INF3170 – Logikk

Forelesning 2: Induktive definisjoner, utsagnslogikk og sekventkalkyle

Christian Mahesh Hansen

Institutt for informatikk, Universitetet i Oslo

29. januar 2007

Dagens plan

1. Induktive definisjoner
2. Utsagnslogikk
3. Sekventkalkyle

Induktive definisjoner

Definisjon (Induktiv definisjon)

Å definere en mengde induktivt *betyr å konstruere den minste mengden som inneholder en gitt mengde B—kalt en* basismengde*—og som er lukket under gitte operasjoner.*

Induktive definisjoner

Definisjon (Induktiv definisjon)

Å definere en mengde induktivt betyr å konstruere den minste mengden som inneholder en gitt mengde B—kalt en basismengde—og som er lukket under gitte operasjoner.

Eksempel

Mengden $\mathbb{N}$ av naturlige tall kan defineres induktivt ved

- $0 \in \mathbb{N}$, *og*
- *hvis* $x \in \mathbb{N}$, *så* $x + 1 \in \mathbb{N}$.

Her er basismengden $\{0\}$ og $\mathbb{N}$ er lukket under suksessorfunksjonen (x+1).

Eksempel

Mengden av binære tall kan defineres induktivt ved

- 0 *og* 1 *er binære tall, og*
- *hvis* b *er et binært tall, så er* $b0$ *og* $b1$ *binære tall.*

Eksempel

Mengden av binære tall kan defineres induktivt ved

- 0 *og* 1 *er binære tall, og*
- *hvis* b *er et binært tall, så er* $b0$ *og* $b1$ *binære tall.*

steg 0: 0 1

Eksempel

Mengden av binære tall kan defineres induktivt ved

- 0 *og* 1 *er binære tall, og*
- *hvis b er et binært tall, så er b*0 *og b*1 *binære tall.*

steg 0:	0	1		
steg 1:	00	10	01	11

Eksempel

Mengden av binære tall kan defineres induktivt ved

- 0 *og* 1 *er binære tall, og*
- *hvis* b *er et binært tall, så er* $b0$ *og* $b1$ *binære tall.*

steg 0:	0	1						
steg 1:	00	10	01	11				
steg 2:	000	100	010	110	001	101	011	111

Eksempel

Mengden av binære tall kan defineres induktivt ved

- 0 *og* 1 *er binære tall, og*
- *hvis* b *er et binært tall, så er* $b0$ *og* $b1$ *binære tall.*

$$\begin{array}{lllllllll}
\text{steg 0:} & 0 & 1 & & & & & & \\
\text{steg 1:} & 00 & 10 & 01 & 11 & & & & \\
\text{steg 2:} & 000 & 100 & 010 & 110 & 001 & 101 & 011 & 111 \\
\vdots & & & & & & & &
\end{array}$$

Eksempel

Menden S av symmetriske strenger kan defineres induktivt ved

- $\epsilon \in S$ *(den tomme strengen),*
- *hvis* $x \in S$, *så* $axa \in S$ *og* $bxb \in S$.

Eksempel

Menden S av symmetriske strenger kan defineres induktivt ved

- $\epsilon \in S$ *(den tomme strengen),*
- *hvis $x \in S$, så $axa \in S$ og $bxb \in S$.*

steg 0: ϵ

Eksempel

Menden S av symmetriske strenger kan defineres induktivt ved

- $\epsilon \in S$ *(den tomme strengen),*
- *hvis* $x \in S$, *så* $axa \in S$ *og* $bxb \in S$.

steg 0:	ϵ	
steg 1:	aa	bb

Eksempel

Menden S av symmetriske strenger kan defineres induktivt ved

- $\epsilon \in S$ *(den tomme strengen),*
- *hvis $x \in S$, så $axa \in S$ og $bxb \in S$.*

steg 0:	ϵ			
steg 1:	aa	bb		
steg 2:	$aaaa$	$abba$	$baab$	$bbbb$

Eksempel

Menden S av symmetriske strenger kan defineres induktivt ved

- $\epsilon \in S$ *(den tomme strengen),*
- *hvis* $x \in S$, *så* $axa \in S$ *og* $bxb \in S$.

$$
\begin{array}{lllll}
\text{steg 0:} & \epsilon & & & \\
\text{steg 1:} & aa & bb & & \\
\text{steg 2:} & aaaa & abba & baab & bbbb \\
\vdots & & & &
\end{array}
$$

Utsagnslogikk

Studie av de utsagnslogiske konnektivene.

Utsagnslogikk

Studie av de utsagnslogiske konnektivene.

- Vi starter med en mengde atomære utsagn, f.eks.

Utsagnslogikk

Studie av de utsagnslogiske konnektivene.

- Vi starter med en mengde atomære utsagn, f.eks.
  - *"parkeringsplassen er stengt"*

Utsagnslogikk

Studie av de utsagnslogiske konnektivene.

- Vi starter med en mengde atomære utsagn, f.eks.
    - *"parkeringsplassen er stengt"*
    - *"IFI2 bygges"*

Utsagnslogikk

Studie av de utsagnslogiske konnektivene.

- Vi starter med en mengde atomære utsagn, f.eks.
  - *"parkeringsplassen er stengt"*
  - *"IFI2 bygges"*
- Den interne strukturen til atomære utsagn blir ikke analysert.

Utsagnslogikk

Studie av de utsagnslogiske konnektivene.

- Vi starter med en mengde atomære utsagn, f.eks.
  - *"parkeringsplassen er stengt"*
  - *"IFI2 bygges"*
- Den interne strukturen til atomære utsagn blir ikke analysert.
- Atomære utsagn er enten sanne eller usanne.

- Sammensatte utsagn bygges opp fra de atomære utsagnene ved hjelp av de logiske konnektivene: *og*, *eller*, *ikke*, *hvis . . . så . . .*

- Sammensatte utsagn bygges opp fra de atomære utsagnene ved hjelp av de logiske konnektivene: *og*, *eller*, *ikke*, *hvis . . . så . . .*
- Eksempel: *"IFI2 bygges og parkeringsplassen er stengt"*

- Sammensatte utsagn bygges opp fra de atomære utsagnene ved hjelp av de logiske konnektivene: *og*, *eller*, *ikke*, *hvis . . . så . . .*
- Eksempel: *"IFI2 bygges og parkeringsplassen er stengt"*
- Hvordan avhenger sannhetsverdien til et sammensatt utsagn av sannhetsverdiene til de atomære utsagnene det er bygget opp av?

- Sammensatte utsagn bygges opp fra de atomære utsagnene ved hjelp av de logiske konnektivene: *og*, *eller*, *ikke*, *hvis . . . så . . .*
- Eksempel: *"IFI2 bygges og parkeringsplassen er stengt"*
- Hvordan avhenger sannhetsverdien til et sammensatt utsagn av sannhetsverdiene til de atomære utsagnene det er bygget opp av?
- Hvilke utsagn er sanne *uavhengig* av sannhetsverdiene til de atomære utsagnene?

- Sammensatte utsagn bygges opp fra de atomære utsagnene ved hjelp av de logiske konnektivene: *og*, *eller*, *ikke*, *hvis . . . så . . .*
- Eksempel: *"IFI2 bygges og parkeringsplassen er stengt"*
- Hvordan avhenger sannhetsverdien til et sammensatt utsagn av sannhetsverdiene til de atomære utsagnene det er bygget opp av?
- Hvilke utsagn er sanne *uavhengig* av sannhetsverdiene til de atomære utsagnene?
- Slike utsagn kalles tautologier.

- Sammensatte utsagn bygges opp fra de atomære utsagnene ved hjelp av de logiske konnektivene: *og*, *eller*, *ikke*, *hvis . . . så . . .*
- Eksempel: *"IFI2 bygges og parkeringsplassen er stengt"*
- Hvordan avhenger sannhetsverdien til et sammensatt utsagn av sannhetsverdiene til de atomære utsagnene det er bygget opp av?
- Hvilke utsagn er sanne *uavhengig* av sannhetsverdiene til de atomære utsagnene?
- Slike utsagn kalles tautologier.
- Eksempel: *"IFI2 bygges eller IFI2 bygges ikke"*

- Syntaks: et presist definert symbolspråk for å representere utsagnslogiske utsagn.

- Syntaks: et presist definert symbolspråk for å representere utsagnslogiske utsagn.
- Semantikk: en presist definert tolkning av uttrykk i symbolspråket til sannhetsverdiene *sann* og *usann*.

- Syntaks: et presist definert symbolspråk for å representere utsagnslogiske utsagn.
- Semantikk: en presist definert tolkning av uttrykk i symbolspråket til sannhetsverdiene *sann* og *usann*.
- Kalkyle: syntaktisk manipulasjon av uttrykk i symbolspråket for å finne bevisbare uttrykk.

- Syntaks: et presist definert symbolspråk for å representere utsagnslogiske utsagn.
- Semantikk: en presist definert tolkning av uttrykk i symbolspråket til sannhetsverdiene *sann* og *usann*.
- Kalkyle: syntaktisk manipulasjon av uttrykk i symbolspråket for å finne bevisbare uttrykk.
- Sunnhet: alle bevisbare uttrykk er tautologier — korrekthet av kalkylen.

- Syntaks: et presist definert symbolspråk for å representere utsagnslogiske utsagn.
- Semantikk: en presist definert tolkning av uttrykk i symbolspråket til sannhetsverdiene *sann* og *usann*.
- Kalkyle: syntaktisk manipulasjon av uttrykk i symbolspråket for å finne bevisbare uttrykk.
- Sunnhet: alle bevisbare uttrykk er tautologier — korrekthet av kalkylen.
- Kompletthet: alle tautologier er bevisbare — kalkylen sterk nok til å fange inn *alle* interessante uttrykk.

Syntaks

Definisjon (Utsagnsvariable)

Mengden av utsagnsvariable er en tellbart uendelig mengde $\mathcal{V}_u = \{P_1, P_2, P_3, \ldots\}$.

Syntaks

Definisjon (Utsagnsvariable)

Mengden av utsagnsvariable er en tellbart uendelig mengde $\mathcal{V}_u = \{P_1, P_2, P_3, \ldots\}$.

- Utsagnsvariable representerer atomære utsagn, f.eks.
  - *"IFI2 bygges"*
  - *"Forskningsparken er yngre enn IFI1"*
  - *"logikk er gøy"*

Syntaks

Definisjon (Utsagnsvariable)

Mengden av utsagnsvariable er en tellbart uendelig mengde $\mathcal{V}_u = \{P_1, P_2, P_3, \ldots\}$.

- Utsagnsvariable representerer atomære utsagn, f.eks.
  - *"IFI2 bygges"*
  - *"Forskningsparken er yngre enn IFI1"*
  - *"logikk er gøy"*

Notasjon

Vi skriver ofte utsagnsvariable som $P, Q, R, \ldots$

For å fange inn sammensatte utsagn, f.eks.

"hvis IFI2 bygges, så er parkeringsplassen stengt,"

trengs flere symboler i språket:

For å fange inn sammensatte utsagn, f.eks.

"hvis IFI2 bygges, så er parkeringsplassen stengt,"

trengs flere symboler i språket:

Definisjon (Utsagnslogisk alfabet)

Det utsagnslogiske alfabet består av:

- *Utsagnsvariablene i $\mathcal{V}_u$.*
- *De logiske konnektivene $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$ og $\neg$.*
- *Hjelpesymbolene '(' og ')'.*

For å fange inn sammensatte utsagn, f.eks.

"hvis IFI2 bygges, så er parkeringsplassen stengt,"

trengs flere symboler i språket:

Definisjon (Utsagnslogisk alfabet)

Det utsagnslogiske alfabet består av:

- *Utsagnsvariablene i $\mathcal{V}_u$.*
- *De logiske konnektivene $\land$, $\lor$, $\rightarrow$ og $\neg$.*
- *Hjelpesymbolene '(' og ')'.*

Intuisjon:

$\neg$ skal bety *"ikke"*	$\land$ skal bety *"og"*
$\lor$ skal bety *"eller"*	$\rightarrow$ skal bety *"impliserer"*

Utsagnslogiske formler

Definisjon (Atomær formel)

Enhver utsagnsvariabel er en atomær formel.

Utsagnslogiske formler

Definisjon (Atomær formel)

Enhver utsagnsvariabel er en atomær formel.

Definisjon (Utsagnslogisk formel)

Mengden av utsagnslogiske formler er den minste mengden $\mathcal{F}_u$ *slik at:*

Utsagnslogiske formler

Definisjon (Atomær formel)

Enhver utsagnsvariabel er en atomær formel.

Definisjon (Utsagnslogisk formel)

Mengden av utsagnslogiske formler er den minste mengden $\mathcal{F}_u$ slik at:

1. *$\mathcal{F}_u$ inneholder alle atomære formler.*

Utsagnslogiske formler

Definisjon (Atomær formel)

Enhver utsagnsvariabel er en atomær formel.

Definisjon (Utsagnslogisk formel)

Mengden av utsagnslogiske formler er den minste mengden $\mathcal{F}_u$ slik at:

1. $\mathcal{F}_u$ *inneholder alle atomære formler.*
2. *Hvis* $A \in \mathcal{F}_u$, *så er* $\neg A \in \mathcal{F}_u$.

