Forelesning 1: Introduksjon og mengdelære

Christian Mahesh Hansen - 22. januar 2007

1 Praktisk informasjon

1.1 Forelesere og tid/sted

- Foreleser:
  - Christian Mahesh Hansen (`chrisha@ifi.uio.no`)
  - Kontor 2403, 2. etasje, Ifi
  - Gjesteforelesere i løpet av semesteret?
- Nettside:
  - `http://www.ifi.uio.no/inf3170`
- Forelesning:
  - Mandag 14:15 – 16:00
  - Lille auditorium
- Gruppeundervisning:
  - Onsdag 12:15 – 14:00, 3A, Ifi
  - Første gruppetime: onsdag 31. januar
  - Gruppelærere:
    * Bjarne Holen (`bjarneh@ifi.uio.no`)
    * Arild Waaler (`arild@ifi.uio.no`)

1.2 Obliger og eksamen

Obliger og eksamen

Obliger

- Planlagt 3 obliger.
- Se hjemmesiden for tidsfrister og regler.
- Bedømmes til bestått/ikke bestått.
- Alle obligene må bestås for å kunne gå opp til eksamen.

Eksamen

- Ingen midttermineksamen.
- Avsluttende eksamen: muntlig *eller* skriftlig.
- Bokstavkarakterer – avsluttende eksamen teller 100%

1.3 Pensum

Pensum

- Definert av det som gjennomgås på forelesning og gruppeundervisning, samt obliger.
- Foiler deles ut på forelesning og legges ut på nettsiden.
- Ingen lærebok, men...

1.4 Støttelitteratur

Støttelitteratur

Ikke pensum i seg selv, frivillig ekstralesing!

Referanser

[Gallier, 2003] J. Gallier. *Logic for Computer Science - Foundations of Automated Theorem Proving*

- Ligger tett opptil forelest pensum i kurset.
- Oppdatert versjon fra 2003 tilgjengelig for gratis nedlasting.
- Kun kapitlene 3, 4, 5 og 8 er aktuelle.

Referanser

[Fitting, 1996] M. C. Fitting. *First-Order Logic and Automated Theorem Proving*

2 Hva skal vi lære?

Tenk deg en verden...

...der setninger er enten *sanne* eller *usanne*.

Eksempel. *Setning: "Ole liker logikk."*

- *Hvis "Ole liker logikk" er sann, så er setningen sann.*
- *Hvis "Ole liker logikk" er usann, så er setningen usann.*
- *Setningens sannhetsverdi avhenger av hvorvidt "Ole liker logikk" er sann eller usann.*

Sann-eller-usann-verden

Eksempel. *Setning: "Ole liker logikk og Ole liker programmering."*

- *Hvis både "Ole liker logikk" og "Ole liker programmering" er sanne, så er setningen sann.*
- *Hvis "Ole liker logikk" eller "Ole liker programmering" er usann, så er setningen usann.*
- *Setningens sannhetsverdi avhenger av sannhetsverdien til "Ole liker logikk" og "Ole liker programmering".*

Sann-eller-usann-verden

Eksempel. *Setning: "Ole liker logikk eller Ole liker ikke logikk."*

- *Hvis "Ole liker logikk" er usann, så er "Ole liker ikke logikk" sann.*
- *Hvis "Ole liker logikk" er sann, så er "Ole liker ikke logikk" usann.*
- *Setningens sannhetsverdi er helt uavhengig av sannhetverdien til "Ole liker logikk"!*
- *Det er umulig å gjøre setningen usann, den er sann på grunn av måten den er konstruert på.*

Oversikt over kurset

- *Logisk symbolspråk* – bygge opp formelle setninger.
- *Semantikk* – en presis måte å tolke formelle setninger på.
- *Logisk kalkyle* – regneregler for å finne ut om en formell setning alltid er sann uavhengig av tolkning.
- *Sunnhet og kompletthet* av logiske kalkyler.
- Nyttige teknikker for å lage søkealgoritmer for logiske kalkyler.

Oppgave. *Setning: "Det finnes en person x slik at hvis x liker logikk så liker alle personer logikk."*

- *Er det mulig å gjøre denne setningen usann. . . ?*

3 Mengdelære

3.1 Mengder

Mengder

Definisjon 3.1.

- *En* mengde *er en endelig eller uendelig samling objekter der innbyrdes rekkefølge og antall forekomster av hvert objekt ignoreres.*
- *Objektene i en mengde kalles* elementer.
- *Hvis a er element i mengden S, skriver vi $a \in S$. Hvis a* ikke *er element i S, skriver vi $a \notin S$.*
- *To mengder S og T er* like, *$S = T$, hvis de inneholder de samme elementene.*

Notasjon. *Mengden med elementene a, b, c og d skrives ofte $\{a, b, c, d\}$.*

Mengder

Eksempel.

