a \in \mathsf{Sirkel}^{\mathcal{M}}$
$$\Updownarrow$$
"alle store objekter er sirkler"

Påstander holder ikke.

Oppfyllbarhet av førsteordens formler



$$\mathcal{M} \models \forall x(\mathrm{Sirkel}(x) \to \exists y \exists z \mathrm{Mellom}(x,y,z))$$

$$\Updownarrow$$

for alle $a \in |\mathcal{M}|$ så

$$\mathcal{M} \models \mathrm{Sirkel}(\bar{a}) \to \exists y \exists z \mathrm{Mellom}(\bar{a},y,z)$$

$$\Updownarrow$$

for alle sirkler $a \in |\mathcal{M}|$ så

$$\mathcal{M} \models \exists y \exists z \mathrm{Mellom}(\bar{a},y,z)$$

$$\Updownarrow$$

for alle sirkler $a \in |\mathcal{M}|$ så

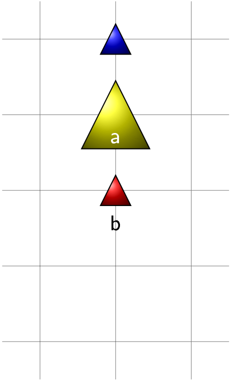
fins $b, c \in \mathcal{M}$ slik at $\mathcal{M} \models \mathrm{Mellom}(\bar{a},\bar{b},\bar{c})$

Påstanden holder, fordi

$\mathcal{M} \models$ Mellom(, , ) og

$\mathcal{M} \models$ Mellom(, , ).

Oppfyllbarhet av førsteordens formler

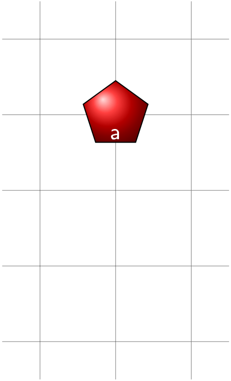


Er følgende formler oppfyllbare samtidig?

1. $\mathrm{Stor}(a) \land \mathrm{Liten}(b)$
2. $\forall x(\mathrm{Trekant}(x))$
3. $\forall x(\mathrm{Inntil}(x, a) \lor \mathrm{Inntil}(x, b))$
4. $\neg\exists x(\mathrm{VenstreFor}(x, a) \lor \mathrm{HoyreFor}(x, a))$
5. $\forall x(\mathrm{Stor}(x) \to \exists y \mathrm{Over}(y, x))$

Svaret er JA!

Oppfyllbarhet av førsteordens formler



Er følgende formler oppfyllbare?

1. $\neg\mathsf{Sirkel}(a) \wedge \neg\mathsf{Trekant}(a) \wedge \neg\mathsf{Firkant}(a))$

   Svaret er JA!

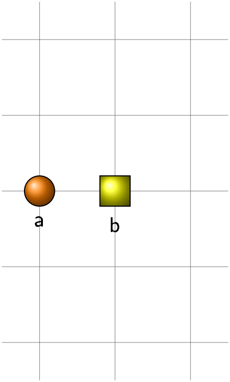
   La $|\mathcal{M}| = \{$$\}$ og $a^{\mathcal{M}} =$ .

2. $\mathsf{Liten}(a) \wedge \mathsf{Stor}(a)$

   Svaret er JA!

   La $|\mathcal{M}| = \{$$\}$, $a^{\mathcal{M}} =$  og
   $\mathsf{Liten}^{\mathcal{M}} = \mathsf{Stor}^{\mathcal{M}} = \{$$\}$

Bruke språket til å beskrive modeller



Gi en mengde formler som beskriver denne modellen nøyaktig, dvs. som har denne og (essensielt) ingen andre modeller.

1. $\text{Sirkel}(a) \land \text{Firkant}(b)$
2. $\forall x \text{Liten}(x)$
3. $\text{VenstreFor}(a, b)$
4. $\forall x(\text{Inntil}(x, a) \lor \text{Inntil}(x, b))$
5. $\forall x(\neg\text{Over}(x, a) \land \neg\text{Under}(x, a))$
6. $\forall x(\neg\text{VenstreFor}(x, a) \land \neg\text{HoyreFor}(x, b))$

Ganske vanskelig...

4 Førsteordens sekventkalkyle

- Introduksjon
- Sekventer og aksiomer
- Sekventkalkyleregler
- Slutninger
- Utledninger
- Bevis
- Eksempler

Introduksjon

- Vi har til nå sett sekventkalkyle for utsagnslogikk.
- Vi har bevist sunnhet og kompletthet av denne kalkylen.
- Nå skal vi gjøre det samme for førsteordens logikk!
- Gitt en førsteordens formel φ, er φ gyldig?
- Husk: vi introduserte LK som et systematisk forsøk på å falsifisere.
- La oss se på et eksempel.

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\times}{\neg Qa, Pa \vdash Pa}}{\neg Qa \vdash \neg Pa, Pa}}{\vdash Pa, \neg Qa \to \neg Pa} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\times}{Qa \vdash Qa, \neg Pa}}{Qa, \neg Qa \vdash \neg Pa}}{Qa \vdash \neg Qa \to \neg Pa}}{Pa \to Qa \vdash \neg Qa \to \neg Pa}}{\forall x(Px \to Qx) \vdash \neg Qa \to \neg Pa}}{\forall x(Px \to Qx) \vdash \forall x(\neg Qx \to \neg Px)}
$$

Eksempel

- Falsifisere formelen $\forall x(\neg Qx \to \neg Px)$:
  - Introdusere et *vitne* som gjør formelen usann.
  - Sette inn et *nytt* konstantsymbol a for x.
- Oppfylle formelen $\forall x(Px \to Qx)$:
  - Da må delformelen være sann uansett hva vi setter inn for x.
  - Spesielt må delformelen være sann når vi setter inn a for x.
- Vi kan nå anvende α- og β-reglene og lukke.

La oss forsøke med en annen regel-rekkefølge:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\times}{\forall x(Px \to Qx), \neg Qa, Pa, Po \to Qo \vdash Pa}}{\forall x(Px \to Qx), \neg Qa, Po \to Qo \vdash \neg Pa, Pa}}{\forall x(Px \to Qx), Po \to Qo \vdash Pa, \neg Qa \to \neg Pa} \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\times}{\forall x(Px \to Qx), Qa, Po \to Qo \vdash Qa, \neg Pa}}{\forall x(Px \to Qx), Qa, \neg Qa, Po \to Qo \vdash \neg Pa}}{\forall x(Px \to Qx), Qa, Po \to Qo \vdash \neg Qa \to \neg Pa}}{\forall x(Px \to Qx), Pa \to Qa, Po \to Qo \vdash \neg Qa \to \neg Pa}}{\forall x(Px \to Qx), Po \to Qo \vdash \neg Qa \to \neg Pa}}{\forall x(Px \to Qx), Po \to Qo \vdash \forall x(\neg Qx \to \neg Px)}}{\forall x(Px \to Qx) \vdash \forall x(\neg Qx \to \neg Px)}$$

Eksempel

- Oppfylle $\forall x(Px \to Qx)$:
  - Hva skal vi sette inn for x? Vi bruker en *dummykonstant* o.
- Falsifisere $\forall x(\neg Qx \to \neg Px)$:
  - Vitnet må være *ubrukt*. Kan derfor ikke sette inn o. Setter inn a.
- Oppfylle $\forall x(Px \to Qx)$. Da må vi kunne sette inn a for x!
  - Vi må ta kopi av $\forall$-formelen når vi setter inn for x.
  - Setter inn a for x.
- Vi kan nå anvende α- og β-reglene og lukke.