Utsagnslogiske formler

Definisjon (Atomær formel)

Enhver utsagnsvariabel er en atomær formel.

Definisjon (Utsagnslogisk formel)

Mengden av utsagnslogiske formler er den minste mengden $\mathcal{F}_u$ slik at:

1. $\mathcal{F}_u$ *inneholder alle atomære formler.*
2. *Hvis* $A \in \mathcal{F}_u$, *så er* $\neg A \in \mathcal{F}_u$.
3. *Hvis* $A, B \in \mathcal{F}_u$, *så er* $(A \land B)$, $(A \lor B)$ *og* $(A \rightarrow B)$ *med i* $\mathcal{F}_u$.

Eksempel (Utsagnslogiske formler)

- P
- $(P \rightarrow Q)$
- $((P \vee Q) \wedge \neg(P \vee R))$

Eksempel (Utsagnslogiske formler)

- P
- $(P \rightarrow Q)$
- $((P \vee Q) \wedge \neg(P \vee R))$

Notasjon

Vi dropper ofte unødvendige parenteser:

Eksempel (Utsagnslogiske formler)

- P
- $(P \rightarrow Q)$
- $((P \vee Q) \wedge \neg(P \vee R))$

Notasjon

Vi dropper ofte unødvendige parenteser:

$(P \rightarrow Q)$ *skrives* $P \rightarrow Q$

Eksempel (Utsagnslogiske formler)

- P
- $(P \rightarrow Q)$
- $((P \vee Q) \wedge \neg(P \vee R))$

Notasjon

Vi dropper ofte unødvendige parenteser:

$$\begin{array}{lll} (P \rightarrow Q) & \textit{skrives} & P \rightarrow Q \\ ((P \vee Q) \wedge \neg(P \vee R)) & \textit{skrives} & (P \vee Q) \wedge \neg(P \vee R) \end{array}$$

Eksempel

Ikke alle strenger over det utsagnslogiske alfabet er utsagnslogiske formler:

- $P \rightarrow$
- $((Q \wedge P)$

Eksempel

Ikke alle strenger over det utsagnslogiske alfabet er utsagnslogiske formler:

- $P \rightarrow$
- $((Q \land P)$

Oppgave

Vis at $((Q \land P)$ *ikke er en utsagnslogisk formel.*

Eksempel

Ikke alle strenger over det utsagnslogiske alfabet er utsagnslogiske formler:

- $P \rightarrow$
- $((Q \wedge P)$

Oppgave

Vis at $((Q \wedge P)$ *ikke er en utsagnslogisk formel.*

- Intuitivt

Eksempel

Ikke alle strenger over det utsagnslogiske alfabet er utsagnslogiske formler:

- $P \rightarrow$
- $((Q \land P)$

Oppgave

Vis at $((Q \land P)$ *ikke er en utsagnslogisk formel.*

- Intuitivt, men
- hvordan bevise det?

Eksempel

Ikke alle strenger over det utsagnslogiske alfabet er utsagnslogiske formler:

- $P \rightarrow$
- $((Q \land P)$

Oppgave

Vis at $((Q \land P)$ *ikke er en utsagnslogisk formel.*

- Intuitivt, men
- hvordan bevise det?
- Ved strukturell induksjon kan vi vise noe sterkere:

Eksempel

Ikke alle strenger over det utsagnslogiske alfabet er utsagnslogiske formler:

- $P \rightarrow$
- $((Q \land P)$

Oppgave

Vis at $((Q \land P)$ *ikke er en utsagnslogisk formel.*

- Intuitivt, men
- hvordan bevise det?
- Ved strukturell induksjon kan vi vise noe sterkere:

Påstand

Alle utsagnslogiske formler har like mange venstre- og høyreparenteser.

Strukturell induksjon

- Mengden $\mathcal{F}_u$ av utsagnslogiske formler er definert induktivt.

Strukturell induksjon

- Mengden $\mathcal{F}_u$ av utsagnslogiske formler er definert induktivt.
- Ved strukturell induksjon kan man vise at en egenskap holder for alle formler i $\mathcal{F}_u$.

Strukturell induksjon

- Mengden $\mathcal{F}_u$ av utsagnslogiske formler er definert induktivt.
- Ved strukturell induksjon kan man vise at en egenskap holder for alle formler i $\mathcal{F}_u$.

Teorem (Strukturell induksjon)

Alle formler i $\mathcal{F}_u$ har egenskapen $\mathbf{Q}$ *hvis:*

Strukturell induksjon

- Mengden $\mathcal{F}_u$ av utsagnslogiske formler er definert induktivt.
- Ved strukturell induksjon kan man vise at en egenskap holder for alle formler i $\mathcal{F}_u$.

Teorem (Strukturell induksjon)

Alle formler i $\mathcal{F}_u$ har egenskapen **Q** *hvis:*

Basissteg: Alle atomære formler har egenskapen **Q**.

Strukturell induksjon

- Mengden $\mathcal{F}_u$ av utsagnslogiske formler er definert induktivt.
- Ved strukturell induksjon kan man vise at en egenskap holder for alle formler i $\mathcal{F}_u$.

Teorem (Strukturell induksjon)

Alle formler i $\mathcal{F}_u$ har egenskapen $\mathbf{Q}$ *hvis:*

Basissteg: Alle atomære formler har egenskapen $\mathbf{Q}$.

Induksjonssteg:

- *Hvis A har egenskapen* $\mathbf{Q}$, *så har også $\neg A$ egenskapen* $\mathbf{Q}$.

Strukturell induksjon

- Mengden $\mathcal{F}_u$ av utsagnslogiske formler er definert induktivt.
- Ved strukturell induksjon kan man vise at en egenskap holder for alle formler i $\mathcal{F}_u$.

Teorem (Strukturell induksjon)

Alle formler i $\mathcal{F}_u$ har egenskapen $\mathbf{Q}$ *hvis:*

Basissteg: Alle atomære formler har egenskapen $\mathbf{Q}$.

Induksjonssteg:

- *Hvis A har egenskapen* $\mathbf{Q}$, *så har også* $\neg A$ *egenskapen* $\mathbf{Q}$.
- *Hvis A og B har egenskapen* $\mathbf{Q}$, *så har også* $(A \land B)$, $(A \lor B)$ *og* $(A \to B)$ *egenskapen* $\mathbf{Q}$.

Strukturell induksjon

- Mengden $\mathcal{F}_u$ av utsagnslogiske formler er definert induktivt.
- Ved strukturell induksjon kan man vise at en egenskap holder for alle formler i $\mathcal{F}_u$.

Teorem (Strukturell induksjon)

Alle formler i $\mathcal{F}_u$ har egenskapen **Q** *hvis:*

Basissteg: Alle atomære formler har egenskapen **Q**.

Induksjonssteg:

- *Hvis A har egenskapen* **Q**, *så har også $\neg A$ egenskapen* **Q**.
- *Hvis A og B har egenskapen* **Q**, *så har også $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$ og $(A \rightarrow B)$ egenskapen* **Q**.

- Strukturell induksjon er en bevisteknikk vi kommer til å bruke mye!

Strukturell induksjon

- Mengden $\mathcal{F}_u$ av utsagnslogiske formler er definert induktivt.
- Ved strukturell induksjon kan man vise at en egenskap holder for alle formler i $\mathcal{F}_u$.

Teorem (Strukturell induksjon)

Alle formler i $\mathcal{F}_u$ har egenskapen $\mathbf{Q}$ hvis:

Basissteg: Alle atomære formler har egenskapen $\mathbf{Q}$.

Induksjonssteg:

- *Hvis A har egenskapen $\mathbf{Q}$, så har også $\neg A$ egenskapen $\mathbf{Q}$.*
- *Hvis A og B har egenskapen $\mathbf{Q}$, så har også $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$ og $(A \rightarrow B)$ egenskapen $\mathbf{Q}$.*

- Strukturell induksjon er en bevisteknikk vi kommer til å bruke mye!
- Derfor er det viktig å kunne den godt...

Påstand (Balanserte parenteser)

Alle formler $A \in \mathcal{F}_u$ har like mange venstre- og høyreparenteser.

Påstand (Balanserte parenteser)

Alle formler $A \in \mathcal{F}_u$ har like mange venstre- og høyreparenteser.

Bevis.

Basissteg: Hvis A er atomær, inneholder den ikke parenteser. Dermed holder påstanden trivielt.

$\square$

Påstand (Balanserte parenteser)

Alle formler $A \in \mathcal{F}_u$ har like mange venstre- og høyreparenteser.

Bevis.

Basissteg: Hvis A er atomær, inneholder den ikke parenteser. Dermed holder påstanden trivielt.

Induksjonssteg:

- Anta $A = \neg B$ og at påstanden holder for B.

$\square$

Påstand (Balanserte parenteser)

Alle formler $A \in \mathcal{F}_u$ har like mange venstre- og høyreparenteser.

Bevis.

Basissteg: Hvis A er atomær, inneholder den ikke parenteser. Dermed holder påstanden trivielt.

Induksjonssteg:

- Anta $A = \neg B$ og at påstanden holder for B. A har like mange parenteser som B.

$\square$

Påstand (Balanserte parenteser)

Alle formler $A \in \mathcal{F}_u$ har like mange venstre- og høyreparenteser.

Bevis.

Basissteg: Hvis A er atomær, inneholder den ikke parenteser. Dermed holder påstanden trivielt.

Induksjonssteg:

- Anta $A = \neg B$ og at påstanden holder for B. A har like mange parenteser som B. Dermed holder påstanden også for A.

$\square$

Påstand (Balanserte parenteser)

Alle formler $A \in \mathcal{F}_u$ har like mange venstre- og høyreparenteser.

Bevis.

Basissteg: Hvis A er atomær, inneholder den ikke parenteser. Dermed holder påstanden trivielt.

Induksjonssteg:

- Anta $A = \neg B$ og at påstanden holder for B. A har like mange parenteser som B. Dermed holder påstanden også for A.
- Anta $A = (B \circ C)$ for $\circ \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$

$\square$

Påstand (Balanserte parenteser)

Alle formler $A \in \mathcal{F}_u$ har like mange venstre- og høyreparenteser.

Bevis.

Basissteg: Hvis A er atomær, inneholder den ikke parenteser. Dermed holder påstanden trivielt.

Induksjonssteg:

- Anta $A = \neg B$ og at påstanden holder for B. A har like mange parenteser som B. Dermed holder påstanden også for A.
- Anta $A = (B \circ C)$ for $\circ \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$, og at påstanden holder for B og C.

$\square$

Påstand (Balanserte parenteser)

Alle formler $A \in \mathcal{F}_u$ har like mange venstre- og høyreparenteser.

Bevis.

Basissteg: Hvis A er atomær, inneholder den ikke parenteser. Dermed holder påstanden trivielt.

Induksjonssteg:

- Anta $A = \neg B$ og at påstanden holder for B. A har like mange parenteser som B. Dermed holder påstanden også for A.
- Anta $A = (B \circ C)$ for $\circ \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$, og at påstanden holder for B og C. A har én venstre- og én høyreparentes i tillegg til de som finnes i B og C.

$\square$

Påstand (Balanserte parenteser)

Alle formler $A \in \mathcal{F}_u$ har like mange venstre- og høyreparenteser.

Bevis.

Basissteg: Hvis A er atomær, inneholder den ikke parenteser. Dermed holder påstanden trivielt.

Induksjonssteg:

- Anta $A = \neg B$ og at påstanden holder for B. A har like mange parenteser som B. Dermed holder påstanden også for A.
- Anta $A = (B \circ C)$ for $\circ \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$, og at påstanden holder for B og C. A har én venstre- og én høyreparentes i tillegg til de som finnes i B og C. Siden påstanden holder for B og C, holder den også for A.

$\square$

Tilbake til uttrykket $((Q \wedge P)$:

Tilbake til uttrykket $((Q \land P)$:

Påstand

$((Q \land P)$ *er ikke en utsagnslogisk formel.*

Tilbake til uttrykket $((Q \wedge P)$:

Påstand

$((Q \wedge P)$ *er ikke en utsagnslogisk formel.*

Bevis.

1. Vi har vist at alle utsagnslogiske formler har like mange venstre- og høyreparenteser.

$\square$

Tilbake til uttrykket $((Q \land P)$:

Påstand

$((Q \land P)$ *er ikke en utsagnslogisk formel.*

Bevis.

1. Vi har vist at alle utsagnslogiske formler har like mange venstre- og høyreparenteser.
2. Det kontrapositive er at hvis et uttrykk *ikke* har like mange venstre- og høyreparenteser, så er det *ikke* en utsagnslogisk formel.

□

Tilbake til uttrykket $((Q \wedge P)$:

Påstand

$((Q \wedge P)$ *er ikke en utsagnslogisk formel.*

Bevis.

1. Vi har vist at alle utsagnslogiske formler har like mange venstre- og høyreparenteser.
2. Det kontrapositive er at hvis et uttrykk *ikke* har like mange venstre- og høyreparenteser, så er det *ikke* en utsagnslogisk formel.
3. Uttrykket '$((Q \wedge P)$' har to venstre- og én høyreparentes, altså ulikt antall.