- $a \in \{a, b, c\}$
- $d \notin \{a, b, c\}$
- $1 \in \{a, 1, \gamma, \Phi\}$
- $2 \notin \{a, 1, \gamma, \Phi\}$
- $\{a, b\} = \{b, a\}$
- $\{a, a, b\} = \{a, b\}$
- $\{a, b\} \neq \{b, c\}$ *(mengdene er ulike)*

Noen spesielle mengder

Definisjon 3.2 (Den tomme mengden)**.**

- *Den tomme mengden er mengden som ikke inneholder noen elementer.*
- *Skrives ofte* $\{\}$ *eller* $\emptyset$.

Definisjon 3.3 (Singletonmengde)**.** *En singletonmengde er en mengde som har nøyaktig ett element.*

Eksempel. *Både* $\{a\}$, $\{b\}$ *og* $\{b, b\}$ *er singletonmengder.*

Union – slå sammen mengder

Definisjon 3.4 (Union)**.**

- *Unionen av to mengder* S *og* T *er den mengden som inneholder alle objekter som er element i* S eller T.
- *Unionen av* S *og* T *skrives ofte* $S \cup T$.

Eksempel.

- $\{a, b\} \cup \{c, d\} = \{a, b, c, d\}$
- $\{a, b\} \cup \{b, c\} = \{a, b, c\}$
- $\{1, 2, 3\} \cup \emptyset = \{1, 2, 3\}$

Snitt – felles elementer

Definisjon 3.5 (Snitt)**.**

- *Hvis* S *og* T *er mengder, så er snittet mellom* S *og* T, *eller* S *snittet med* T, *mengden som inneholder alle objekter som er element i både* S og T.
- S *snittet med* T *skrives ofte* $S \cap T$.

Eksempel.

- $\{a, b\} \cap \{c, d\} = \emptyset$
- $\{a, b\} \cap \{b, c\} = \{b\}$
- $\{1, 2, 3\} \cap \emptyset = \emptyset$

Mengdedifferanse – fjerne elementer

Definisjon 3.6 (Mengdedifferanse)**.**

- *Hvis S og T er mengder, så er* mengdedifferansen *mellom S og T, eller S* minus *T, mengden som inneholder alle objekter som er element i S men* ikke *element i T.*
- *S minus T skrives ofte $S \setminus T$.*

Eksempel.

- $\{a, b\} \setminus \{c, d\} = \{a, b\}$
- $\{a, b\} \setminus \{b, c\} = \{a\}$
- $\{1, 2, 3\} \setminus \emptyset = \{1, 2, 3\}$
- $\emptyset \setminus \{a, b, c\} = \emptyset$

Delmengde

Definisjon 3.7 (Delmengde)**.**

- *En mengde S er en* delmengde *av en mengde T hvis alle elementer i S også er elementer i T.*
- *Skrives ofte $S \subseteq T$.*

Eksempel.

- $\{a, b\} \subseteq \{a, b, c\}$
- $\{a, b\} \subseteq \{a, b\}$ *(enhver mengde er en delmengde av seg selv)*
- $\{a, b, c\} \not\subseteq \{a, b\}$
- $\emptyset \subseteq \{a, b\}$ *(den tomme mengden er en delmengde av alle mengder)*
- $\{a, b\} \not\subseteq \emptyset$

Kryssprodukt

Definisjon 3.8 (Kryssprodukt)**.**

- *Hvis S og T er mengder, så er* kryssproduktet *av S og T mengden av alle* par *$\langle s, t\rangle$ slik at $s \in S$ og $t \in T$.*
- *Kryssproduktet av S og T skrives ofte $S \times T$.*

Eksempel.

- $\{a, b\} \times \{c, d\} = \{\langle a, c\rangle, \langle a, d\rangle, \langle b, c\rangle, \langle b, d\rangle\}$
- $\{a, b\} \times \{b, c\} = \{\langle a, b\rangle, \langle a, c\rangle, \langle b, b\rangle, \langle b, c\rangle\}$
- $\{a\} \times \{1, 2\} = \{\langle a, 1\rangle, \langle a, 2\rangle\}$

Kryssprodukt

Notasjon.