Motivasjon

- Vi skal nå definere sekventkalkylen LK for førsteordens logikk.
- Vi trenger slutningsregler for formler med kvantorene $\forall/\exists$.
- Fra de foregående eksemplene har vi:
    - Hvis vi skal oppfylle en formel $\forall x\varphi$ så må vi oppfylle $\varphi[t/x]$ for alle valg av term t.
    - I tillegg trenger vi en ekstra kopi av $\forall x\varphi$.
    - Hvis vi skal falsifisere $\forall x\varphi$ må vi velge et vitne – et ubrukt konstantsymbol a – slik at $\varphi[a/x]$ er usann.
    - Å oppfylle/falsifisere $\exists$-formler blir dualt.
- Vi skal nå definere begreper som sekvent, aksiom, utledning og bevis for førsteordens språk.

Sekventer og aksiomer

Definisjon (Parameter)

La $\mathcal{L}$ være et førsteordens språk og la par *være en tellbart uendelig mengde av konstantsymboler, kalt parametre, forskjellige fra konstantsymbolene i $\mathcal{L}$. La $\mathcal{L}^{\mathsf{par}}$ være førsteordens språket man får ved å ta med disse som konstantsymboler.*

Definisjon (Sekvent)

En sekvent er et objekt på formen $\Gamma \vdash \Delta$ slik at Γ og Δ er multimengder av lukkede førsteordens formler i $\mathcal{L}^{\mathsf{par}}$.

Definisjon (Aksiom)

Et aksiom er en sekvent på formen $\Gamma, A \vdash A, \Delta$ slik at A er en atomær formel.

Sekventer og aksiomer

Oppgave

Hvilke av uttrykkene nedenfor er sekventer?

- $Px \vdash Qx$
- $\forall x Px \vdash \exists x Qx$
- $Pa, \forall x(Qx \to Rx) \vdash Qb \to Rb$
- $\forall x Px, Pa \vdash Pa, \exists x Pa$

Hvilke av sekventene over er aksiomer?

Sekventkalkyleregler

Definisjon (γ-regler)

γ-reglene i sekventkalkylen LK *er:*

$$\frac{\Gamma, \forall x\varphi, \varphi[t/x] \vdash \Delta}{\Gamma, \forall x\varphi \vdash \Delta}\ \mathrm{L}\forall \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, \exists x\varphi, \varphi[t/x]}{\Gamma \vdash \Delta, \exists x\varphi}\ \mathrm{R}\exists$$

t er en lukket term

Merk: kopieringen av hovedformelen i γ-reglene medfører at bevissøk i førsteordens logikk ikke nødvendigvis behøver å terminere!

Sekventkalkyleregler

Definisjon (δ-regler)

δ-reglene i sekventkalkylen LK *er:*

$$\frac{\Gamma, \varphi[a/x] \vdash \Delta}{\Gamma, \exists x \varphi \vdash \Delta}\ \mathsf{L}\exists \qquad\qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, \varphi[a/x]}{\Gamma \vdash \Delta, \forall x \varphi}\ \mathsf{R}\forall$$

a er en parameter som ikke forekommer i konklusjonen.

Sekventkalkyleregler

- γ-reglene erstatter den bundne variabelen med en lukket term.
- δ-reglene erstatter den bundne variabelen med et konstantsymbol.
- Det betyr at hvis hovedformelen er lukket, så er også de aktive formlene lukkede.
- γ- og δ-reglene er derfor veldefinerte i den forstand at alle sekventer forblir lukket.

Definisjon (Slutningsreglene i førsteordens LK)

Slutningsreglene i førsteordens LK *er α- og β-reglene fra utsagnslogisk* LK *og γ- og δ-reglene.*

Slutninger

- Som i utsagnslogikk definerer reglene slutninger ved at vi erstatter symbolene i reglene med lukkede førsteordens formler:

$$\frac{\Gamma, \forall x \varphi, \varphi[t/x] \vdash \Delta}{\Gamma, \forall x \varphi \vdash \Delta} \mathrm{L}\forall \quad \Bigg| \quad \frac{Pa, \forall x(Px \to Qx), Pa \to Qa \vdash Qa}{Pa, \forall x(Px \to Qx) \vdash Qa} \mathrm{L}\forall$$

- Begrepene innført i tilknytning til regler/slutninger i utsagnslogisk LK gjelder også i førsteordens LK:
- Sekventene *over* streken kalles premisser.
- Sekventen *under* streken kalles konklusjon.
- Teksten til høyre for streken er regelens navn.
- Formelen som forekommer eksplisitt i konklusjonen kalles hovedformel.
- Formlene som forekommer eksplisitt i premissene kalles aktive formler.
- Formlene som forekommer i Γ og Δ kalles ekstraformler.

Utledninger

- Ett-premissregler: α-, γ- og δ-reglene.
- To-premissregler: β-reglene.

Definisjon (LK-utledninger – basistilfelle)

En sekvent $\Gamma \vdash \Delta$, hvor Γ og Δ er multimengder av lukkede førsteordens formler i $\mathcal{L}$, er en LK-utledning.

$$\Gamma \vdash \Delta$$

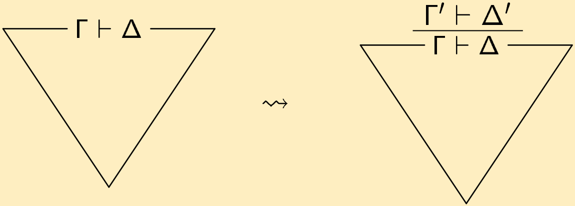
Her er $\Gamma \vdash \Delta$ både rotsekvent og løvsekvent.

- Merk: språket $\mathcal{L}^{\mathrm{par}}$ brukes ikke i rotsekventen, men kun for å introdusere nye parametre i δ-reglene.

Utledninger

Definisjon (LK-utledninger – ett-premissutvidelse)

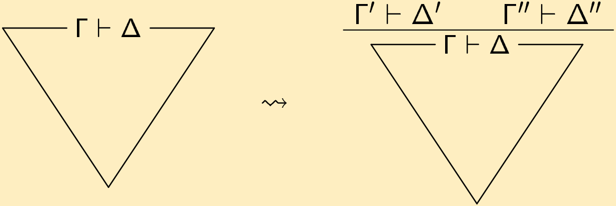
Hvis det finnes en LK-utledning med en løvsekvent $\Gamma \vdash \Delta$ og en ett-premisslutning med konklusjon $\Gamma \vdash \Delta$ og premiss $\Gamma' \vdash \Delta'$, så er objektet vi får ved å plassere $\Gamma' \vdash \Delta'$ over $\Gamma \vdash \Delta$ en LK-utledning.