□

Tilbake til uttrykket $((Q \wedge P)$:

Påstand

$((Q \wedge P)$ *er ikke en utsagnslogisk formel.*

Bevis.

1. Vi har vist at alle utsagnslogiske formler har like mange venstre- og høyreparenteser.
2. Det kontrapositive er at hvis et uttrykk *ikke* har like mange venstre- og høyreparenteser, så er det *ikke* en utsagnslogisk formel.
3. Uttrykket '$((Q \wedge P)$' har to venstre- og én høyreparentes, altså ulikt antall.
4. Derfor er det ikke en utsagnslogisk formel.

□

Semantikk

- Vi skal tolke utsagnslogiske formler som enten sanne eller usanne.

Semantikk

- Vi skal tolke utsagnslogiske formler som enten sanne eller usanne.

Definisjon

La **Bool** $= \{\mathbf{1}, \mathbf{0}\}$.

Definisjon (Operatorene $\hat{\neg}$, $\hat{\wedge}$, $\hat{\vee}$ og $\hat{\rightarrow}$)

- *Vi definerer en unær operator* $\hat{\neg}$ *på* **Bool** *slik at* $\hat{\neg}\mathbf{1} = \mathbf{0}$ *og* $\hat{\neg}\mathbf{0} = \mathbf{1}$.

Definisjon (Operatorene $\hat{\neg}$, $\hat{\wedge}$, $\hat{\vee}$ og $\hat{\rightarrow}$)

- *Vi definerer en unær operator* $\hat{\neg}$ *på* **Bool** *slik at* $\hat{\neg}\mathbf{1} = \mathbf{0}$ *og* $\hat{\neg}\mathbf{0} = \mathbf{1}$.
- *Vi definerer de binære operatorene* $\hat{\vee}$, $\hat{\wedge}$ *og* $\hat{\rightarrow}$ *på* **Bool** *som følger:*

x	y			
$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$			
$\mathbf{0}$	$\mathbf{1}$			
$\mathbf{1}$	$\mathbf{0}$			
$\mathbf{1}$	$\mathbf{1}$			

Definisjon (Operatorene $\hat{\neg}$, $\hat{\wedge}$, $\hat{\vee}$ og $\hat{\to}$)

- *Vi definerer en unær operator* $\hat{\neg}$ *på* **Bool** *slik at* $\hat{\neg}\mathbf{1} = \mathbf{0}$ *og* $\hat{\neg}\mathbf{0} = \mathbf{1}$.
- *Vi definerer de binære operatorene* $\hat{\vee}$, $\hat{\wedge}$ *og* $\hat{\to}$ *på* **Bool** *som følger:*

x	y	$x \hat{\wedge} y$		
0	**0**	**0**		
0	**1**	**0**		
1	**0**	**0**		
1	**1**	**1**		

Definisjon (Operatorene $\hat{\neg}$, $\hat{\wedge}$, $\hat{\vee}$ og $\hat{\rightarrow}$)

- *Vi definerer en unær operator* $\hat{\neg}$ *på* **Bool** *slik at* $\hat{\neg}\mathbf{1} = \mathbf{0}$ *og* $\hat{\neg}\mathbf{0} = \mathbf{1}$.
- *Vi definerer de binære operatorene* $\hat{\vee}$, $\hat{\wedge}$ *og* $\hat{\rightarrow}$ *på* **Bool** *som følger:*

x	y	$x \hat{\wedge} y$	$x \hat{\vee} y$	
0	**0**	**0**	**0**	
0	**1**	**0**	**1**	
1	**0**	**0**	**1**	
1	**1**	**1**	**1**	

Definisjon (Operatorene $\hat{\neg}$, $\hat{\wedge}$, $\hat{\vee}$ og $\hat{\rightarrow}$)

- *Vi definerer en unær operator* $\hat{\neg}$ *på* **Bool** *slik at* $\hat{\neg}\mathbf{1} = \mathbf{0}$ *og* $\hat{\neg}\mathbf{0} = \mathbf{1}$.
- *Vi definerer de binære operatorene* $\hat{\vee}$, $\hat{\wedge}$ *og* $\hat{\rightarrow}$ *på* **Bool** *som følger:*

x	y	$x \hat{\wedge} y$	$x \hat{\vee} y$	$x \hat{\rightarrow} y$
0	**0**	**0**	**0**	**1**
0	**1**	**0**	**1**	**1**
1	**0**	**0**	**1**	**0**
1	**1**	**1**	**1**	**1**

Definisjon (Operatorene $\hat{\neg}$, $\hat{\wedge}$, $\hat{\vee}$ og $\hat{\rightarrow}$)

- *Vi definerer en unær operator* $\hat{\neg}$ *på* **Bool** *slik at* $\hat{\neg}\mathbf{1} = \mathbf{0}$ *og* $\hat{\neg}\mathbf{0} = \mathbf{1}$.
- *Vi definerer de binære operatorene* $\hat{\vee}$, $\hat{\wedge}$ *og* $\hat{\rightarrow}$ *på* **Bool** *som følger:*

x	y	$x \hat{\wedge} y$	$x \hat{\vee} y$	$x \hat{\rightarrow} y$
0	**0**	**0**	**0**	**1**
0	**1**	**0**	**1**	**1**
1	**0**	**0**	**1**	**0**
1	**1**	**1**	**1**	**1**

Tabellen over kalles en sannhetsverditabell.

Definisjon (Boolsk valuasjon)

En boolsk valuasjon er en funksjon v fra $\mathcal{F}_u$ til **Bool** *slik at:*

Definisjon (Boolsk valuasjon)

En boolsk valuasjon er en funksjon v fra $\mathcal{F}_u$ til **Bool** *slik at:*

- $v(\neg A) = \hat{\neg} v(A)$

Definisjon (Boolsk valuasjon)

En boolsk valuasjon er en funksjon v fra $\mathcal{F}_u$ *til* **Bool** *slik at:*

- $v(\neg A) = \hat{\neg} v(A)$
- $v(A \wedge B) = v(A) \hat{\wedge} v(B)$

Definisjon (Boolsk valuasjon)

En *boolsk valuasjon* *er en funksjon* v *fra* $\mathcal{F}_u$ *til* **Bool** *slik at:*

- $v(\neg A) = \hat{\neg} v(A)$
- $v(A \wedge B) = v(A) \hat{\wedge} v(B)$
- $v(A \vee B) = v(A) \hat{\vee} v(B)$

Definisjon (Boolsk valuasjon)

En *boolsk valuasjon* *er en funksjon* v *fra* $\mathcal{F}_u$ *til* **Bool** *slik at:*

- $v(\neg A) = \hat{\neg} v(A)$
- $v(A \wedge B) = v(A) \hat{\wedge} v(B)$
- $v(A \vee B) = v(A) \hat{\vee} v(B)$
- $v(A \rightarrow B) = v(A) \hat{\rightarrow} v(B)$

Definisjon (Boolsk valuasjon)

En boolsk valuasjon er en funksjon v fra $\mathcal{F}_u$ til **Bool** *slik at:*

- $v(\neg A) = \hat{\neg} v(A)$
- $v(A \wedge B) = v(A) \hat{\wedge} v(B)$
- $v(A \vee B) = v(A) \hat{\vee} v(B)$
- $v(A \rightarrow B) = v(A) \hat{\rightarrow} v(B)$

Merk

- *Symbolene $\neg$, $\wedge$, $\vee$ og $\rightarrow$ på venstresiden er de utsagnslogiske konnektivene, som er en del av syntaksen.*

Definisjon (Boolsk valuasjon)

En boolsk valuasjon er en funksjon v fra $\mathcal{F}_u$ til **Bool** *slik at:*

- $v(\neg A) = \hat{\neg} v(A)$
- $v(A \wedge B) = v(A) \hat{\wedge} v(B)$
- $v(A \vee B) = v(A) \hat{\vee} v(B)$
- $v(A \rightarrow B) = v(A) \hat{\rightarrow} v(B)$

Merk

- *Symbolene $\neg$, $\wedge$, $\vee$ og $\rightarrow$ på venstresiden er de utsagnslogiske konnektivene, som er en del av syntaksen.*
- *Symbolene $\hat{\neg}$, $\hat{\wedge}$, $\hat{\vee}$ og $\hat{\rightarrow}$ på høyresiden er operatorer på* **Bool***, og en del av semantikken.*

Eksempel

- *Se på formelen* $\neg P \rightarrow Q$.

Eksempel

- *Se på formelen* $\neg P \to Q$.
- *La* v *være en valuasjon slik at* $v(P) = \mathbf{1}$ *og* $v(Q) = \mathbf{0}$.

Eksempel

- *Se på formelen* $\neg P \rightarrow Q$.
- *La* v *være en valuasjon slik at* $v(P) = \mathbf{1}$ *og* $v(Q) = \mathbf{0}$.
- *Vi får:*

$$v(\neg P \rightarrow Q)$$

Eksempel

- *Se på formelen* $\neg P \rightarrow Q$.
- *La* v *være en valuasjon slik at* $v(P) = \mathbf{1}$ *og* $v(Q) = \mathbf{0}$.
- *Vi får:*

$$v(\neg P \rightarrow Q) \quad = \quad v(\neg P) \mathrel{\hat{\rightarrow}} v(Q)$$

Eksempel

- *Se på formelen* $\neg P \to Q$.
- *La* v *være en valuasjon slik at* $v(P) = \mathbf{1}$ *og* $v(Q) = \mathbf{0}$.
- *Vi får:*

$$\begin{aligned} v(\neg P \to Q) &= v(\neg P) \mathbin{\hat{\to}} v(Q) \\ &= (\hat{\neg}\, v(P)) \mathbin{\hat{\to}} v(Q) \end{aligned}$$

Eksempel

- *Se på formelen* $\neg P \rightarrow Q$.
- *La* v *være en valuasjon slik at* $v(P) = \mathbf{1}$ *og* $v(Q) = \mathbf{0}$.
- *Vi får:*

$$
\begin{aligned}
v(\neg P \rightarrow Q) &= v(\neg P) \mathbin{\hat{\rightarrow}} v(Q) \\
&= (\hat{\neg}\, v(P)) \mathbin{\hat{\rightarrow}} v(Q) \\
&= (\hat{\neg}\, \mathbf{1}) \mathbin{\hat{\rightarrow}} v(Q)
\end{aligned}
$$

Eksempel

- *Se på formelen* $\neg P \to Q$.
- *La* v *være en valuasjon slik at* $v(P) = \mathbf{1}$ *og* $v(Q) = \mathbf{0}$.
- *Vi får:*

$$\begin{aligned} v(\neg P \to Q) &= v(\neg P) \hat{\to} v(Q) \\ &= (\hat{\neg}\, v(P)) \hat{\to} v(Q) \\ &= (\hat{\neg}\, \mathbf{1}) \hat{\to} v(Q) \\ &= (\hat{\neg}\, \mathbf{1}) \hat{\to} \mathbf{0} \end{aligned}$$

Eksempel

- *Se på formelen* $\neg P \rightarrow Q$.
- *La* v *være en valuasjon slik at* $v(P) = \mathbf{1}$ *og* $v(Q) = \mathbf{0}$.
- *Vi får:*

$$
\begin{aligned}
v(\neg P \rightarrow Q) &= v(\neg P) \mathrel{\hat{\rightarrow}} v(Q) \\
&= (\hat{\neg}\, v(P)) \mathrel{\hat{\rightarrow}} v(Q) \\
&= (\hat{\neg}\, \mathbf{1}) \mathrel{\hat{\rightarrow}} v(Q) \\
&= (\hat{\neg}\, \mathbf{1}) \mathrel{\hat{\rightarrow}} \mathbf{0} \\
&= \mathbf{0} \mathrel{\hat{\rightarrow}} \mathbf{0}
\end{aligned}
$$

Eksempel

- *Se på formelen* $\neg P \to Q$.
- *La* v *være en valuasjon slik at* $v(P) = \mathbf{1}$ *og* $v(Q) = \mathbf{0}$.
- *Vi får:*

$$
\begin{aligned}
v(\neg P \to Q) &= v(\neg P) \mathrel{\hat{\to}} v(Q) \\
&= (\hat{\neg}\, v(P)) \mathrel{\hat{\to}} v(Q) \\
&= (\hat{\neg}\, \mathbf{1}) \mathrel{\hat{\to}} v(Q) \\
&= (\hat{\neg}\, \mathbf{1}) \mathrel{\hat{\to}} \mathbf{0} \\
&= \mathbf{0} \mathrel{\hat{\to}} \mathbf{0} \\
&= \mathbf{1}
\end{aligned}
$$

Definisjon (Oppfyllbar)

- *En boolsk valuasjon v oppfyller en utsagnslogisk formel A hvis $v(A) = \mathbf{1}$. Skrives ofte $v \models A$.*

Definisjon (Oppfyllbar)

- *En boolsk valuasjon v oppfyller en utsagnslogisk formel A hvis $v(A) = \mathbf{1}$. Skrives ofte $v \models A$.*
- *En utsagnslogisk formel er oppfyllbar hvis det finnes en boolsk valuasjon som oppfyller den.*

Definisjon (Oppfyllbar)

- *En boolsk valuasjon v oppfyller en utsagnslogisk formel A hvis* $v(A) = \mathbf{1}$*. Skrives ofte* $v \models A$*.*
- *En utsagnslogisk formel er oppfyllbar hvis det finnes en boolsk valuasjon som oppfyller den.*

Eksempel

- *Formelen* $P \rightarrow Q$ *er oppfyllbar: den oppfylles av alle valuasjoner v slik at* $v(P) = \mathbf{0}$ *eller* $v(Q) = \mathbf{1}$*.*

Definisjon (Oppfyllbar)

- *En boolsk valuasjon v oppfyller en utsagnslogisk formel A hvis $v(A) = \mathbf{1}$. Skrives ofte $v \models A$.*
- *En utsagnslogisk formel er oppfyllbar hvis det finnes en boolsk valuasjon som oppfyller den.*

Eksempel

- *Formelen $P \rightarrow Q$ er oppfyllbar: den oppfylles av alle valuasjoner v slik at $v(P) = \mathbf{0}$ eller $v(Q) = \mathbf{1}$.*
- *Formelen $\neg(P \rightarrow P)$ er ikke oppfyllbar. Hvorfor?*

Definisjon (Falsifiserbar)

- *En boolsk valuasjon v falsifiserer en utsagnslogisk formel A hvis* $v(A) = \mathbf{0}$. *Skrives ofte* $v \not\models A$.