- *En mengde kan krysses med seg selv:* $S \times S$
- $\{a, b\} \times \{a, b\} = \{\langle a, a\rangle, \langle a, b\rangle, \langle b, a\rangle, \langle b, b\rangle\}$
- $S \times S \times S$ *skrives ofte* S^3.
- *Generalisert:* $\underbrace{S \times S \times \ldots \times S}_{n}$ *skrives* S^n.

Mengdebygger

Notasjon. *En definisjon på formen* "mengden av alle elementer $x \in S$ slik at ..." *kan skrives på formen*

$$\{x \mid x \in S \text{ og betingelse på } x\}.$$

En slik konstruksjon kalles en mengdebygger.

Eksempel.

- *Definisjonen av kryssprodukt av* S *og* T *kunne vært skrevet slik:*

$$S \times T = \{\langle s, t\rangle \mid s \in S \text{ og } t \in T\}$$

- $\{n \mid n \in \mathbb{N}$ *og* n *er partall* $\}$ *definerer mengden av alle partall.*
- $\{n \mid n \in \mathbb{N}$ *og* n *er oddetall* $\}$ *definerer mengden av alle oddetall.*

3.2 Relasjoner

Relasjoner

Definisjon 3.9 (Relasjon)**.**

- *En* unær relasjon *over* S *er en delmengde av* S.
- *En* binær relasjon *fra* S *til* T *er en delmengde av* $S \times T$.
- *En* n-ær relasjon *over mengdene* $S_1, S_2, \ldots, S_n$ *er en delmengde av kryssproduktet* $S_1 \times S_2 \times \ldots \times S_n$.

Eksempel.

- *Hvis* $S = \{a, b, c\}$*, så er* $\{a, b\}$ *en unær relasjon over* S.
- *Hvis* $S = \{a, b\}$ *og* $T = \{1, 2\}$*, så er* $\{\langle a, 1\rangle, \langle b, 2\rangle\}$ *en binær relasjon fra* S *til* T.

Relasjoner over én mengde

Definisjon 3.10. *En* n-ær relasjon *over mengden* S *er en delmengde av* S^n.

Eksempel. *La* $S = \{1, 2, 3\}$.

- $\{\langle 1, 1\rangle, \langle 2, 2\rangle, \langle 3, 3\rangle\}$ *er en binær relasjon over* S.
- $\{\langle 1, 2\rangle, \langle 1, 3\rangle, \langle 2, 3\rangle\}$ *er også en binær relasjon over* S.

Refleksive relasjoner

Definisjon 3.11 (Refleksiv)**.** *En binær relasjon R over mengden S er* refleksiv *hvis $\langle x, x\rangle \in R$ for alle $x \in S$.*

Eksempel. *La $S = \{1, 2, 3\}$.*

- *Er $R_1 = \{\langle 1, 1\rangle, \langle 1, 2\rangle, \langle 1, 3\rangle\}$ refleksiv?*
- *Hva med $R_2 = \{\langle 1, 1\rangle, \langle 2, 2\rangle, \langle 3, 3\rangle\}$?*

Symmetriske relasjoner

Definisjon 3.12 (Symmetrisk)**.** *En binær relasjon R er* symmetrisk *hvis $\langle x, y\rangle \in R$ impliserer at $\langle y, x\rangle \in R$.*

Eksempel. *La $S = \{1, 2, 3\}$.*

- *Er $R_1 = \{\langle 1, 2\rangle, \langle 2, 1\rangle, \langle 3, 2\rangle, \langle 2, 3\rangle\}$ symmetrisk?*
- *Hva med $R_2 = \{\langle 1, 2\rangle, \langle 2, 1\rangle, \langle 1, 3\rangle\}$?*

Transitive relasjoner

Definisjon 3.13 (Transitiv)**.** *En binær relasjon R er* transitiv *hvis $\langle x, y\rangle \in R$ og $\langle y, z\rangle \in R$ impliserer at $\langle x, z\rangle \in R$.*

Definisjon 3.14 (Ekvivalensrelasjon)**.** *En binær relasjon over mengden S er en* ekvivalensrelasjon *hvis den er refleksiv, symmetrisk og transitiv.*

3.3 Funksjoner

Funksjoner

Definisjon 3.15 (Funksjon)**.** *La S og T være mengder. En* funksjon *f fra S til T er en binær relasjon fra S til T med følgende egenskaper:*

- *For alle $x \in S$ så finnes en $y \in T$ slik at $\langle x, y\rangle \in f$.*
- *Hvis $\langle x, y\rangle \in f$ og $\langle x, z\rangle \in f$, så er $y = z$.*