Utledninger

Definisjon (LK-utledninger – to-premissutvidelse)

Hvis det finnes en LK-utledning med en løvsekvent $\Gamma \vdash \Delta$ og en to-premisslutning med konklusjon $\Gamma \vdash \Delta$ og premisser $\Gamma' \vdash \Delta'$ og $\Gamma'' \vdash \Delta''$, så er objektet vi får ved å plassere $\Gamma' \vdash \Delta'$ og $\Gamma'' \vdash \Delta''$ over $\Gamma \vdash \Delta$ en LK-*utledning*.



Bevis

Definisjon (LK-bevis)

Et LK-bevis er en LK-*utledning der alle løvsekventene er aksiomer.*

Definisjon (LK-bevisbar)

En sekvent $\Gamma \vdash \Delta$ *er* LK-*bevisbar hvis det finnes et* LK-*bevis med* $\Gamma \vdash \Delta$ *som rotsekvent.*

Eksempel 1

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\times}{\forall x Px, Pa \vdash Pa}}{\forall x Px \vdash Pa}}{\forall x Px \vdash \forall x Px}$$

- Dette viser at sekventen $\forall x Px \vdash \forall x Px$ er bevisbar.
- Sekventen er også gyldig, noe som er lett å se:
    - Envher modell som oppfyller antecedenten, må oppfylle succedenten.
- At sekventen er gyldig følger også fra sunnhetsteoremet.

Eksempel 2

$$\dfrac{\dfrac{\times}{\forall x Px, Po \vdash \exists x Px, Po}}{\dfrac{\forall x Px \vdash \exists x Px, Po}{\forall x Px \vdash \exists x Px}}$$

- Dette viser at sekventen $\forall x Px \vdash \exists x Px$ er bevisbar.
- Sekventen er også gyldig:
  - Anta at modellen $\mathcal{M}$ gjør $\forall x Px$ sann.
  - Domenet må bestå av minst ett element e.
  - Siden $\mathcal{M}$ gjør $\forall x Px$ sann, må $\mathcal{M}$ gjøre formelen $P\bar{e}$ sann.
  - Siden $\mathcal{M}$ gjør $P\bar{e}$ sann, må $\mathcal{M}$ gjøre formelen $\exists x Px$ sann.
- At sekventen er gyldig følger også fra sunnhetsteoremet.

Eksempel 3

$$
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{\times}{\forall x(Px \land Qx), Pa, Qa \vdash Pa}
}{\forall x(Px \land Qx), Pa \land Qa \vdash Pa}
}{\forall x(Px \land Qx) \vdash Pa}
}{\forall x(Px \land Qx) \vdash \forall x Px}
\quad
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{\times}{\forall x(Px \land Qx), Pa, Qa \vdash Qa}
}{\forall x(Px \land Qx), Pa \land Qa \vdash Qa}
}{\forall x(Px \land Qx) \vdash Qa}
}{\forall x(Px \land Qx) \vdash \forall x Qx}
}{\forall x(Px \land Qx) \vdash \forall x Px \land \forall x Qx}
$$

- Dette viser at sekventen $\forall x(Px \land Qx) \vdash \forall x Px \land \forall x Qx$ er bevisbar.
- Sekventen er også gyldig:
  - Anta at modellen $\mathcal{M}$ gjør $\forall x(Px \land Qx)$ sann.
  - Velg et vilkårlig element e i domenet til $\mathcal{M}$.
  - Ved antakelsen må $\mathcal{M}$ gjøre $P\bar{e} \land Q\bar{e}$ sann.
  - Da må $\mathcal{M}$ gjøre $P\bar{e}$ og $Q\bar{e}$ sann.
  - Siden e var vilkårlig valgt, må $\mathcal{M}$ også gjøre $\forall x Px$ og $\forall x Qx$ sanne.
- At sekventen er gyldig følger også fra sunnhetsteoremet.

Eksempel 4

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\times}{\forall y Lya, Lba \vdash Lba, \exists y Lby}}{\forall y Lya, Lba \vdash \exists y Lby}}{\forall y Lya \vdash \exists y Lby}}{\dfrac{\forall y Lya \vdash \forall x \exists y Lxy}{\exists x \forall y Lyx \vdash \forall x \exists y Lxy}}
$$

- Dette viser at sekventen $\exists x \forall y Lyx \vdash \forall x \exists y Lxy$ er bevisbar.
- Sekventen er også gyldig:
    - Anta at modellen $\mathcal{M}$ gjør $\exists x \forall y Lyx$ sann.
    - Da fins det et element a slik at $\forall y Ly\bar{a}$ er sann i $\mathcal{M}$.
    - For å vise at $\forall x \exists y Lxy$ er sann i $\mathcal{M}$, velg et vilkårlig element b.
    - Det er nok å vise at $\exists y L\bar{b}y$ er sann i $\mathcal{M}$.
    - Vi har at $L\bar{b}\bar{a}$ er sann i $\mathcal{M}$, siden $\forall y Ly\bar{a}$ er sann i $\mathcal{M}$.
    - “Hvis det fins en som blir likt av alle, så har alle noen de liker.”
- At sekventen er gyldig følger også fra sunnhetsteoremet.

Eksempel 5

$$
\begin{array}{c}
\vdots \\
\forall x \exists y Lxy, Lbc, Loa \vdash Lba, Ldc, \exists x \forall y Lyx \\
\hline
\forall x \exists y Lxy, Lbc, Loa \vdash Lba, \forall y Lyc, \exists x \forall y Lyx \\
\hline
\forall x \exists y Lxy, Lbc, Loa \vdash Lba, \exists x \forall y Lyx \\
\hline
\forall x \exists y Lxy, \exists y Lby, Loa \vdash Lba, \exists x \forall y Lyx \\
\hline
\forall x \exists y Lxy \forall x \exists y Lxy, Loa \vdash Lba, \exists x \forall y Lyx \\
\hline
\forall x \exists y Lxy, Loa \vdash \forall y Lya, \exists x \forall y Lyx \\
\hline
\forall x \exists y Lxy, Loa \vdash \exists x \forall y Lyx \\
\hline
\forall x \exists y Lxy, \exists y Loy \vdash \exists x \forall y Lyx \\
\hline
\forall x \exists y Lxy \vdash \exists x \forall y Lyx
\end{array}
$$

Eksempel 5

- Vi klarte ikke å bevise sekventen $\forall x \exists y Lxy \vdash \exists x \forall y Lyx$.
- Kan vi klare å lage en motmodell?
  - Når vi kommer til kompletthet, så skal vi se at det *alltid* fins en motmodell for ikke-bevisbare sekventer.
- **JA**, la $\mathcal{M} = \{a, b\}$ og la $L^{\mathcal{M}} = \{\langle a, a \rangle, \langle b, b \rangle\}$.
- "Alle liker seg selv og ingen andre."
- Da vil $\mathcal{M} \models \forall x \exists y Lxy$.
  - $\mathcal{M} \models \exists y L\bar{a}y$, siden $\mathcal{M} \models L\bar{a}\bar{a}$.
  - $\mathcal{M} \models \exists y L\bar{b}y$, siden $\mathcal{M} \models L\bar{b}\bar{b}$.
- Og $\mathcal{M} \not\models \exists x \forall y Lyx$.
  - $\mathcal{M} \not\models \forall y Ly\bar{a}$, siden $\mathcal{M} \not\models L\bar{b}\bar{a}$.
  - $\mathcal{M} \not\models \forall y Ly\bar{b}$, siden $\mathcal{M} \not\models L\bar{a}\bar{b}$.