Definisjon (Falsifiserbar)

- *En boolsk valuasjon v falsifiserer en utsagnslogisk formel A hvis* $v(A) = \mathbf{0}$. *Skrives ofte* $v \not\models A$.
- *En utsagnslogisk formel er falsifiserbar hvis det finnes en boolsk valuasjon som falsifiserer den.*

Definisjon (Falsifiserbar)

- *En boolsk valuasjon* v *falsifiserer en utsagnslogisk formel* A *hvis* $v(A) = \mathbf{0}$. *Skrives ofte* $v \not\models A$.
- *En utsagnslogisk formel er falsifiserbar hvis det finnes en boolsk valuasjon som falsifiserer den.*

Eksempel

- *Formelen* $P \rightarrow Q$ *er falsifiserbar: den falsifiseres av alle valuasjoner* v *slik at* $v(P) = \mathbf{1}$ *og* $v(Q) = \mathbf{0}$.

Definisjon (Falsifiserbar)

- *En boolsk valuasjon v falsifiserer en utsagnslogisk formel A hvis $v(A) = \mathbf{0}$. Skrives ofte $v \not\models A$.*
- *En utsagnslogisk formel er falsifiserbar hvis det finnes en boolsk valuasjon som falsifiserer den.*

Eksempel

- *Formelen $P \rightarrow Q$ er falsifiserbar: den falsifiseres av alle valuasjoner v slik at $v(P) = \mathbf{1}$ og $v(Q) = \mathbf{0}$.*
- *Formelen $P \rightarrow P$ er ikke falsifiserbar. Hvorfor?*

Definisjon (Tautologi)

En utsagnslogisk formel A er en tautologi hvis $v \models A$ for alle boolske valuasjoner v.

Definisjon (Tautologi)

En utsagnslogisk formel A er en tautologi hvis $v \models A$ for alle boolske valuasjoner v.

Eksempel

- *Er P en tautologi?*

Definisjon (Tautologi)

En utsagnslogisk formel A er en tautologi hvis $v \models A$ for alle boolske valuasjoner v.

Eksempel

- *Er P en tautologi?*
- *Hva med $\neg(P \to P)$?*

Definisjon (Tautologi)

En utsagnslogisk formel A er en tautologi hvis $v \models A$ for alle boolske valuasjoner v.

Eksempel

- *Er P en tautologi?*
- *Hva med $\neg(P \to P)$?*
- *Og $P \to P$?*

Definisjon (Motsigelse)

En utsagnslogisk formel A er en *motsigelse* *hvis $v \not\models A$ for alle boolske valuasjoner v.*

Definisjon (Motsigelse)

En utsagnslogisk formel A er en motsigelse hvis $v \not\models A$ for alle boolske valuasjoner v.

Merk

- *Det motsatte av en tautologi er den falsifiserbar formel.*

Definisjon (Motsigelse)

En utsagnslogisk formel A er en motsigelse *hvis $v \not\models A$ for alle boolske valuasjoner v.*

Merk

- *Det motsatte av en tautologi er den falsifiserbar formel.*
- *Det motsatte av en motsigelse er den oppfyllbar formel.*

Definisjon (Motsigelse)

En utsagnslogisk formel A er en motsigelse hvis $v \not\models A$ for alle boolske valuasjoner v.

Merk

- *Det motsatte av en tautologi er den falsifiserbar formel.*
- *Det motsatte av en motsigelse er den oppfyllbar formel.*
- *En tautologi er ikke det motsatte av en motsigelse!*

Påstand

En utsagnslogisk formel A er en tautologi hvis og bare hvis A ikke er falsifiserbar.

Påstand

En utsagnslogisk formel A er en tautologi hvis og bare hvis A ikke er falsifiserbar.

Bevis.

formelen A er en tautologi

$\square$

Påstand

En utsagnslogisk formel A er en tautologi hvis og bare hvis A ikke er falsifiserbar.

Bevis.

$$\text{formelen } A \text{ er en tautologi}$$
$$\Leftrightarrow$$
$$v \models A \text{ for alle valuasjoner } v$$

$\square$

Påstand

En utsagnslogisk formel A er en tautologi hvis og bare hvis A ikke er falsifiserbar.

Bevis.

$$\text{formelen } A \text{ er en tautologi}$$
$$\Leftrightarrow$$
$$v \models A \text{ for alle valuasjoner } v$$
$$\Leftrightarrow$$
$$\text{det finnes ingen valuasjon } v \text{ slik at } v \not\models A$$

$\square$

Påstand

En utsagnslogisk formel A er en tautologi hvis og bare hvis A ikke er falsifiserbar.

Bevis.

formelen A er en tautologi

$\Leftrightarrow$

$v \models A$ for alle valuasjoner v

$\Leftrightarrow$

det finnes ingen valuasjon v slik at $v \not\models A$

$\Leftrightarrow$

A er ikke falsifiserbar

$\square$

Hvis og bare hvis – $\Leftrightarrow$

Merk

- *Begrepet "hvis og bare hvis" uttrykker toveis implikasjon.*

Hvis og bare hvis – $\Leftrightarrow$

Merk

- *Begrepet "hvis og bare hvis" uttrykker toveis implikasjon.*
- *Skrives ofte* $\Leftrightarrow$.

Hvis og bare hvis – $\Leftrightarrow$

Merk

- *Begrepet "hvis og bare hvis" uttrykker toveis implikasjon.*
- *Skrives ofte* $\Leftrightarrow$.
- P *"hvis og bare hvis"* Q *kan uttrykkes i utsagnslogikk som*

$$(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$$

1 Induktive definisjoner

2 Utsagnslogikk

3 Sekventkalkyle

- Motivasjon
- Sekventer og aksiomer
- Sekventkalkylereglene
- Slutninger
- Utledninger
- Bevis

Sekventkalkyle for utsagnslogikk

- Hvordan finne ut om en gitt formel er en tautologi?

Sekventkalkyle for utsagnslogikk

- Hvordan finne ut om en gitt formel er en tautologi?
- Fra semantikken: Hvis formelen *ikke* er falsifiserbar, så er den en tautologi.

Sekventkalkyle for utsagnslogikk

- Hvordan finne ut om en gitt formel er en tautologi?
- Fra semantikken: Hvis formelen *ikke* er falsifiserbar, så er den en tautologi.
- Idé: Å systematisk forsøke å falsifisere formelen.

$$\vdash (P \rightarrow Q) \rightarrow (\neg Q \rightarrow \neg P)$$

Eksempel

- Falsifisere formelen $(P \rightarrow Q) \rightarrow (\neg Q \rightarrow \neg P)$:

$$\frac{P \to Q \ \vdash}{\vdash (P \to Q) \to (\neg Q \to \neg P)}$$

Eksempel

- Falsifisere formelen $(P \to Q) \to (\neg Q \to \neg P)$:
  - oppfylle $P \to Q$,

$$\frac{P \rightarrow Q \ \vdash \neg Q \rightarrow \neg P}{\vdash (P \rightarrow Q) \rightarrow (\neg Q \rightarrow \neg P)}$$

Eksempel

- Falsifisere formelen $(P \rightarrow Q) \rightarrow (\neg Q \rightarrow \neg P)$:
  - oppfylle $P \rightarrow Q$,
  - *og* falsifisere $\neg Q \rightarrow \neg P$.

$$\frac{P \to Q \;\vdash \neg Q \to \neg P}{\vdash (P \to Q) \to (\neg Q \to \neg P)}$$

Eksempel

- Falsifisere formelen $(P \to Q) \to (\neg Q \to \neg P)$:
  - oppfylle $P \to Q$,
  - *og* falsifisere $\neg Q \to \neg P$.
- Formler til *venstre* for '$\vdash$' skal *oppfylles*.

$$\frac{P \rightarrow Q \ \vdash \neg Q \rightarrow \neg P}{\vdash (P \rightarrow Q) \rightarrow (\neg Q \rightarrow \neg P)}$$

Eksempel

- Falsifisere formelen $(P \rightarrow Q) \rightarrow (\neg Q \rightarrow \neg P)$:
  - oppfylle $P \rightarrow Q$,
  - *og* falsifisere $\neg Q \rightarrow \neg P$.
- Formler til *venstre* for '$\vdash$' skal *oppfylles*.
- Formler til *høyre* for '$\vdash$' skal *falsifiseres*.

$$\frac{P \rightarrow Q \vdash \neg Q \rightarrow \neg P}{\vdash (P \rightarrow Q) \rightarrow (\neg Q \rightarrow \neg P)}$$

Eksempel

- Oppfylle $P \rightarrow Q$:

$$\dfrac{\dfrac{\vdash P}{P \to Q \vdash \neg Q \to \neg P}}{\vdash (P \to Q) \to (\neg Q \to \neg P)}$$

Eksempel

- Oppfylle $P \to Q$:
  - falsifisere P,

$$\dfrac{\dfrac{\vdash P \qquad\qquad Q \vdash}{P \to Q \vdash \neg Q \to \neg P}}{\vdash (P \to Q) \to (\neg Q \to \neg P)}$$

Eksempel

- Oppfylle $P \to Q$:
  - falsifisere P,
  - *eller* oppfylle Q.

$$\dfrac{\dfrac{\vdash P \qquad\qquad Q \vdash}{P \to Q \vdash \neg Q \to \neg P}}{\vdash (P \to Q) \to (\neg Q \to \neg P)}$$

Eksempel

- Oppfylle $P \to Q$:
  - falsifisere P,
  - *eller* oppfylle Q.
- $\neg Q \to \neg P$ må kunne falsifiseres uavhengig av hvordan $P \to Q$ oppfylles.

$$\dfrac{\dfrac{\vdash P, \neg Q \to \neg P \qquad Q \vdash \neg Q \to \neg P}{P \to Q \vdash \neg Q \to \neg P}}{\vdash (P \to Q) \to (\neg Q \to \neg P)}$$

Eksempel

- Oppfylle $P \to Q$:
  - falsifisere P,
  - *eller* oppfylle Q.
- $\neg Q \to \neg P$ må kunne falsifiseres uavhengig av hvordan $P \to Q$ oppfylles.
- Formelen kopieres derfor inn i begge de nye løvnodene.

$$\dfrac{\dfrac{\vdash P, \neg Q \to \neg P \qquad Q \vdash \neg Q \to \neg P}{P \to Q \vdash \neg Q \to \neg P}}{\vdash (P \to Q) \to (\neg Q \to \neg P)}$$

Eksempel

- Falsifisere $\neg Q \to \neg P$ i venstre løvnode:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg Q \vdash \neg P, P}{\vdash P, \neg Q \to \neg P} \qquad Q \vdash \neg Q \to \neg P}{P \to Q \vdash \neg Q \to \neg P}}{\vdash (P \to Q) \to (\neg Q \to \neg P)}$$

Eksempel

- Falsifisere $\neg Q \to \neg P$ i venstre løvnode:
  - oppfylle $\neg Q$,

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg Q \vdash \neg P, P}{\vdash P, \neg Q \to \neg P} \qquad Q \vdash \neg Q \to \neg P}{P \to Q \vdash \neg Q \to \neg P}}{\vdash (P \to Q) \to (\neg Q \to \neg P)}$$

Eksempel

- Falsifisere $\neg Q \to \neg P$ i venstre løvnode:
  - oppfylle $\neg Q$,
  - *og* falsifisere $\neg P$.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg Q \ \vdash \neg P, P}{\vdash \ P, \neg Q \rightarrow \neg P} \qquad Q \ \vdash \color{red}{\neg Q \rightarrow \neg P}}{P \rightarrow Q \ \vdash \neg Q \rightarrow \neg P}}{\vdash (P \rightarrow Q) \rightarrow (\neg Q \rightarrow \neg P)}$$