Vi kaller S for definisjonsmengden *til f og T for* verdimengden *til f.*

Notasjon. *Hvis $\langle x, y\rangle \in f$, så skriver vi ofte $f(x) = y$.*

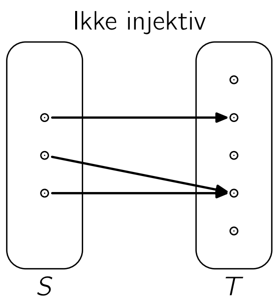
Funksjoner

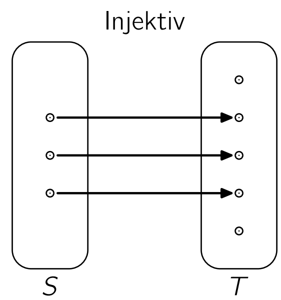
Eksempel. *Funksjonen $Par : \mathbb{N} \to \{0, 1\}$ definert ved $Par(x) = \begin{cases} 1 \text{ hvis } x \text{ er et partall} \\ 0 \text{ hvis } x \text{ er et oddetall} \end{cases}$ har $\mathbb{N}$ som definisjonsmengde og $\{0, 1\}$ som verdimengde.*

Injektive funksjoner

Definisjon 3.16 (Injektiv)**.** *En funksjon $f : S \to T$ er* injektiv *hvis for alle $x, y \in S$ så impliserer $x \neq y$ at $f(x) \neq f(y)$. Vi sier at f er en-til-en.*

Eksempel.

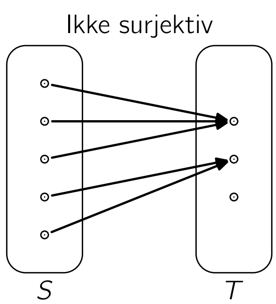


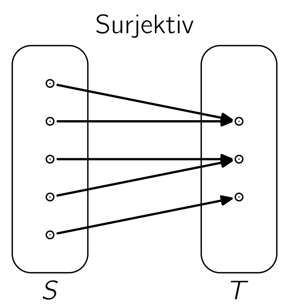


Surjektive funksjoner

Definisjon 3.17 (Surjektiv)**.** *En funksjon $f : S \to T$ er* surjektiv *hvis for alle $y \in T$ så fins $x \in S$ slik at $f(x) = y$. Vi sier at f er på.*

Eksempel.



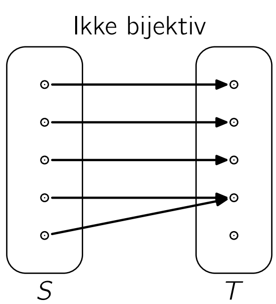


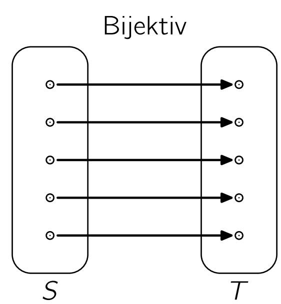
Bijektive funksjoner

Definisjon 3.18 (Bijektiv)**.** *En funksjon er* bijektiv *hvis den er injektiv og surjektiv.*

Vi sier at funksjonen er *en-til-en* og *på*, eller at vi har en *en-til-en korrespondanse*.

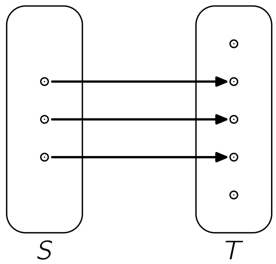
Eksempel.





Injektive og surjektive funksjoner

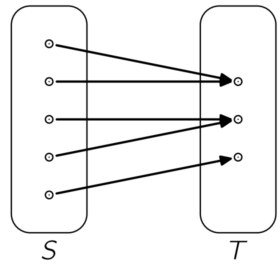
injektiv / en-til-en



for alle $x, y \in S$:
$x \neq y$ impliserer $f(x) \neq f(y)$

"hvert element i definisjonsmengden sendes til et unikt element i verdimengden"

surjektiv / på

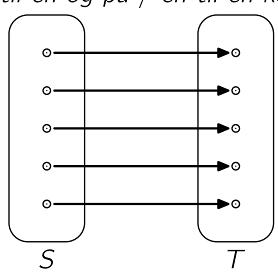


for alle $y \in T$:
det finnes $x \in S$ slik at $f(x) = y$

"alle elementer i verdimengden blir truffet"

Bijektive funksjoner

bijektiv / en-til-en og på / en-til-en korrespondanse



- En *bijektiv* funksjon er en funksjon som er både *injektiv* og *surjektiv*:
- *"Ethvert element i verdimengden blir truffet av et unikt element i definisjonsmengden"*.