Eksempel 6

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\times}{Po, Pa \vdash \forall x Px, Pa, \exists x(Px \to \forall x Px)}}{Po \vdash Pa, Pa \to \forall x Px, \exists x(Px \to \forall x Px)}}{Po \vdash Pa, \exists x(Px \to \forall x Px)}}{Po \vdash \forall x Px, \exists x(Px \to \forall x Px)}}{\dfrac{\vdash Po \to \forall x Px, \exists x(Px \to \forall x Px)}{\vdash \exists x(Px \to \forall x Px)}}
$$

- Dette viser at sekventen $\vdash \exists x(Px \to \forall x Px)$ er bevisbar.
- “Det fins en x slik at hvis x liker fotball, så liker alle fotball.”
- Dette er ikke den samme påstanden som:
  “Hvis det fins en x som liker fotball, så liker alle fotball.”
- Oppgave: vis at formelen er gyldig. Argumenter for at formelen er sann i enhver modell.

5 Sunnhet av førsteordens sekventkalkyle

- Overblikk
- Antakelser om førsteordens språk
- Reglene bevarer falsifiserbarhet
- Alle aksiomer er gyldige
- Sunnhetsbeviset

Overblikk

- Vi skal nå vise at enhver sekvent som kan bevises ved å bruke LK-reglene er gyldig.
- Hvis vi kunne bevise noe som *ikke* var gyldig, så ville LK ha vært ukorrekt eller usunn...

Definisjon (Sunnhet)

En sekventkalkyle er sunn hvis enhver sekvent som er bevisbar i kalkylen, er gyldig.

Teorem (Sunnhet)

Sekventkalkylen LK *for førsteordens logikk er sunn.*

Antakelser om førsteordens språk

- Vi antar i beviset at et førsteordens språk $\mathcal{L}$ er gitt.
- En rotsekvent $\Gamma \vdash \Delta$ består altså av lukkede $\mathcal{L}$-formler.
- Fra antakelsen om at $\Gamma \vdash \Delta$ er bevisbar, skal vi vise at $\Gamma \vdash \Delta$ er gyldig.
- Med *gyldig* mener vi *gyldig i alle $\mathcal{L}$-modeller*.
- I en utledning av $\Gamma \vdash \Delta$ brukes det utvidete språket $\mathcal{L}^{\mathrm{par}}$.
- Vi antar derfor i sunnhetsbeviset at alle modeller er $\mathcal{L}^{\mathrm{par}}$-modeller.
- Når vi har vist at $\Gamma \vdash \Delta$ er gyldig i alle $\mathcal{L}^{\mathrm{par}}$-modeller, så må $\Gamma \vdash \Delta$ også være gyldig i alle $\mathcal{L}$-modeller, siden $\Gamma \vdash \Delta$ kun består av $\mathcal{L}$-formler.

Strukturen i beviset for sunnhet

Vi viser følgende lemmaer:

1. Alle LK-reglene bevarer falsifiserbarhet oppover.
2. En LK-utledning med falsifiserbar rotsekvent har minst én falsifiserbar løvsekvent.
3. Alle aksiomer er gyldige.

Til slutt vises sunnhetsteoremet ved hjelp av lemmaene.

Reglene bevarer falsifiserbarhet

Definisjon

En LK*-regel θ er falsifiserbarhetsbevarende (oppover) hvis hver gang konklusjonen i en θ-slutning er falsifiserbar, så er også minst ett av premissene i slutningen falsifiserbart.*

Lemma

Alle LK*-reglene er falsifiserbarhetsbevarende.*

- Vi har vist at α- og β-reglene har egenskapen.
- Gjenstår å vise at γ- og δ-reglene har egenskapen.

Bevis for at L∀ bevarer falsifiserbarhet

$$\frac{\Gamma, \forall x\varphi, \varphi[t/x] \ \vdash \Delta}{\Gamma, \forall x\varphi \ \vdash \Delta}\,\mathrm{L}\forall \qquad t \text{ er en lukket term}$$

- Anta at modellen $\mathcal{M}$ falsifiserer konklusjonen $\Gamma, \forall x\varphi \vdash \Delta$.
- $\mathcal{M}$ gjør alle formlene i $\Gamma \cup \{\forall x\varphi\}$ sanne og alle formlene i Δ usanne.
- Det holder å vise at $\mathcal{M} \models \varphi[t/x]$. Da er premisset falsifisert av $\mathcal{M}$.
- Anta at $t^{\mathcal{M}} = e$, hvor $e \in |\mathcal{M}|$.
  (Her bruker vi definisjonen av modell og at t er en lukket term.)
- Siden $\mathcal{M} \models \forall x\varphi$ har vi at $\mathcal{M} \models \varphi[\bar{d}/x]$ for alle $d \in |\mathcal{M}|$.
  (Her bruker vi definisjonen av oppfyllbarhet.)
- Spesielt har vi at $\mathcal{M} \models \varphi[\bar{e}/x]$.
- t og $\bar{e}$ må tolkes likt (som elementet e). Derfor har vi $\mathcal{M} \models \varphi[t/x]$.

- Mot slutten av beviset brukte vi egentlig følgende lemma.

Lemma

La $\mathcal{M}$ være en modell og φ en formel med høyst x fri. Anta at s og t er termer slik at $s^{\mathcal{M}} = t^{\mathcal{M}}$. Da vil $\mathcal{M} \models \varphi[s/x]$ hvis og bare hvis $\mathcal{M} \models \varphi[t/x]$.

- Oppgave: bevis lemmaet. Hint: induksjon på φ.