Eksempel

- Falsifisere $\neg Q \rightarrow \neg P$ i venstre løvnode:
  - oppfylle $\neg Q$,
  - *og* falsifisere $\neg P$.
- Tilsvarende, falsifisere $\neg Q \rightarrow \neg P$ i høyre løvnode:

$$
\dfrac{
  \dfrac{\neg Q \;\vdash\; \neg P, P}{\vdash\; P, \neg Q \rightarrow \neg P}
  \qquad
  \dfrac{Q, \neg Q \;\vdash\; \neg P}{Q \;\vdash\; \neg Q \rightarrow \neg P}
}{
  \dfrac{P \rightarrow Q \;\vdash\; \neg Q \rightarrow \neg P}{\vdash\; (P \rightarrow Q) \rightarrow (\neg Q \rightarrow \neg P)}
}
$$

Eksempel

- Falsifisere $\neg Q \rightarrow \neg P$ i venstre løvnode:
  - oppfylle $\neg Q$,
  - *og* falsifisere $\neg P$.
- Tilsvarende, falsifisere $\neg Q \rightarrow \neg P$ i høyre løvnode:
  - oppfylle $\neg Q$,

$$\dfrac{\dfrac{\neg Q \vdash \neg P, P}{\vdash P, \neg Q \to \neg P} \qquad \dfrac{Q, \neg Q \vdash \neg P}{Q \vdash \neg Q \to \neg P}}{\dfrac{P \to Q \vdash \neg Q \to \neg P}{\vdash (P \to Q) \to (\neg Q \to \neg P)}}$$

Eksempel

- Falsifisere $\neg Q \to \neg P$ i venstre løvnode:
  - oppfylle $\neg Q$,
  - *og* falsifisere $\neg P$.
- Tilsvarende, falsifisere $\neg Q \to \neg P$ i høyre løvnode:
  - oppfylle $\neg Q$,
  - *og* falsifisere $\neg P$.

$$
\dfrac{
  \dfrac{\neg Q \ \vdash \ \neg P, P}{\vdash \ P, \neg Q \to \neg P}
  \qquad
  \dfrac{Q, \neg Q \ \vdash \ \neg P}{Q \ \vdash \ \neg Q \to \neg P}
}{
  \dfrac{P \to Q \ \vdash \ \neg Q \to \neg P}{\vdash \ (P \to Q) \to (\neg Q \to \neg P)}
}
$$

Eksempel

- Falsifisere $\neg P$ i venstre løvnode:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg Q, P \vdash P}{\neg Q \vdash \neg P, P}}{\vdash P, \neg Q \to \neg P} \qquad \dfrac{Q, \neg Q \vdash \neg P}{Q \vdash \neg Q \to \neg P}}{P \to Q \vdash \neg Q \to \neg P}}{\vdash (P \to Q) \to (\neg Q \to \neg P)}$$

Eksempel

- Falsifisere $\neg P$ i venstre løvnode:
  - oppfylle P.

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg Q, P \vdash P}{\neg Q \vdash \neg P, P}}{\vdash P, \neg Q \to \neg P} \qquad \dfrac{Q, {\color{red}\neg Q} \vdash \neg P}{Q \vdash \neg Q \to \neg P}}{P \to Q \vdash \neg Q \to \neg P}}{\vdash (P \to Q) \to (\neg Q \to \neg P)}
$$

Eksempel

- Falsifisere $\neg P$ i venstre løvnode:
  - oppfylle P.
- Oppfylle $\neg Q$ i høyre løvnode:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg Q, P \vdash P}{\neg Q \vdash \neg P, P}}{\vdash P, \neg Q \rightarrow \neg P} \qquad \dfrac{\dfrac{Q \vdash {\color{red}Q}, \neg P}{Q, \neg Q \vdash \neg P}}{Q \vdash \neg Q \rightarrow \neg P}}{\dfrac{P \rightarrow Q \vdash \neg Q \rightarrow \neg P}{\vdash (P \rightarrow Q) \rightarrow (\neg Q \rightarrow \neg P)}}$$

Eksempel

- Falsifisere $\neg P$ i venstre løvnode:
  - oppfylle P.
- Oppfylle $\neg Q$ i høyre løvnode:
  - falsifisere Q.

$$
\dfrac{
\dfrac{\dfrac{\neg Q, P \ \vdash\ P}{\neg Q \ \vdash\ \neg P, P}}{\vdash\ P, \neg Q \rightarrow \neg P}
\qquad
\dfrac{\dfrac{Q \ \vdash\ Q, \neg P}{Q, \neg Q \ \vdash\ \neg P}}{Q \ \vdash\ \neg Q \rightarrow \neg P}
}{
\dfrac{P \rightarrow Q \ \vdash\ \neg Q \rightarrow \neg P}{\vdash\ (P \rightarrow Q) \rightarrow (\neg Q \rightarrow \neg P)}
}
$$

Eksempel

- Venstre løvnode:

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg Q, P \;\vdash\; P}{\neg Q \;\vdash\; \neg P, P}}{\vdash\; P, \neg Q \rightarrow \neg P} \qquad \dfrac{\dfrac{Q \;\vdash\; Q, \neg P}{Q, \neg Q \;\vdash\; \neg P}}{Q \;\vdash\; \neg Q \rightarrow \neg P}}{\dfrac{P \rightarrow Q \;\vdash\; \neg Q \rightarrow \neg P}{\vdash\; (P \rightarrow Q) \rightarrow (\neg Q \rightarrow \neg P)}}
$$

Eksempel

- Venstre løvnode:
  - Oppfylle: $\neg Q$, P. Falsifisere: P.

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg Q, P \vdash P}{\neg Q \vdash \neg P, P}}{\vdash P, \neg Q \to \neg P} \qquad \dfrac{\dfrac{Q \vdash Q, \neg P}{Q, \neg Q \vdash \neg P}}{Q \vdash \neg Q \to \neg P}}{\dfrac{P \to Q \vdash \neg Q \to \neg P}{\vdash (P \to Q) \to (\neg Q \to \neg P)}}
$$

Eksempel

- Venstre løvnode:
  - Oppfylle: $\neg Q$, P. Falsifisere: P.
  - Umulig, kan *ikke* både oppfylle og falsifisere P!

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg Q, P \vdash P}{\neg Q \vdash \neg P, P}}{\vdash P, \neg Q \to \neg P} \qquad \dfrac{\dfrac{Q \vdash Q, \neg P}{Q, \neg Q \vdash \neg P}}{Q \vdash \neg Q \to \neg P}}{\dfrac{P \to Q \vdash \neg Q \to \neg P}{\vdash (P \to Q) \to (\neg Q \to \neg P)}}$$

Eksempel

- Venstre løvnode:
  - Oppfylle: $\neg Q$, P. Falsifisere: P.
  - Umulig, kan *ikke* både oppfylle og falsifisere P!
- Høyre løvnode:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg Q, P \vdash P}{\neg Q \vdash \neg P, P}}{\vdash P, \neg Q \to \neg P} \qquad \dfrac{\dfrac{{\color{red}Q} \vdash {\color{red}Q, \neg P}}{Q, \neg Q \vdash \neg P}}{Q \vdash \neg Q \to \neg P}}{P \to Q \vdash \neg Q \to \neg P}}{\vdash (P \to Q) \to (\neg Q \to \neg P)}$$

Eksempel

- Venstre løvnode:
  - Oppfylle: $\neg Q$, P. Falsifisere: P.
  - Umulig, kan *ikke* både oppfylle og falsifisere P!
- Høyre løvnode:
  - Oppfylle: Q. Falsifisere: Q, $\neg P$.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg Q, P \vdash P}{\neg Q \vdash \neg P, P}}{\vdash P, \neg Q \to \neg P} \qquad \dfrac{\dfrac{Q \vdash Q, \neg P}{Q, \neg Q \vdash \neg P}}{Q \vdash \neg Q \to \neg P}}{P \to Q \vdash \neg Q \to \neg P}}{\vdash (P \to Q) \to (\neg Q \to \neg P)}$$

Eksempel

- Venstre løvnode:
  - Oppfylle: $\neg Q$, P. Falsifisere: P.
  - Umulig, kan *ikke* både oppfylle og falsifisere P!
- Høyre løvnode:
  - Oppfylle: Q. Falsifisere: Q, $\neg P$.
  - Umulig, kan *ikke* både oppfylle og falsifisere Q!

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg Q, P \vdash P}{\neg Q \vdash \neg P, P}}{\vdash P, \neg Q \to \neg P} \qquad \dfrac{\dfrac{Q \vdash Q, \neg P}{Q, \neg Q \vdash \neg P}}{Q \vdash \neg Q \to \neg P}}{P \to Q \vdash \neg Q \to \neg P}}{\vdash (P \to Q) \to (\neg Q \to \neg P)}$$

Eksempel

- Venstre løvnode:
  - Oppfylle: $\neg Q$, P. Falsifisere: P.
  - Umulig, kan *ikke* både oppfylle og falsifisere P!
- Høyre løvnode:
  - Oppfylle: Q. Falsifisere: Q, $\neg P$.
  - Umulig, kan *ikke* både oppfylle og falsifisere Q!
- $(P \to Q) \to (\neg Q \to \neg P)$ kan ikke falsifiseres!

Kommentarer til det foregående eksempelet:

- Vi arbeidet med objekter av typen '$\ldots \vdash \ldots$'. Slike objekter kaller vi for sekventer.

Kommentarer til det foregående eksempelet:

- Vi arbeidet med objekter av typen '$\ldots \vdash \ldots$'. Slike objekter kaller vi for sekventer.
- Ved å se på konnektivet til en bestemt formel i en sekvent konstruerte vi nedenfra og opp nye sekventer fra eksisterende. Hvilke nye sekventer vi får bestemmes av regler.

Kommentarer til det foregående eksempelet:

- Vi arbeidet med objekter av typen '$\ldots \vdash \ldots$'. Slike objekter kaller vi for sekventer.
- Ved å se på konnektivet til en bestemt formel i en sekvent konstruerte vi nedenfra og opp nye sekventer fra eksisterende. Hvilke nye sekventer vi får bestemmes av regler.
- Gjennom gjentatt anvendelse av regler konstruerte vi et tre-lignende objekt med en rotnode og løvnoder. Et slikt objekt kalles en utledning.

Kommentarer til det foregående eksempelet:

- Vi arbeidet med objekter av typen '$\ldots \vdash \ldots$'. Slike objekter kaller vi for sekventer.
- Ved å se på konnektivet til en bestemt formel i en sekvent konstruerte vi nedenfra og opp nye sekventer fra eksisterende. Hvilke nye sekventer vi får bestemmes av regler.
- Gjennom gjentatt anvendelse av regler konstruerte vi et tre-lignende objekt med en rotnode og løvnoder. Et slikt objekt kalles en utledning.
- Den utledningen vi konstruerte var slik at sekventene i løvnodene hadde noe likt på begge sier av '$\vdash$'. En utledning med denne egenskapen kalles et bevis.

Kommentarer til det foregående eksempelet:

- Vi arbeidet med objekter av typen '$\ldots \vdash \ldots$'. Slike objekter kaller vi for sekventer.
- Ved å se på konnektivet til en bestemt formel i en sekvent konstruerte vi nedenfra og opp nye sekventer fra eksisterende. Hvilke nye sekventer vi får bestemmes av regler.
- Gjennom gjentatt anvendelse av regler konstruerte vi et tre-lignende objekt med en rotnode og løvnoder. Et slikt objekt kalles en utledning.
- Den utledningen vi konstruerte var slik at sekventene i løvnodene hadde noe likt på begge sier av '$\vdash$'. En utledning med denne egenskapen kalles et bevis.

Vi skal nå definere helt presist hva vi legger i disse begrepene!

Sekventkalkylen LK

Definisjon (Sekvent)

En sekvent *er et objekt på formen* $\Gamma \vdash \Delta$ *slik at* Γ *og* Δ *er multimengder av utsagnslogiske formler.*

Sekventkalkylen LK

Definisjon (Sekvent)

En sekvent *er et objekt på formen* $\Gamma \vdash \Delta$ *slik at* Γ *og* Δ *er multimengder av utsagnslogiske formler.*

- Formlene som står til venstre for '$\vdash$' kalles antecedent.

Sekventkalkylen LK

Definisjon (Sekvent)

En sekvent *er et objekt på formen* $\Gamma \vdash \Delta$ *slik at* Γ *og* Δ *er multimengder av utsagnslogiske formler.*

- Formlene som står til venstre for '$\vdash$' kalles antecedent.
- Formlene som står til høyre for '$\vdash$' kalles succedent.

Sekventkalkylen LK

Definisjon (Sekvent)

En sekvent *er et objekt på formen* $\Gamma \vdash \Delta$ *slik at* Γ *og* Δ *er multimengder av utsagnslogiske formler.*

- Formlene som står til venstre for '$\vdash$' kalles antecedent.
- Formlene som står til høyre for '$\vdash$' kalles succedent.

Notasjon

I sekventer leses ',' som union:

- Γ, A *skal bety* $\Gamma \cup \{A\}$.

Eksempel

Hvilke av uttrykkene nedenfor er sekventer?

- $P \vdash Q$

Eksempel

Hvilke av uttrykkene nedenfor er sekventer?

- $P \vdash Q$
- $P, P \vdash Q, P$

Eksempel

Hvilke av uttrykkene nedenfor er sekventer?

- $P \vdash Q$
- $P, P \vdash Q, P$
- $\vdash P \to Q$

Eksempel

Hvilke av uttrykkene nedenfor er sekventer?