3.4 Operatorer

Operatorer

Definisjon 3.19 (Operator)**.** *La S være en mengde.*

- *En unær operator på S er en funksjon fra S til S.*
- *En binær operator på S er en funksjon fra $S \times S$ til S.*

Eksempel.

- *Suksessorfunksjonen $(n+1)$ er en unær operator på $\mathbb{N}$.*
- *Addisjonsfunksjonen $(+)$ er en binær operator på $\mathbb{N}$.*
- *Subtraksjonsfunksjonen $(-)$ er en binær operator på $\mathbb{Z}$.*

3.5 Multimengder

Multimengder

Mengder der antall forekomster av hvert element teller

Definisjon 3.20 (Multimengde)**.** *En* multimengde *er et par* $\langle S, m \rangle$ *der* S *er en mengde og* $m : S \to \mathbb{N}$. *For hver* $x \in S$ *sier vi at* $m(x)$ *er* multiplisiteten *til* x*, eller antall forekomster av* x *i* S*.*

Eksempel. *Vi skriver multimengder som mengder:*

- *I multimengden* $\{a, a, a, b, b\}$ *er multiplisiteten til* a *og* b *henholdsvis 3 og 2.*
- *I multimengden* $\{a, b, a, c, a, b\}$ *er multiplisiteten til* a*,* b *og* c *henholdsvis 3, 2 og 1.*

$\cup$, $\cap$, $\setminus$ og $\subseteq$ på multimengder

- Vi bruker *union* ($\cup$), *snitt* ($\cap$), *mengdedifferans* ($\setminus$) og *delmengderelasjonen* ($\subseteq$) også på multimengder.

Eksempel.

- $\{a, a, b, c\} \cup \{a, c\} = \{a, a, a, b, c, c\}$
- $\{a, a, a, b, c\} \cap \{a, a, d\} = \{a, a\}$
- $\{a, a, a, b, c\} \setminus \{a, a, d\} = \{a, b, c\}$
- $\{a, a\} \subseteq \{a, a, b, c\}$*, men* $\{a, a, a\} \not\subseteq \{a, a, b, c\}$

- Vi bruker $\emptyset$ om den tomme multimengden.

3.6 Kardinalitet

Definisjon 3.21 (Kardinalitet)**.**

- *To mengder* S *og* T *har lik* kardinalitet *hvis det fins en bijeksjon fra* S *til* T*.*
- *Mengden* S *har kardinalitet mindre eller lik* T *hvis det fins en injektiv funksjon fra* S *til* T*.*
- *Hvis* S *er en endelig mengde, så er kardinaliteten til* S *lik antall elementer i* S*.*
- *Vi bruker notasjonen* $|S|$ *for kardinaliteten til* S*.*

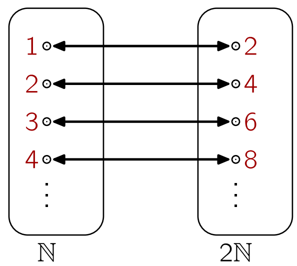
Eksempel. *Hva er kardinaliteten til*

- $\{a, b, c\}$*?*
- $\{a, b, a\}$*?*
- $\{a\}$*?*
- $\emptyset$*?*

Eksempel.

- $\mathbb{N}$ = *mengden av alle naturlige tall* $\{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$
- $2\mathbb{N}$ = *mengden av alle partall* $\{2, 4, 6, 8, 10, \ldots\}$

$f(x) = 2x$ er en bijeksjon fra $\mathbb{N}$ til $2\mathbb{N}$, så $\mathbb{N}$ og $2\mathbb{N}$ har samme kardinalitet. Vi skriver $|\mathbb{N}| = |2\mathbb{N}|$.



3.7 Tellbart vs. overtellbart

Definisjon 3.22 (Tellbar)**.** *En uendelig mengde S er* tellbar *hvis det fins en en-til-en korrespondanse mellom elementene i S og de naturlige tallene. Hvis ikke, er S* overtellbar*.*

- Alle endelige mengder er tellbare.
- Når en uendelig mengde S er tellbar fins det en bijektiv funksjon fra S til $\mathbb{N}$.

Eksempel.

- *Mengden $2\mathbb{N}$ av alle partall er tellbar.*
- *Mengden $\mathbb{B}$ av binære tall er tellbar.*
- *Mengden $\mathbb{Q}$ av brøktall er tellbar.*
- *Mengden av nålevende mennesker er tellbar.*
- *Mengden $\mathbb{R}$ av reelle tall er ikke tellbar.*