Bevis for at L$\exists$ bevarer falsifiserbarhet

$$\frac{\Gamma, \varphi[a/x] \ \vdash \ \Delta}{\Gamma, \exists x \varphi \ \vdash \ \Delta}\ \mathsf{L}\exists$$

a er en parameter som ikke forekommer i konklusjonen

- Anta at modellen $\mathcal{M}$ falsifiserer konklusjonen $\Gamma, \exists x\varphi \vdash \Delta$.
- $\mathcal{M}$ gjør alle formlene i $\Gamma \cup \{\exists x\varphi\}$ sanne og alle formlene i Δ usanne.
- Vi må finne en modell som falsifiserer premisset.
- Men, vi kan ikke uten videre anta at $\mathcal{M} \models \varphi[a/x]$.
- Siden $\mathcal{M} \models \exists x\varphi$ har vi at $\mathcal{M} \models \varphi[\bar{d}/x]$ for en $d \in |\mathcal{M}|$.
- Fra modellen $\mathcal{M}$ lager vi en ny modell $\mathcal{M}'$ på følgende måte:
  - $\mathcal{M}'$ skal være helt lik $\mathcal{M}$ bortsett fra når det gjelder tolkningen av a.
  - Parameteren a skal tolkes som elementet d, dvs. $a^{\mathcal{M}'} = d$.
- Vi konkluderer med at $\mathcal{M}'$ falsifiserer premisset:
  - Siden a ikke forekommer i konklusjonen, så må $\mathcal{M}'$ og $\mathcal{M}$ tolke formlene i Γ og Δ likt. $\mathcal{M}'$ gjør derfor alle formlene i Γ sanne og alle formlene i Δ usanne.
  - Siden a og $\bar{d}$ må tolkes likt (som elementet d), må $\mathcal{M}' \models \varphi[a/x]$.

Et eksempel

- Anta at $\mathcal{M}$ er en modell med domene $\{1, 2\}$ slik at $P^{\mathcal{M}} = \{2\}$.
- Anta at a og b er parametre slik at $a^{\mathcal{M}} = b^{\mathcal{M}} = 1$.
- Da vil $\mathcal{M} \not\models Pa$ og $\mathcal{M} \not\models Pb$.

$$\frac{Pb \vdash Pa}{\exists x Px \vdash Pa}$$

- Vi har at $\mathcal{M}$ falsifiserer konklusjonen:

  $\mathcal{M} \models \exists x Px$, siden $\mathcal{M} \models P\bar{2}$.

  $\mathcal{M} \not\models Pa$.
- Men, $\mathcal{M}$ falsifiserer ikke premisset, siden $\mathcal{M} \not\models Pb$.
- Vi lager en ny modell $\mathcal{M}'$ som er slik at $b^{\mathcal{M}'} = 2$.
- Da vil $\mathcal{M}'$ falsifiserer premisset.

Bevis for at R∃ bevarer falsifiserbarhet

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, \exists x\varphi, \varphi[t/x]}{\Gamma \vdash \Delta, \exists x\varphi}\ \mathsf{R}\exists \qquad t \text{ er en lukket term}$$

- Anta at modellen $\mathcal{M}$ falsifiserer konklusjonen $\Gamma \vdash \exists x\varphi, \Delta$.
- $\mathcal{M}$ gjør alle formlene i Γ sanne og alle formlene i $\Delta \cup \{\exists x\varphi\}$ usanne.
- Det holder å vise at $\mathcal{M} \not\models \varphi[t/x]$. Da er premisset falsifisert av $\mathcal{M}$.
- Anta at $t^{\mathcal{M}} = e$, hvor $e \in |\mathcal{M}|$.
  (Her bruker vi definisjonen av modell og at t er en lukket term.)
- Siden $\mathcal{M} \not\models \exists x\varphi$ fins det ikke noen $d \in |\mathcal{M}|$ slik at $\mathcal{M} \models \varphi[\bar{d}/x]$.
  (Her bruker vi definisjonen av oppfyllbarhet.)
- Spesielt har vi at $\mathcal{M} \not\models \varphi[\bar{e}/x]$.
- t og $\bar{e}$ må tolkes likt (som elementet e). Derfor har vi $\mathcal{M} \not\models \varphi[t/x]$.

Bevis for at R$\forall$ bevarer falsifiserbarhet

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, \varphi[a/x]}{\Gamma \vdash \Delta, \forall x\varphi}\ \mathrm{R}\forall$$

a er en parameter som ikke forekommer i konklusjonen

- Anta at modellen $\mathcal{M}$ falsifiserer konklusjonen $\Gamma \vdash \Delta, \forall x\varphi$.
- $\mathcal{M}$ gjør alle formlene i Γ sanne og alle formlene i $\Delta \cup \{\forall x\varphi\}$ usanne.
- Vi må finne en modell som falsifiserer premisset.
- Men, vi kan ikke uten videre anta at $\mathcal{M} \not\models \varphi[a/x]$.
- Siden $\mathcal{M} \not\models \forall x\varphi$ har vi at $\mathcal{M} \not\models \varphi[\bar{d}/x]$ for en $d \in |\mathcal{M}|$.
- Fra modellen $\mathcal{M}$ lager vi en ny modell $\mathcal{M}'$ på følgende måte:
  - $\mathcal{M}'$ skal være helt lik $\mathcal{M}$ bortsett fra når det gjelder tolkningen av a.
  - Parameteren a skal tolkes som elementet d, dvs. $a^{\mathcal{M}'} = d$.
- Vi konkluderer med at $\mathcal{M}'$ falsifiserer premisset:
  - Siden a ikke forekommer i konklusjonen, så må $\mathcal{M}'$ og $\mathcal{M}$ tolke formlene i Γ og Δ likt. $\mathcal{M}'$ gjør derfor alle formlene i Γ sanne og alle formlene i Δ usanne.
  - Siden a og $\bar{d}$ må tolkes likt (som elementet d), må $\mathcal{M}' \not\models \varphi[a/x]$.

Reglene bevarer falsifiserbarhet

Lemma

Hvis rotsekventen i en LK*-utledning* π *er falsifiserbar, så er minst én av løvsekventene i* π *falsifiserbar.*

- Beviset går likt som for utsagnslogikk ved strukturell induksjon på LK-utledningen π.
- Basissteget (π er en sekvent $\Gamma \vdash \Delta$) er trivielt, siden eneste sekvent $\Gamma \vdash \Delta$ er både rot- og løvsekvent.
- To induksjonssteg: ettpremiss- og topremissutvidelse.
- Begge bruker lemmaet om falsifiserbarhetsbevaring (oppover).

Alle aksiomer er gyldige

Lemma

Alle aksiomer er gyldige.

- Beviset går likt som for utsagnslogikk.
- Et aksiom er på formen:

$$\Gamma, P(s_1, \ldots, s_n) \vdash P(t_1, \ldots, t_n), \Delta$$

  slik at termene s_i og t_i er like for $1 \leq i \leq n$.
- Enhver modell som oppfyller antecedenten må oppfylle $P(s_1, \ldots, s_n)$.
- Dermed oppfylles en formel i succedenten, $P(t_1, \ldots, t_n)$.

Sunnhetsbeviset

Teorem (Sunnhet)

Sekventkalkylen LK *for førsteordens logikk er sunn.*

Bevis.

- Anta at $\Gamma \vdash \Delta$ er LK-bevisbar.
- La π være et LK-bevis med rotsekvent $\Gamma \vdash \Delta$.
- Anta for motsigelse at $\Gamma \vdash \Delta$ ikke er gyldig, men er falsifiserbar.
- Ved Lemma fins det minst én løvsekvent i π som er falsifiserbar.
- Siden π er et bevis, må løvsekventen være et aksiom.
- Ved Lemma må løvsekventen være gyldig. Det gir en motsigelse.
- Da må $\Gamma \vdash \Delta$ være gyldig.