- $P \vdash Q$
- $P, P \vdash Q, P$
- $\vdash P \rightarrow Q$
- $\vdash P \vdash Q$

Eksempel

Hvilke av uttrykkene nedenfor er sekventer?

- $P \vdash Q$
- $P, P \vdash Q, P$
- $\vdash P \rightarrow Q$
- $\vdash P \vdash Q$
- $P, Q \rightarrow R \vdash Q \rightarrow R$

Eksempel

Hvilke av uttrykkene nedenfor er sekventer?

- $P \vdash Q$
- $P, P \vdash Q, P$
- $\vdash P \rightarrow Q$
- $\vdash P \vdash Q$
- $P, Q \rightarrow R \vdash Q \rightarrow R$
- $P, Q \rightarrow R \vdash Q \rightarrow R, P$

Eksempel

Hvilke av uttrykkene nedenfor er sekventer?

- $P \vdash Q$
- $P, P \vdash Q, P$
- $\vdash P \rightarrow Q$
- $\vdash P \vdash Q$
- $P, Q \rightarrow R \vdash Q \rightarrow R$
- $P, Q \rightarrow R \vdash Q \rightarrow R, P$
- $P, 1, P \rightarrow Q \vdash P \rightarrow 2$

Eksempel

Hvilke av uttrykkene nedenfor er sekventer?

- $P \vdash Q$
- $P, P \vdash Q, P$
- $\vdash P \rightarrow Q$
- $\vdash P \vdash Q$
- $P, Q \rightarrow R \vdash Q \rightarrow R$
- $P, Q \rightarrow R \vdash Q \rightarrow R, P$
- $P, 1, P \rightarrow Q \vdash P \rightarrow 2$

Definisjon (Aksiom)

Et aksiom er en sekvent på formen $\Gamma, A \vdash A, \Delta$ *slik at* A *er en atomær utsagnslogisk formel.*

Eksempel

Hvilke av uttrykkene nedenfor er sekventer?

- $P \vdash Q$
- $P, P \vdash Q, P$
- $\vdash P \rightarrow Q$
- $\vdash P \vdash Q$
- $P, Q \rightarrow R \vdash Q \rightarrow R$
- $P, Q \rightarrow R \vdash Q \rightarrow R, P$
- $P, 1, P \rightarrow Q \vdash P \rightarrow 2$

Definisjon (Aksiom)

Et aksiom er en sekvent på formen $\Gamma, A \vdash A, \Delta$ slik at A er en atomær utsagnslogisk formel.

Hvilke av sekventene i eksempelet over er aksiomer?

Sekventkalkyleregler

Definisjon (α-regler)

α-reglene i sekventkalkylen LK *er:*

Sekventkalkyleregler

Definisjon (α-regler)

α-reglene i sekventkalkylen LK *er:*

$$\frac{\Gamma, A\ ,\ \ B \vdash \Delta}{\Gamma, A \land B \vdash \Delta}\ \mathsf{L}\land$$

Sekventkalkyleregler

Definisjon (α-regler)

α-reglene i sekventkalkylen LK *er:*

$$\frac{\Gamma, A\ ,\ B \vdash \Delta}{\Gamma, A \land B \vdash \Delta}\,\mathsf{L}\land \qquad \frac{\Gamma \vdash A\ ,\ B, \Delta}{\Gamma \vdash A \lor B, \Delta}\,\mathsf{R}\lor$$

Sekventkalkyleregler

Definisjon (α-regler)

α-reglene i sekventkalkylen LK *er:*

$$\frac{\Gamma, A\ ,\ B \vdash \Delta}{\Gamma, A \wedge B \vdash \Delta}\ \mathrm{L}\wedge \qquad \frac{\Gamma \vdash A\ ,\ B, \Delta}{\Gamma \vdash A \vee B, \Delta}\ \mathrm{R}\vee$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \rightarrow B, \Delta}\ \mathrm{R}\rightarrow$$

Sekventkalkyleregler

Definisjon (α-regler)

α-reglene i sekventkalkylen LK *er:*

$$\frac{\Gamma, A \,,\; B \vdash \Delta}{\Gamma, A \land B \vdash \Delta}\,\mathrm{L}\land \qquad \frac{\Gamma \vdash A \,,\; B, \Delta}{\Gamma \vdash A \lor B, \Delta}\,\mathrm{R}\lor$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \rightarrow B, \Delta}\,\mathrm{R}\rightarrow$$

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma, \neg A \vdash \Delta}\,\mathrm{L}\neg$$

Sekventkalkyleregler

Definisjon (α-regler)

α-reglene i sekventkalkylen LK *er:*

$$\frac{\Gamma, A\ ,\ B \vdash \Delta}{\Gamma, A \wedge B \vdash \Delta}\,\mathsf{L}\wedge \qquad \frac{\Gamma \vdash A\ ,\ B, \Delta}{\Gamma \vdash A \vee B, \Delta}\,\mathsf{R}\vee$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \to B, \Delta}\,\mathsf{R}{\to}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma, \neg A \vdash \Delta}\,\mathsf{L}\neg \qquad \frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \neg A, \Delta}\,\mathsf{R}\neg$$

Sekventkalkyleregler

Definisjon (α-regler)

α-reglene i sekventkalkylen LK *er:*

$$\frac{\Gamma, A\,,\ B \vdash \Delta}{\Gamma, A \wedge B \vdash \Delta}\ \mathsf{L}\wedge \qquad \frac{\Gamma \vdash A\,,\ B, \Delta}{\Gamma \vdash A \vee B, \Delta}\ \mathsf{R}\vee$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \rightarrow B, \Delta}\ \mathsf{R}\!\rightarrow$$

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma, \neg A \vdash \Delta}\ \mathsf{L}\neg \qquad \frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \neg A, \Delta}\ \mathsf{R}\neg$$

α-reglene kalles ofte ett-premissregler.

Definisjon (β-regler)

β-reglene i sekventkalkylen LK *er:*

Definisjon (β-regler)

β-reglene i sekventkalkylen LK *er:*

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta \qquad \Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \land B, \Delta}\ \mathrm{R}\land$$

Definisjon (β-regler)

β-reglene i sekventkalkylen LK *er:*

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta \qquad \Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \land B, \Delta}\ \mathrm{R}\land$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta \qquad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \lor B \vdash \Delta}\ \mathrm{L}\lor$$

Definisjon (β-regler)

β-reglene i sekventkalkylen LK *er:*

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta \qquad \Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \land B, \Delta}\ \mathrm{R}\land$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta \qquad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \lor B \vdash \Delta}\ \mathrm{L}\lor$$

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta \qquad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \to B \vdash \Delta}\ \mathrm{L}\to$$

Definisjon (β-regler)

β-reglene i sekventkalkylen LK *er:*

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta \qquad \Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \land B, \Delta}\ \mathrm{R}\land$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta \qquad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \lor B \vdash \Delta}\ \mathrm{L}\lor$$

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta \qquad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \to B \vdash \Delta}\ \mathrm{L}\!\to$$

β-reglene kalles ofte to-premissregler.

Definisjon (β-regler)

β-reglene i sekventkalkylen LK *er:*

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta \qquad \Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \land B, \Delta}\ \mathrm{R}\land$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta \qquad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \lor B \vdash \Delta}\ \mathrm{L}\lor$$

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta \qquad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \rightarrow B \vdash \Delta}\ \mathrm{L}\rightarrow$$

β-reglene kalles ofte to-premissregler.

Definisjon (Slutningsreglene i LK)

Slutningsreglene i sekventkalkylen LK *er α- og β-reglene.*

Begreper knyttet til regler

Se på regelen

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta \qquad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \vee B \vdash \Delta} \, \mathsf{L}\vee$$

Begreper knyttet til regler

Se på regelen

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta \qquad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \lor B \vdash \Delta}\ \mathsf{L}\lor$$

- Sekventene over streken kalles premisser.

Begreper knyttet til regler

Se på regelen

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta \qquad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \lor B \vdash \Delta}\ \mathsf{L}\lor$$

- Sekventene over streken kalles premisser.
- Sekventen under streken kalles konklusjon.

Begreper knyttet til regler

Se på regelen

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta \qquad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \lor B \vdash \Delta}\ \mathsf{L}\lor$$

- Sekventene over streken kalles premisser.
- Sekventen under streken kalles konklusjon.
- Teksten til høyre for streken er regelens navn.

Begreper knyttet til regler

Se på regelen

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta \qquad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \lor B \vdash \Delta}\ \mathsf{L}\lor$$

- Sekventene over streken kalles premisser.
- Sekventen under streken kalles konklusjon.
- Teksten til høyre for streken er regelens navn.
- Formelen som forekommer eksplisitt i konklusjonen kalles hovedformel.

Begreper knyttet til regler

Se på regelen

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta \qquad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \lor B \vdash \Delta}\ \mathsf{L}\lor$$

- Sekventene over streken kalles premisser.
- Sekventen under streken kalles konklusjon.
- Teksten til høyre for streken er regelens navn.
- Formelen som forekommer eksplisitt i konklusjonen kalles hovedformel.
- Formlene som forekommer eksplisitt i premissene kalles aktive formler.

Begreper knyttet til regler

Se på regelen

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta \qquad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \lor B \vdash \Delta}\ \mathsf{L}\lor$$

- Sekventene over streken kalles premisser.
- Sekventen under streken kalles konklusjon.
- Teksten til høyre for streken er regelens navn.
- Formelen som forekommer eksplisitt i konklusjonen kalles hovedformel.
- Formlene som forekommer eksplisitt i premissene kalles aktive formler.
- Formlene som forekommer i Γ og Δ kalles ekstraformler.

Regler vs. slutninger

Definisjon (LK-slutning)

- *En slutning er en instans av en regel hvor*

Regler vs. slutninger

Definisjon (LK-slutning)

- *En slutning er en instans av en regel hvor*
  - *A og B er erstattet med utsagnslogiske formler*

Regler vs. slutninger

Definisjon (LK-slutning)

- *En slutning er en instans av en regel hvor*
  - *A og B er erstattet med utsagnslogiske formler*
  - *Γ og Δ er erstattet med multimengder av utsagnslogiske formler*

Regler vs. slutninger

Definisjon (LK-slutning)

- *En slutning er en instans av en regel hvor*
  - *A og B er erstattet med utsagnslogiske formler*
  - *Γ og Δ er erstattet med multimengder av utsagnslogiske formler*
- *Slutninger av en regel med navn eller type θ kalles θ-slutninger.*

Regler vs. slutninger

Definisjon (LK-slutning)

- *En slutning er en instans av en regel hvor*
  - *A og B er erstattet med utsagnslogiske formler*
  - *Γ og Δ er erstattet med multimengder av utsagnslogiske formler*
- *Slutninger av en regel med navn eller type θ kalles θ-slutninger.*

Eksempel

En regel $\dfrac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \neg A, \Delta}\,\mathrm{R}\neg$ *definerer uendelig mange* R¬*-slutninger:*

Regler vs. slutninger

Definisjon (LK-slutning)

- *En slutning er en instans av en regel hvor*
  - *A og B er erstattet med utsagnslogiske formler*
  - *Γ og Δ er erstattet med multimengder av utsagnslogiske formler*
- *Slutninger av en regel med navn eller type θ kalles θ-slutninger.*

Eksempel

En regel $\dfrac{\Gamma, A \ \vdash \Delta}{\Gamma \ \vdash \neg A, \Delta}\,\mathrm{R}\neg$ *definerer uendelig mange* R¬*-slutninger:*

$$\dfrac{P \ \vdash}{\vdash \neg P}$$

Regler vs. slutninger

Definisjon (LK-slutning)

- *En slutning er en instans av en regel hvor*
    - *A og B er erstattet med utsagnslogiske formler*
    - *Γ og Δ er erstattet med multimengder av utsagnslogiske formler*
- *Slutninger av en regel med navn eller type θ kalles θ-slutninger.*

Eksempel

En regel $\dfrac{\Gamma, A \;\vdash\; \Delta}{\Gamma \;\vdash\; \neg A, \Delta}\,\mathrm{R}\neg$ *definerer uendelig mange* R¬*-slutninger:*

$$\frac{P \;\vdash}{\vdash\; \neg P} \qquad \frac{Q, P \;\vdash}{Q \;\vdash\; \neg P}$$

Regler vs. slutninger

Definisjon (LK-slutning)

- *En slutning er en instans av en regel hvor*
  - *A og B er erstattet med utsagnslogiske formler*
  - *Γ og Δ er erstattet med multimengder av utsagnslogiske formler*
- *Slutninger av en regel med navn eller type θ kalles θ-slutninger.*

Eksempel

En regel $\dfrac{\Gamma, A \ \vdash \Delta}{\Gamma \ \vdash \neg A, \Delta}\ \mathrm{R}\neg$ *definerer uendelig mange* R¬*-slutninger:*

$$\frac{P \ \vdash}{\vdash \neg P} \qquad \frac{Q, P \ \vdash}{Q \ \vdash \neg P} \qquad \frac{Q \rightarrow R, P \ \vdash P}{Q \rightarrow R \ \vdash \neg P, P} \qquad \ldots$$

Begrepene knyttet til regler anvendes om slutninger:

$$\frac{P \rightarrow Q, P \vdash Q \qquad P \rightarrow Q, R \vdash Q}{P \rightarrow Q, P \vee R \vdash Q}\,\mathsf{L}\vee$$

Begrepene knyttet til regler anvendes om slutninger:

$$\frac{P \to Q, P \vdash Q \qquad P \to Q, R \vdash Q}{P \to Q, P \lor R \vdash Q}\ \mathsf{L}\lor$$

- Sekventene over streken kalles premisser.

Begrepene knyttet til regler anvendes om slutninger:

$$\dfrac{P \to Q, P \vdash Q \qquad P \to Q, R \vdash Q}{P \to Q, P \vee R \vdash Q}\ \mathsf{L}\vee$$

- Sekventene over streken kalles premisser.
- Sekventen under streken kalles konklusjon.

Begrepene knyttet til regler anvendes om slutninger:

$$\frac{P \rightarrow Q, P \vdash Q \qquad P \rightarrow Q, R \vdash Q}{P \rightarrow Q, P \lor R \vdash Q}\ \mathrm{L}\lor$$

- Sekventene over streken kalles premisser.
- Sekventen under streken kalles konklusjon.
- Formelen $P \lor R$ i konklusjonen er hovedformel.

Begrepene knyttet til regler anvendes om slutninger:

$$\frac{P \rightarrow Q, P \vdash Q \qquad P \rightarrow Q, R \vdash Q}{P \rightarrow Q, P \lor R \vdash Q}\ \mathsf{L}\lor$$

- Sekventene over streken kalles premisser.
- Sekventen under streken kalles konklusjon.
- Formelen $P \lor R$ i konklusjonen er hovedformel.
- Formlene P og R i premissene er aktive formler.

Begrepene knyttet til regler anvendes om slutninger:

$$\frac{P \rightarrow Q, P \vdash Q \qquad P \rightarrow Q, R \vdash Q}{P \rightarrow Q, P \lor R \vdash Q}\ \mathsf{L}\lor$$

- Sekventene over streken kalles premisser.
- Sekventen under streken kalles konklusjon.
- Formelen $P \lor R$ i konklusjonen er hovedformel.
- Formlene P og R i premissene er aktive formler.
- De andre formlene er ekstraformler.

Utledninger

- En utledning er et tre der nodene er sekventer.

Utledninger

- En utledning er et tre der nodene er sekventer.
- Rotnoden er nederst og løvnodene er øverst.

Utledninger

- En utledning er et tre der nodene er sekventer.
- Rotnoden er nederst og løvnodene er øverst.
- Rotnoden kalles rotsekvent.

Utledninger

- En utledning er et tre der nodene er sekventer.
- Rotnoden er nederst og løvnodene er øverst.
- Rotnoden kalles rotsekvent.
- Løvnodene kalles løvsekventer.

Utledninger

- En utledning er et tre der nodene er sekventer.
- Rotnoden er nederst og løvnodene er øverst.
- Rotnoden kalles rotsekvent.
- Løvnodene kalles løvsekventer.

Definisjon (Mengden av LK-utledninger – basistilfelle)

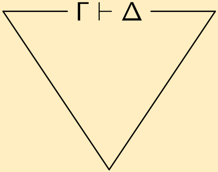
En sekvent $\Gamma \vdash \Delta$ er en LK-utledning.

$$\Gamma \vdash \Delta$$

Her er $\Gamma \vdash \Delta$ både rotsekvent og løvsekvent.

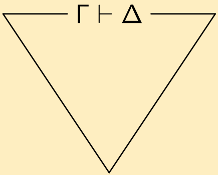
Definisjon (Mengden av LK-utledninger – α-utvidelse)

Hvis det finnes en LK-*utledning med en løvsekvent* $\Gamma \vdash \Delta$



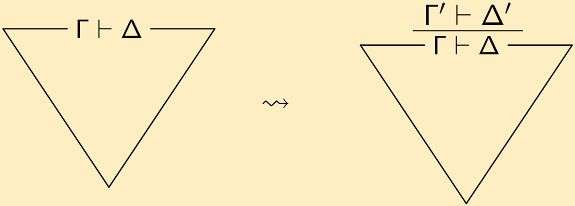
Definisjon (Mengden av LK-utledninger – α-utvidelse)

Hvis det finnes en LK*-utledning med en løvsekvent* $\Gamma \vdash \Delta$ *og en* α*-slutning med konklusjon* $\Gamma \vdash \Delta$ *og premiss* $\Gamma' \vdash \Delta'$



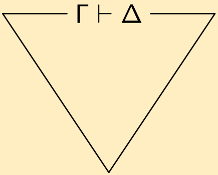
Definisjon (Mengden av LK-utledninger – α-utvidelse)

Hvis det finnes en LK*-utledning med en løvsekvent* $\Gamma \vdash \Delta$ *og en* α*-slutning med konklusjon* $\Gamma \vdash \Delta$ *og premiss* $\Gamma' \vdash \Delta'$*, så er objektet vi får ved å plassere* $\Gamma' \vdash \Delta'$ *over* $\Gamma \vdash \Delta$ *en* LK*-utledning.*



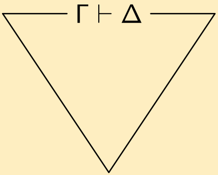
Definisjon (Mengden av LK-utledninger – β-utvidelse)

Hvis det finnes en LK-*utledning med en løvsekvent* $\Gamma \vdash \Delta$



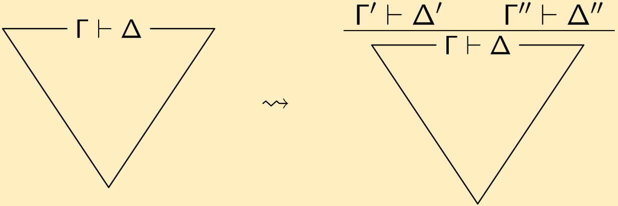
Definisjon (Mengden av LK-utledninger – β-utvidelse)

Hvis det finnes en LK*-utledning med en løvsekvent* $\Gamma \vdash \Delta$ *og en* β*-slutning med konklusjon* $\Gamma \vdash \Delta$ *og premisser* $\Gamma' \vdash \Delta'$ *og* $\Gamma'' \vdash \Delta''$



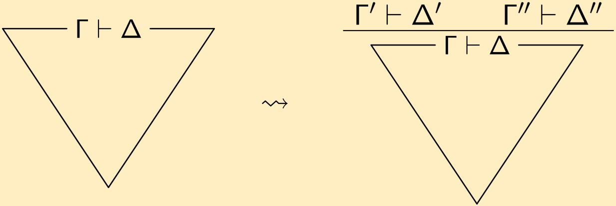
Definisjon (Mengden av LK-utledninger – β-utvidelse)

Hvis det finnes en LK*-utledning med en løvsekvent* $\Gamma \vdash \Delta$ *og en* β*-slutning med konklusjon* $\Gamma \vdash \Delta$ *og premisser* $\Gamma' \vdash \Delta'$ *og* $\Gamma'' \vdash \Delta''$*, så er objektet vi får ved å plassere* $\Gamma' \vdash \Delta'$ *og* $\Gamma'' \vdash \Delta''$ *over* $\Gamma \vdash \Delta$ *en* LK*-utledning.*



Definisjon (Mengden av LK-utledninger – β-utvidelse)

Hvis det finnes en LK*-utledning med en løvsekvent* $\Gamma \vdash \Delta$ *og en* β*-slutning med konklusjon* $\Gamma \vdash \Delta$ *og premisser* $\Gamma' \vdash \Delta'$ *og* $\Gamma'' \vdash \Delta''$*, så er objektet vi får ved å plassere* $\Gamma' \vdash \Delta'$ *og* $\Gamma'' \vdash \Delta''$ *over* $\Gamma \vdash \Delta$ *en* LK*-utledning.*



β-utvidelse gir forgrening i utledningen!

Eksempel (LK-utledninger)

Eksempel (LK-utledninger)

$$\vdash R \vee Q$$

Eksempel (LK-utledninger)

$$\vdash R \lor Q \qquad\qquad P \to Q \vdash \neg Q \to \neg P$$

Eksempel (LK-utledninger)

$\vdash R \lor Q$

$P \to Q \vdash \neg Q \to \neg P$

$\vdash P \to Q$

Eksempel (LK-utledninger)

$\vdash R \vee Q$

$P \rightarrow Q \vdash \neg Q \rightarrow \neg P$

$\vdash P \rightarrow Q$

Eksempel (LK-utledninger)

$$\vdash R \lor Q \qquad\qquad P \rightarrow Q \vdash \neg Q \rightarrow \neg P$$

$$\dfrac{P \;\vdash Q}{\vdash {\color{red}P \rightarrow Q}}\ \mathrm{R}{\rightarrow}$$

Eksempel (LK-utledninger)

$$\vdash R \lor Q \qquad P \to Q \vdash \neg Q \to \neg P$$

$$\dfrac{P \ \vdash Q}{\vdash P \to Q}\,\mathrm{R}{\to} \qquad \vdash P \land P$$

Eksempel (LK-utledninger)

$$\vdash R \vee Q \qquad\qquad P \rightarrow Q \vdash \neg Q \rightarrow \neg P$$

$$\dfrac{P \ \vdash Q}{\vdash P \rightarrow Q}\,\mathrm{R}\!\rightarrow \qquad\qquad \vdash P \wedge P$$

Eksempel (LK-utledninger)

$\vdash R \vee Q$ $\qquad$ $P \to Q \vdash \neg Q \to \neg P$

$$\frac{P \ \vdash Q}{\vdash P \to Q}\ \mathrm{R}{\to} \qquad \frac{\vdash P \qquad \vdash P}{\vdash P \wedge P}\ \mathrm{R}{\wedge}$$

Eksempel (LK-utledninger)

$$\vdash R \vee Q \qquad\qquad P \rightarrow Q \vdash \neg Q \rightarrow \neg P$$

$$\frac{P \;\vdash Q}{\vdash P \rightarrow Q}\,\mathrm{R}{\rightarrow} \qquad \frac{\vdash P \qquad \vdash P}{\vdash P \wedge P}\,\mathrm{R}{\wedge}$$

$$P \vee Q \;\vdash P \wedge Q$$

Eksempel (LK-utledninger)

$$\vdash R \lor Q \qquad\qquad P \to Q \vdash \neg Q \to \neg P$$

$$\dfrac{P \ \vdash Q}{\vdash P \to Q}\,\mathrm{R}{\to} \qquad \dfrac{\vdash P \qquad \vdash P}{\vdash P \land P}\,\mathrm{R}{\land}$$

$$P \lor Q \ \vdash P \land Q$$

Eksempel (LK-utledninger)

$$\vdash R \lor Q \qquad\qquad P \to Q \vdash \neg Q \to \neg P$$

$$\frac{P \ \vdash Q}{\vdash P \to Q}\ \mathrm{R}{\to} \qquad \frac{\vdash P \qquad \vdash P}{\vdash P \land P}\ \mathrm{R}{\land}$$

$$\frac{P \ \vdash P \land Q \qquad\qquad Q \ \vdash P \land Q}{P \lor Q \ \vdash P \land Q}\ \mathrm{L}{\lor}$$

Eksempel (LK-utledninger)

$$\vdash R \lor Q \qquad\qquad P \to Q \vdash \neg Q \to \neg P$$

$$\dfrac{P \vdash Q}{\vdash P \to Q}\ \mathrm{R}{\to} \qquad \dfrac{\vdash P \qquad \vdash P}{\vdash P \land P}\ \mathrm{R}{\land}$$

$$\dfrac{P \vdash P \land Q \qquad\qquad Q \vdash P \land Q}{P \lor Q \vdash P \land Q}\ \mathrm{L}{\lor}$$

Eksempel (LK-utledninger)

$$\vdash R \lor Q \qquad\qquad P \to Q \vdash \neg Q \to \neg P$$

$$\dfrac{P \ \vdash Q}{\vdash P \to Q}\,\mathrm{R}{\to} \qquad \dfrac{\vdash P \qquad \vdash P}{\vdash P \land P}\,\mathrm{R}{\land}$$

$$\dfrac{\dfrac{P \ \vdash P \qquad P \ \vdash Q}{P \ \vdash \color{red}{P \land Q}}\,\mathrm{R}{\land} \qquad Q \ \vdash P \land Q}{P \lor Q \ \vdash P \land Q}\,\mathrm{L}{\lor}$$

Eksempel (LK-utledninger)

$$\vdash R \vee Q \qquad\qquad P \rightarrow Q \vdash \neg Q \rightarrow \neg P$$

$$\dfrac{P \ \vdash Q}{\vdash P \rightarrow Q}\ \mathrm{R}{\rightarrow} \qquad \dfrac{\vdash P \qquad \vdash P}{\vdash P \wedge P}\ \mathrm{R}\wedge$$

$$\dfrac{\dfrac{P \ \vdash P \qquad P \ \vdash Q}{P \ \vdash P \wedge Q}\ \mathrm{R}\wedge \qquad Q \ \vdash {\color{red}P \wedge Q}}{P \vee Q \ \vdash P \wedge Q}\ \mathrm{L}\vee$$

Eksempel (LK-utledninger)

$$\vdash R \lor Q \qquad\qquad P \to Q \vdash \neg Q \to \neg P$$

$$\dfrac{P \ \vdash Q}{\vdash P \to Q}\,\mathrm{R}{\to} \qquad \dfrac{\vdash P \qquad \vdash P}{\vdash P \land P}\,\mathrm{R}{\land}$$

$$\dfrac{\dfrac{P \ \vdash P \qquad P \ \vdash Q}{P \ \vdash P \land Q}\,\mathrm{R}{\land} \qquad \dfrac{Q \ \vdash P \qquad Q \ \vdash Q}{Q \ \vdash \color{red}{P \land Q}}\,\mathrm{R}{\land}}{P \lor Q \ \vdash P \land Q}\,\mathrm{L}{\lor}$$

Eksempel (LK-utledninger)

$$\vdash R \vee Q \qquad\qquad P \to Q \vdash \neg Q \to \neg P$$

$$\dfrac{P \;\vdash\; Q}{\vdash\; P \to Q}\,\mathrm{R}{\to} \qquad \dfrac{\vdash P \qquad \vdash P}{\vdash P \wedge P}\,\mathrm{R}\wedge$$

$$\dfrac{\dfrac{P \;\vdash\; P \qquad P \;\vdash\; Q}{P \;\vdash\; P \wedge Q}\,\mathrm{R}\wedge \qquad \dfrac{Q \;\vdash\; P \qquad Q \;\vdash\; Q}{Q \;\vdash\; P \wedge Q}\,\mathrm{R}\wedge}{P \vee Q \;\vdash\; P \wedge Q}\,\mathrm{L}\vee$$

LK-bevis

Definisjon (LK-bevis)

Et LK-*bevis er en* LK-*utledning der alle løvsekventene er aksiomer.*

LK-bevis

Definisjon (LK-bevis)

Et LK-bevis er en LK-utledning der alle løvsekventene er aksiomer.