$\square$

6 Kompletthet av LK

- Overblikk
- Strategier
- Herbranduniverset
- Rettferdige strategier
- Königs lemma
- Bevis for modelleksistensteoremet
- Eksempler på eksistens av motmodell

Overblikk

- Vi skal nå bevise at LK er komplett.
- Ikke bare er LK sunn, den kan også vise *alle* gyldige sekventer.
- Det er ingen “hull” i mengden av LK-bevisbare formler.
- Det er to måter å forstå “fra φ følger ψ” på:
  1. Semantisk: $\varphi \vDash \psi$, hvis φ er sann, så er ψ sann.
  2. Syntaktisk: $\varphi \vdash \psi$, det fins et bevis for sekventen $\varphi \vdash \psi$ / fra antakelsen φ, så kan ψ bevises.
- Med sunnhet og kompletthet, så blir disse ekvivalente.

Kurt Gödel (1906-1978)

Kurt Gödel
(1906-1978)

- En av de mest betydningsfulle logikere noensinne.
- Har hatt enorm innflytelse på logikk, matematikk og filosofi.
- Det er han som først viste kompletthet av førsteordens logikk (1929).
- Er mest kjent for ufullstendighetsteoremene (1931) og at kontinuumshypotesen er konsistent med mengdelæren (1937).

Overblikk

Teorem (Kompletthet)

Hvis $\Gamma \vdash \Delta$ *er gyldig, så er den bevisbar i* LK.

For å vise *kompletthet*, viser vi den ekvivalente påstanden:

Lemma (Modelleksistens)

Hvis $\Gamma \vdash \Delta$ *ikke er bevisbar i LK, så er den falsifiserbar.*

Dvs. det finnes en modell som gjør alle formler i Γ sanne og alle formler i Δ usanne.

Merk at vi uansett går fra en universell påstand ("for alle modeller") til en eksistensiell påstand ("det fins et bevis").

Strategier

- Hvis en formel eller sekvent er gyldig, kan vi ha en garanti for at vi finner et bevis ved å begynne med en rotsekvent og anvende LK-reglene gjentatte ganger?
- For å gjøre dette litt mer presist, innfører vi begrepet strategi.

Definisjon (Strategi)

En strategi for LK *er en angivelse av hvordan* LK*-reglene systematisk skal anvendes på formler i* LK*-utledninger.*

- Med vilje litt vagt. Mye kan være en strategi.
- Vi er interessert i strategier som garanterer at vi får et bevis til slutt hvis det er slik at bevis fins. La oss kalle slike strategier for "gode".

Strategier

Definisjon (Formeltype)

La φ være en formel i en utledning. Vi sier at φ er av type θ hvis φ kan være hovedformelen i en θ-slutning.

Eksempel

$$Pa \wedge Pb, Qa \vee Qb \vdash \exists xPx, \forall xPx$$

- $Pa \wedge Pb$ *er en* α*-formel*
- $Qa \vee Qb$ *er en* β*-formel*
- $\exists xPx$ *er en* γ*-formel*
- $\forall xPx$ *er en* δ*-formel*

Strategier

En enkel strategi

1. Anvend α-regler så mange ganger som mulig, dvs. helt til ingen løvsekvent lenger inneholder en formel av type α. Gå til 2.
2. Anvend β-regler så mange ganger som mulig.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\times}{P, Q \vdash P} \qquad \dfrac{\times}{P, Q \vdash Q}}{P, Q \vdash P \wedge Q}\ 2}{P \wedge Q \vdash P \wedge Q}\ 1$$

- Denne strategien er ikke "god". Det kan hende at 1 må anvendes etter at 2 er anvendt.

En "god" strategi for utsagnslogikk.

1. Anvend α-regler så mange ganger som mulig. Gå til 2.
2. Anvend β-regler så mange ganger som mulig. Gå til 3.
3. Hvis det er mulig å anvende en α-regel, gå til 1.

$$
\dfrac{
  \dfrac{
    \dfrac{
      \dfrac{\times}{P, Q \vdash P, R, R}
      \qquad
      \dfrac{\times}{P, Q \vdash Q, R, R}
    }{P, Q \vdash P \wedge Q, R, R}\,2
  }{\neg(P \wedge Q), P, Q \vdash R, R}\,1
  \qquad
  \dfrac{\times}{R, P, Q \vdash R, R}
}{
  \dfrac{\neg(P \wedge Q) \vee R, P, Q \vdash R, R}{
    \dfrac{\neg(P \wedge Q) \vee R, P \vdash R, Q \to R}{
      \dfrac{\neg(P \wedge Q) \vee R \vdash P \to R, Q \to R}{\neg(P \wedge Q) \vee R \vdash (P \to R) \vee (Q \to R)}\,1
    }\,1
  }\,1
}\,2
$$

Strategier

- Hva skal til for at en strategi skal være “god”?

1. Alle formler må analyseres før eller senere.

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{Pffa, Pfa, Pa, \forall x Px, Qfa \land Qfa \vdash Qfa}{Pfa, Pa, \forall x Px, Qfa \land Qfa \vdash Qfa}}{Pa, \forall x Px, Qfa \land Qfa \vdash Qfa}}{\forall x Px, Qfa \land Qfa \vdash Qfa}$$

2. Vi må forsøke å sette inn “alle termer” for γ-formler.

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{Pgga, Pga, Pa, \forall x Px \vdash Qga, Pfffb}{Pga, Pa, \forall x Px \vdash Qga, Pfffb}}{Pa, \forall x Px \vdash Qga, Pfffb}}{\forall x Px \vdash Qga, Pfffb}$$

- Vi må kunne snakke om “alle termer” på en presis måte...

Herbranduniverset

Definisjon (Herbranduniverset)

La T være en mengde termer. Da er $\mathcal{H}(T)$, Herbranduniverset til T, den minste mengden slik at:

- *$\mathcal{H}(T)$ inneholder alle konstanter fra T. Hvis det ikke er noen konstanter i T, så er en parameter o fra* par *(kalt en dummykonstant) med i $\mathcal{H}(T)$.*
- *Hvis f er et funksjonssymbol i T med aritet n og $t_1, \ldots, t_n$ er termer i $\mathcal{H}(T)$, så er $f(t_1, \ldots, t_n)$ i $\mathcal{H}(T)$.*

Herbranduniverset til en mengde formler er Herbranduniverset til mengden av termer som forekommer i formlene. Herbranduniverset til en gren er Herbranduniverset til mengden av formler som forekommer i grenen.

- Intuitivt, så er Herbranduniverset til T mengden av alle *lukkede* termer som kan genereres fra termer i T.