Definisjon (LK-bevisbar)

En sekvent $\Gamma \vdash \Delta$ er LK-bevisbar hvis det finnes et LK-bevis med $\Gamma \vdash \Delta$ som rotsekvent.

Eksempel (LK-bevis)

Eksempel (LK-bevis)

$$\vdash P \rightarrow P$$

Eksempel (LK-bevis)

$$\vdash P \to P$$

Eksempel (LK-bevis)

$$\dfrac{P \;\vdash\; P}{\vdash\; P \rightarrow P}\;\mathrm{R}{\rightarrow}$$

Eksempel (LK-bevis)

$$\dfrac{P \vdash P}{\vdash P \rightarrow P}\ \mathrm{R}{\rightarrow}$$

Eksempel (LK-bevis)

$$\dfrac{\dfrac{\times}{P \vdash P}}{\vdash P \rightarrow P}\ \mathrm{R}{\rightarrow}$$

Eksempel (LK-bevis)

$$\dfrac{\dfrac{\times}{P \ \vdash P}}{\vdash P \rightarrow P}\ \mathrm{R}{\rightarrow}$$

$$P \rightarrow Q \ \vdash \neg Q \rightarrow \neg P$$

Eksempel (LK-bevis)

$$\dfrac{\dfrac{\times}{P \vdash P}}{\vdash P \rightarrow P}\ \mathrm{R}{\rightarrow}$$

$$P \rightarrow Q \vdash \neg Q \rightarrow \neg P$$

Eksempel (LK-bevis)

$$\dfrac{\dfrac{\times}{P \;\vdash\; P}}{\vdash\; P \rightarrow P}\;\mathsf{R}{\rightarrow}$$

$$\dfrac{\vdash\; P, \neg Q \rightarrow \neg P \qquad\qquad Q \;\vdash\; \neg Q \rightarrow \neg P}{\color{red}{P \rightarrow Q} \;\vdash\; \neg Q \rightarrow \neg P}\;\mathsf{L}{\rightarrow}$$

Eksempel (LK-bevis)

$$\dfrac{\dfrac{\times}{P \vdash P}}{\vdash P \rightarrow P}\ \mathsf{R}{\rightarrow}$$

$$\dfrac{\vdash P, \color{red}{\neg Q \rightarrow \neg P} \qquad\qquad Q \vdash \neg Q \rightarrow \neg P}{P \rightarrow Q \vdash \neg Q \rightarrow \neg P}\ \mathsf{L}{\rightarrow}$$

Eksempel (LK-bevis)

$$\dfrac{\dfrac{\times}{P \vdash P}}{\vdash P \rightarrow P}\,R{\rightarrow}$$

$$\dfrac{\dfrac{\neg Q \vdash \neg P, P}{\vdash P, \color{red}{\neg Q \rightarrow \neg P}}\,R{\rightarrow} \qquad Q \vdash \neg Q \rightarrow \neg P}{P \rightarrow Q \vdash \neg Q \rightarrow \neg P}\,L{\rightarrow}$$

Eksempel (LK-bevis)

$$\dfrac{\dfrac{\times}{P \vdash P}}{\vdash P \to P}\ \mathrm{R}{\to}$$

$$\dfrac{\dfrac{\neg Q \vdash {\color{red}\neg P}, P}{\vdash P, \neg Q \to \neg P}\ \mathrm{R}{\to} \qquad Q \vdash \neg Q \to \neg P}{P \to Q \vdash \neg Q \to \neg P}\ \mathrm{L}{\to}$$

Eksempel (LK-bevis)

$$\dfrac{\dfrac{\times}{P \;\vdash\; P}}{\vdash\; P \to P}\,\mathrm{R}{\to}$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg Q, P \;\vdash\; P}{\neg Q \;\vdash\; \color{red}{\neg P}, P}\,\mathrm{R}\neg}{\vdash\; P, \neg Q \to \neg P}\,\mathrm{R}{\to} \qquad Q \;\vdash\; \neg Q \to \neg P}{P \to Q \;\vdash\; \neg Q \to \neg P}\,\mathrm{L}{\to}$$

Eksempel (LK-bevis)

$$\dfrac{\overset{\times}{P \vdash P}}{\vdash P \rightarrow P}\ \mathrm{R}{\rightarrow}$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg Q, \color{red}{P} \vdash \color{red}{P}}{\neg Q \vdash \neg P, P}\ \mathrm{R}\neg}{\vdash P, \neg Q \rightarrow \neg P}\ \mathrm{R}{\rightarrow} \qquad Q \vdash \neg Q \rightarrow \neg P}{P \rightarrow Q \vdash \neg Q \rightarrow \neg P}\ \mathrm{L}{\rightarrow}$$

Eksempel (LK-bevis)

$$\dfrac{\dfrac{\times}{P \vdash P}}{\vdash P \rightarrow P}\,\mathsf{R}{\rightarrow}$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\times}{\neg Q, P \vdash P}}{\neg Q \vdash \neg P, P}\,\mathsf{R}\neg}{\vdash P, \neg Q \rightarrow \neg P}\,\mathsf{R}{\rightarrow} \qquad Q \vdash \neg Q \rightarrow \neg P}{P \rightarrow Q \vdash \neg Q \rightarrow \neg P}\,\mathsf{L}{\rightarrow}$$

Eksempel (LK-bevis)

$$\dfrac{\overset{\times}{P \vdash P}}{\vdash P \rightarrow P}\ \mathrm{R}\!\rightarrow$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{\times}{\neg Q, P \vdash P}}{\neg Q \vdash \neg P, P}\ \mathrm{R}\neg}{\vdash P, \neg Q \rightarrow \neg P}\ \mathrm{R}\!\rightarrow \qquad Q \vdash {\color{red}\neg Q \rightarrow \neg P}}{P \rightarrow Q \vdash \neg Q \rightarrow \neg P}\ \mathrm{L}\!\rightarrow$$

Eksempel (LK-bevis)

$$\dfrac{\overset{\times}{P \vdash P}}{\vdash P \to P}\ \mathrm{R}{\to}$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{\times}{\neg Q, P \vdash P}}{\neg Q \vdash \neg P, P}\ \mathrm{R}\neg}{\vdash P, \neg Q \to \neg P}\ \mathrm{R}{\to} \qquad \dfrac{Q, \neg Q \vdash \neg P}{Q \vdash \textcolor{red}{\neg Q \to \neg P}}\ \mathrm{R}{\to}}{P \to Q \vdash \neg Q \to \neg P}\ \mathrm{L}{\to}$$

Eksempel (LK-bevis)

$$\dfrac{\dfrac{\times}{P \vdash P}}{\vdash P \rightarrow P}\ \mathrm{R}{\rightarrow}$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\times}{\neg Q, P \vdash P}}{\neg Q \vdash \neg P, P}\ \mathrm{R}\neg}{\vdash P, \neg Q \rightarrow \neg P}\ \mathrm{R}{\rightarrow} \qquad \dfrac{Q, \color{red}{\neg Q} \vdash \neg P}{Q \vdash \neg Q \rightarrow \neg P}\ \mathrm{R}{\rightarrow}}{P \rightarrow Q \vdash \neg Q \rightarrow \neg P}\ \mathrm{L}{\rightarrow}$$

Eksempel (LK-bevis)

$$\dfrac{\dfrac{\times}{P \vdash P}}{\vdash P \to P}\ \mathrm{R}{\to}$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\times}{\neg Q, P \vdash P}}{\neg Q \vdash \neg P, P}\ \mathrm{R}\neg}{\vdash P, \neg Q \to \neg P}\ \mathrm{R}{\to} \qquad \dfrac{\dfrac{Q \vdash Q, \neg P}{Q, {\color{red}\neg Q} \vdash \neg P}\ \mathrm{L}\neg}{Q \vdash \neg Q \to \neg P}\ \mathrm{R}{\to}}{P \to Q \vdash \neg Q \to \neg P}\ \mathrm{L}{\to}$$

Eksempel (LK-bevis)

$$\dfrac{\overset{\times}{P \vdash P}}{\vdash P \to P}\ \mathrm{R}{\to}$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{\times}{\neg Q, P \vdash P}}{\neg Q \vdash \neg P, P}\ \mathrm{R}\neg}{\vdash P, \neg Q \to \neg P}\ \mathrm{R}{\to} \qquad \dfrac{\dfrac{{\color{red}Q} \vdash {\color{red}Q}, \neg P}{Q, \neg Q \vdash \neg P}\ \mathrm{L}\neg}{Q \vdash \neg Q \to \neg P}\ \mathrm{R}{\to}}{P \to Q \vdash \neg Q \to \neg P}\ \mathrm{L}{\to}$$

Eksempel (LK-bevis)

$$\cfrac{\overset{\times}{P \vdash P}}{\vdash P \to P}\ \mathrm{R}{\to}$$

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\overset{\times}{\neg Q, P \vdash P}}{\neg Q \vdash \neg P, P}\ \mathrm{R}\neg}{\vdash P, \neg Q \to \neg P}\ \mathrm{R}{\to} \qquad \cfrac{\cfrac{\overset{\times}{Q \vdash Q, \neg P}}{Q, \neg Q \vdash \neg P}\ \mathrm{L}\neg}{Q \vdash \neg Q \to \neg P}\ \mathrm{R}{\to}}{P \to Q \vdash \neg Q \to \neg P}\ \mathrm{L}{\to}$$

Eksempel (LK-bevis)

$$\dfrac{\overset{\times}{P \vdash P}}{\vdash P \to P}\ \mathrm{R}{\to}$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{\times}{\neg Q, P \vdash P}}{\neg Q \vdash \neg P, P}\ \mathrm{R}\neg}{\vdash P, \neg Q \to \neg P}\ \mathrm{R}{\to} \qquad \dfrac{\dfrac{\overset{\times}{Q \vdash Q, \neg P}}{Q, \neg Q \vdash \neg P}\ \mathrm{L}\neg}{Q \vdash \neg Q \to \neg P}\ \mathrm{R}{\to}}{P \to Q \vdash \neg Q \to \neg P}\ \mathrm{L}{\to}$$

- *Sekventene* $\vdash P \to P$ *og* $P \to Q \vdash \neg Q \to \neg P$ *er bevisbare, siden det finnes* LK-*bevis med disse sekventene som rotsekvent.*

Eksempel (LK-bevis)

$$\dfrac{\dfrac{\times}{P \vdash P}}{\vdash P \to P}\ \mathsf{R}{\to}$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\times}{\neg Q, P \vdash P}}{\neg Q \vdash \neg P, P}\ \mathsf{R}\neg}{\vdash P, \neg Q \to \neg P}\ \mathsf{R}{\to} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\times}{Q \vdash Q, \neg P}}{Q, \neg Q \vdash \neg P}\ \mathsf{L}\neg}{Q \vdash \neg Q \to \neg P}\ \mathsf{R}{\to}}{P \to Q \vdash \neg Q \to \neg P}\ \mathsf{L}{\to}$$

- *Sekventene* $\vdash P \to P$ *og* $P \to Q \vdash \neg Q \to \neg P$ *er bevisbare, siden det finnes* LK-*bevis med disse sekventene som rotsekvent.*

Merk: symbolet '$\times$' er ikke en del av kalkylen, men et hjelpesymbol vi bruker for å markere at en gren er lukket.