Herbranduniverset

Eksempel

La $T = \{f(x)\}$.*Da er Herbranduniverset til T mengden*

$$\{o, fo, ffo, fffo, \ldots\}$$

Eksempel

La $T = \{a, f(x)\}$.*Da er Herbranduniverset til T mengden*

$$\{a, fa, ffa, fffa, \ldots\}$$

Eksempel

La $F = \{\forall x H(f(g(x)))\}$.*Da er Herbranduniverset til F mengden*

$$\{o, fo, go, fgo, gfo, ffo, ggo, , \ldots\}$$

Rettferdige strategier

- Enhver rettferdig strategi må gjøre at
  - alle formler blir analysert før eller senere, og
  - alle γ-formler blir instansiert med alle termer før eller senere.
- Hvis vi følger en rettferdig strategi, så skal én av to ting skje:
  1. Enten så klarer vi å lukke alle grener og får et bevis,
  2. eller så fins en åpen gren som vi kan lage en motmodell fra.
- For at dette skal gi mening må vi godta at utledninger kan være uendelig store, dvs. ha uendelig lange grener.
- Vi kan tenke at vi går til *grensen* i konstruksjonen av en utledning, enten ved at ingen regler lenger kan anvendes eller ved å fortsette med regelanvendelser i det uendelige. Vi kaller slike for grenseutledninger.
- Vi inkluderer altså uendelige trær når vi snakker om grenseutledninger.
- Merk: hvis alle grener i en utledning kan lukkes, så er utledningen endelig.

Rettferdige strategier

- Vi skal nå abstrahere over alle "gode" strategier.

Definisjon (Rettferdig strategi)

En strategi er rettferdig hvis enhver grenseutledning som fås ved å følge strategien har følgende egenskaper:

1. *Hvis φ er en α-, β- eller δ-formel i en gren som ikke er lukket, så er φ hovedformel i en slutning i grenen.*
2. *Hvis φ er en γ-formel på formen $\mathsf{Q}x\psi$ i en gren som ikke er lukket, så er $\psi[t/x]$ aktiv formel i en slutning i grenen, for alle termer t i Herbranduniverset til grenen.*

Königs lemma

Lemma (Königs lemma)

Hvis T er et uendelig tre, men hvor enhver forgrening er endelig, så fins det en uendelig lang gren.

Bevis

Vi definerer en uendelig lang gren induktivt. La u_0 være rotnoden i treet T. Siden T er uendelig og u_0 har endelig mange etterkommere, så må ett av de umiddelbare deltrærne fra u_0 være uendelig. (Ellers ville T ha vært et endelig tre.) La u_1 være rotnoden i et slikt deltre. Hvis grenen $u_0, u_1, \ldots, u_n$ er generert, så finner man neste node u_{n+1} ved samme type resonnering. Denne prosessen gir en uendelig gren.

Bevis for modelleksistensteoremet

- Anta at $\Gamma \vdash \Delta$ ikke er bevisbar.
- La π være en utledning (muligens uendelig) av $\Gamma \vdash \Delta$ som fremkommer ved å følge en rettferdig strategi. "En maksimal utledning".
- Siden $\Gamma \vdash \Delta$ ikke er bevisbar, så må det finnes minst en gren som ikke er lukket. (Her bruker vi Königs lemma.) La G være en slik gren. La

  $G^{\top}$ være mengden av alle formler som forekommer i en antecedent i G,

  $G^{\perp}$ være mengden av alle formler som forekommer i en succedent i G, og

  A være mengden av alle atomære formler som forekommer i $G^{\top}$.

Bevis for modelleksistensteoremet

- Vi konstruerer nå en motmodell $\mathcal{M}$ for $\Gamma \vdash \Delta$.
- La domenet til $\mathcal{M}$ være Herbranduniverset til grenen (dvs. mengden av alle lukkede termer som kan genereres fra termer som forekommer i grenen).
- La $a^{\mathcal{M}} = a$ for alle konstantsymboler a.
- Hvis f er et funksjonssymbol med aritet n, la $f^{\mathcal{M}}(t_1, \ldots, t_n) = f(t_1, \ldots, t_n)$.
    - Da vil $t^{\mathcal{M}} = t$ for alle lukkede termer t.
    - Alle termer tolkes som seg selv.
- Hvis R er et relasjonssymbol med aritet n, la $\langle t_1, \ldots, t_n \rangle \in R^{\mathcal{M}}$ hvis og bare hvis $R(t_1, \ldots, t_n) \in A$.
- En slik modell kalles ofte for en Herbrandmodell eller en termmodell.

Bevis for modelleksistensteoremet

- Vi viser ved induksjon på førsteordens formler (i språket $\mathcal{L}^{\text{par}}$) at modellen $\mathcal{M}$ gjør *alle* formler i $G^\top$ sanne og alle formler i $G^\perp$ usanne.
- Påstandene som vi viser for førsteordens formler er:

  Hvis $\varphi \in G^\top$, så $\mathcal{M} \models \varphi$.
  Hvis $\varphi \in G^\perp$, så $\mathcal{M} \not\models \varphi$.

Basissteg 1: φ er en atomær formel $R(t_1, \ldots, t_n)$ i $G^\top$.

- Da må $R(t_1, \ldots, t_n) \in A$ og $\langle t_1, \ldots, t_n \rangle \in R^\mathcal{M}$ ved konstruksjon.
- Da må $\mathcal{M} \models R(t_1, \ldots, t_n)$.

Basissteg 2: φ er en atomær formel $R(t_1, \ldots, t_n)$ i $G^\perp$.

- Siden G ikke er lukket, må $R(t_1, \ldots, t_n) \notin A$ og $\langle t_1, \ldots, t_n \rangle \notin R^\mathcal{M}$.
- Da vil $\mathcal{M} \not\models R(t_1, \ldots, t_n)$.

Bevis for modelleksistensteoremet

Induksjonssteg: Fra antakelsen om at påstandene holder for mindre formler, så må vi vise at de holder for $\neg\varphi$, $(\varphi \wedge \psi)$, $(\varphi \vee \psi)$, $(\varphi \rightarrow \psi)$, $\forall x\varphi$ og $\exists x\varphi$.

I beviset for kompletthet av utsagnslogisk LK gjorde vi mesteparten.

F.eks. anta at $\varphi \wedge \psi \in G^{\top}$.

- Ved antakelsen om at strategien var rettferdig, så har $\varphi \wedge \psi$ vært hovedformel i en slutning i grenen G.
- Da vil $\varphi \in G^{\top}$ og $\psi \in G^{\top}$.
- Ved induksjonshypotesen vil $\mathcal{M} \models \varphi$ og $\mathcal{M} \models \psi$.
- Ved definisjonen av oppfyllbarhet har vi $\mathcal{M} \models \varphi \wedge \psi$.

Formler med kvantorer gjenstår.

Bevis for modelleksistensteoremet

Anta at $\exists x \varphi \in G^{\top}$.

- Ved antakelsen om at strategien var rettferdig, så har $\exists x \varphi$ vært hovedformel i en slutning i grenen.
- Da fins en parameter a slik at $\varphi[a/x] \in G^{\top}$.
- Ved induksjonshypotesen vil $\mathcal{M} \models \varphi[a/x]$.
- Siden $a^{\mathcal{M}} = a$, så vil også $\mathcal{M} \models \varphi[\bar{a}/x]$.
- Ved definisjonen av oppfyllbarhet vil $\mathcal{M} \models \exists x \varphi$.

Bevis for modelleksistensteoremet

Anta at $\exists x \varphi \in G^{\perp}$.

- Ved antakelsen om at strategien var rettferdig, så har $\varphi[t/x]$ vært aktiv formel for alle termer t i Herbranduniverset til grenen.
- Vi har dermed for alle termer t i Herbranduniverset til grenen følgende
  - $\varphi[t/x] \in G^{\perp}$
  - $\mathcal{M} \not\models \varphi[t/x]$ (fra induksjonshypotesen)
  - $\mathcal{M} \not\models \varphi[\bar{t}/x]$ (siden $t^{\mathcal{M}} = t$)
- Husk at domenet til $\mathcal{M}$ er Herbranduniverset til grenen.
- Ved definisjonen av oppfyllbarhet vil $\mathcal{M} \not\models \exists x \varphi$.

Bevis for modelleksistensteoremet

Anta at $\forall x \varphi \in G^{\perp}$.

- Ved antakelsen om at strategien var rettferdig, så har $\forall x \varphi$ vært hovedformel i en slutning i grenen.
- Da fins en parameter a slik at $\varphi[a/x] \in G^{\perp}$.
- Ved induksjonshypotesen vil $\mathcal{M} \not\models \varphi[a/x]$.
- Siden $a^{\mathcal{M}} = a$, så vil også $\mathcal{M} \not\models \varphi[\bar{a}/x]$.
- Ved definisjonen av oppfyllbarhet vil $\mathcal{M} \not\models \forall x \varphi$.

Bevis for modelleksistensteoremet

Anta at $\forall x \varphi \in G^{\top}$.

- Ved antakelsen om at strategien var rettferdig, så har $\varphi[t/x]$ vært aktiv formel for alle termer t i Herbranduniverset til grenen.
- Vi har dermed for alle termer t i Herbranduniverset til grenen følgende
  - $\varphi[t/x] \in G^{\top}$
  - $\mathcal{M} \models \varphi[t/x]$ (fra induksjonshypotesen)
  - $\mathcal{M} \models \varphi[\bar{t}/x]$ (siden $t^{\mathcal{M}} = t$)
- Husk at domenet til $\mathcal{M}$ er Herbranduniverset til grenen.
- Ved definisjonen av oppfyllbarhet vil $\mathcal{M} \models \forall x \varphi$.

Noen kommentarer

- Vi kan se på konstruksjonen av en utledning som en tilnærming/approksimasjon til en motmodell for $\Gamma \vdash \Delta$.
- Jo flere ganger vi anvender regler (ved å følge en rettferdig strategi), jo nærmere kommer vi en eventuell motmodell.
- For å lage en motmodell på denne måten, kan det være nødvendig å anvende reglene uendelig mange ganger.
- Ofte fins det endelige motmodeller der hvor denne metoden gir en uendelig motmodell. Å finne endelige motmodeller der hvor det fins er ikke lett. Dette er noe det forskes på.
- Idéen i kompletthetsbeviset er viktig. Konstruksjonen av modeller fra noe rent syntaktisk. Et filosofisk spørsmål: Er det egentlig et skille mellom syntaks og semantikk?

$$
\dfrac{
\dfrac{\times}{\varphi, Pa \vdash \forall x Qx, Pa}
\qquad
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{G}{Qa, \varphi, Pa \vdash Qb, Pb}
\qquad
\dfrac{\times}{Qb, Qa, \varphi, Pa \vdash Qb}
}{Qa, \varphi, Pb \to Qb, Pa \vdash Qb}
}{Qa, \varphi, Pa \vdash Qb}
}{Qa, \varphi, Pa \vdash \forall x Qx}
}{
\dfrac{\varphi, Pa \to Qa, Pa \vdash \forall x Qx}{\underbrace{\forall x (Px \to Qx)}_{\varphi}, Pa \vdash \forall x Qx}
}
$$

- Herbranduniverset til grenen G, og domenet til $\mathcal{M}$, er $\{a, b\}$.
- Siden $Pa \in G^\top$ vil $a \in P^\mathcal{M}$ og $\mathcal{M} \models Pa$.
- Siden $Qa \in G^\top$ vil $a \in Q^\mathcal{M}$ og $\mathcal{M} \models Qa$ og $\mathcal{M} \models Pa \to Qa$.
- Siden $Qb \in G^\perp$ vil $b \notin Q^\mathcal{M}$ og $\mathcal{M} \not\models Qb$ og $\mathcal{M} \not\models \forall x Qx$.
- Siden $Pb \in G^\perp$ vil $b \notin P^\mathcal{M}$ og $\mathcal{M} \not\models Pb$ og $\mathcal{M} \models Pb \to Qb$.
- Dermed har vi også $\mathcal{M} \models \forall x (Px \to Qx)$.
- $\mathcal{M}$ oppfyller alle formlene i $G^\top$ og falsifiserer alle formlene i $G^\perp$.

$$\dfrac{\dfrac{\overset{\text{(Greit. Begge grener lukkes.)}}{\varphi, Paa \to Pab, Paa \vdash Pab}}{\varphi, Paa \vdash Pab} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{\times}{\varphi, Pba \vdash Pab, Paa, Pba} \qquad \overset{G}{Pbb, \varphi, Pba \vdash Pab, Paa}}{\varphi, Pba \to Pbb, Pba \vdash Pab, Paa}}{\varphi, Pba \vdash Pab, Paa}}{} \qquad \overset{\times}{Pab, \varphi, Pba \vdash Pab}}{\varphi, Paa \to Pab, Pba \vdash Pab}}{\varphi, Pba \vdash Pab}}{\underbrace{\forall x(Pxa \to Pxb)}_{\varphi}, Paa \lor Pba \vdash Pab}$$

- Herbranduniverset til grenen G - og domenet til $\mathcal{M}$ - er $\{a, b\}$.
- Siden $Pab \in G^{\perp}$ vil $\langle a, b\rangle \notin P^{\mathcal{M}}$ og $\mathcal{M} \not\models Pab$.
- Siden $Pba \in G^{\top}$ vil $\langle b, a\rangle \in P^{\mathcal{M}}$ og $\mathcal{M} \models Pba$ og $\mathcal{M} \models Paa \lor Pba$.
- Siden $Paa \in G^{\perp}$ vil $\langle a, a\rangle \notin P^{\mathcal{M}}$ og $\mathcal{M} \not\models Paa$ og $\mathcal{M} \models Paa \to Pab$.
- Siden $Pbb \in G^{\top}$ vil $\langle b, b\rangle \in P^{\mathcal{M}}$ og $\mathcal{M} \models Pbb$ og $\mathcal{M} \models Pba \to Pbb$.
- Dermed har vi også $\mathcal{M} \models \forall x(Pxa \to Pxb)$.
- $\mathcal{M}$ oppfyller alle formlene i $G^{\top}$ og falsifiserer alle formlene i $G^{\perp}$.