INF3170 – Logikk

Forelesning 3: Utsagnslogikk – sekventkalkyle, sunnhet og kompletthet

Christian Mahesh Hansen

Institutt for informatikk, Universitetet i Oslo

5. februar 2007

Dagens plan

1. Sekventkalkyle
2. Sunnhet
3. Kompletthet
4. Egenskaper ved utsagnslogikk

Semantikk for sekventer

Definisjon (Gyldig sekvent)

En sekvent $\Gamma \vdash \Delta$ *er* *gyldig* *hvis alle valuasjoner som oppfyller alle formlene i* Γ *også oppfyller minst én formel i* Δ.

Semantikk for sekventer

Definisjon (Gyldig sekvent)

En sekvent $\Gamma \vdash \Delta$ *er gyldig hvis alle valuasjoner som oppfyller alle formlene i* Γ *også oppfyller minst én formel i* Δ.

Eksempel

Følgende sekventer er gyldige:

- $P \vdash P$

Semantikk for sekventer

Definisjon (Gyldig sekvent)

En sekvent $\Gamma \vdash \Delta$ *er gyldig hvis alle valuasjoner som oppfyller alle formlene i* Γ *også oppfyller minst én formel i* Δ.

Eksempel

Følgende sekventer er gyldige:

- $P \vdash P$
- $P \rightarrow Q \vdash P \rightarrow Q$

Semantikk for sekventer

Definisjon (Gyldig sekvent)

En sekvent $\Gamma \vdash \Delta$ *er gyldig hvis alle valuasjoner som oppfyller alle formlene i* Γ *også oppfyller minst én formel i* Δ.

Eksempel

Følgende sekventer er gyldige:

- $P \vdash P$
- $P \rightarrow Q \vdash P \rightarrow Q$
- $P, P \rightarrow Q \vdash Q$

Semantikk for sekventer

Definisjon (Gyldig sekvent)

En sekvent $\Gamma \vdash \Delta$ er gyldig hvis alle valuasjoner som oppfyller alle formlene i Γ også oppfyller minst én formel i Δ.

Eksempel

Følgende sekventer er gyldige:

- $P \vdash P$
- $P \rightarrow Q \vdash P \rightarrow Q$
- $P, P \rightarrow Q \vdash Q$
- $P \rightarrow Q \vdash \neg Q \rightarrow \neg P$

Definisjon (Motmodell/falsifiserbar sekvent)

- *En valuasjon v er en motmodell til sekventen $\Gamma \vdash \Delta$ hvis v oppfyller alle formlene i Γ og falsifiserer alle formlene i Δ.*

Definisjon (Motmodell/falsifiserbar sekvent)

- *En valuasjon v er en* ***motmodell*** *til sekventen $\Gamma \vdash \Delta$ hvis v oppfyller alle formlene i Γ og falsifiserer alle formlene i Δ.*
- *Vi sier at en motmodell til en sekvent* ***falsifiserer*** *sekventen.*

Definisjon (Motmodell/falsifiserbar sekvent)

- *En valuasjon v er en motmodell til sekventen $\Gamma \vdash \Delta$ hvis v oppfyller alle formlene i Γ og falsifiserer alle formlene i Δ.*
- *Vi sier at en motmodell til en sekvent falsifiserer sekventen.*
- *En sekvent er falsifiserbar hvis den har en motmodell.*

Definisjon (Motmodell/falsifiserbar sekvent)

- *En valuasjon v er en motmodell til sekventen $\Gamma \vdash \Delta$ hvis v oppfyller alle formlene i Γ og falsifiserer alle formlene i Δ.*
- *Vi sier at en motmodell til en sekvent falsifiserer sekventen.*
- *En sekvent er falsifiserbar hvis den har en motmodell.*

Eksempel

Følgende sekventer er falsifiserbare:

- $P \vdash Q$

Definisjon (Motmodell/falsifiserbar sekvent)

- *En valuasjon v er en motmodell til sekventen $\Gamma \vdash \Delta$ hvis v oppfyller alle formlene i Γ og falsifiserer alle formlene i Δ.*
- *Vi sier at en motmodell til en sekvent falsifiserer sekventen.*
- *En sekvent er falsifiserbar hvis den har en motmodell.*

Eksempel

Følgende sekventer er falsifiserbare:

- $P \vdash Q$ *Motmodell:* $v(P) = \mathbf{1}, v(Q) = \mathbf{0}$

Definisjon (Motmodell/falsifiserbar sekvent)

- *En valuasjon v er en motmodell til sekventen $\Gamma \vdash \Delta$ hvis v oppfyller alle formlene i Γ og falsifiserer alle formlene i Δ.*
- *Vi sier at en motmodell til en sekvent falsifiserer sekventen.*
- *En sekvent er falsifiserbar hvis den har en motmodell.*

Eksempel

Følgende sekventer er falsifiserbare:

- $P \vdash Q$ *Motmodell:* $v(P) = \mathbf{1}, v(Q) = \mathbf{0}$
- $P \lor Q \vdash P \land Q$

Definisjon (Motmodell/falsifiserbar sekvent)

- *En valuasjon v er en motmodell til sekventen $\Gamma \vdash \Delta$ hvis v oppfyller alle formlene i Γ og falsifiserer alle formlene i Δ.*
- *Vi sier at en motmodell til en sekvent falsifiserer sekventen.*
- *En sekvent er falsifiserbar hvis den har en motmodell.*

Eksempel

Følgende sekventer er falsifiserbare:

- $P \vdash Q$ *Motmodell:* $v(P) = \mathbf{1}, v(Q) = \mathbf{0}$
- $P \lor Q \vdash P \land Q$ *Motmodell: som over eller* $v(P) = \mathbf{0}, v(Q) = \mathbf{1}$

Definisjon (Motmodell/falsifiserbar sekvent)

- *En valuasjon v er en* motmodell *til sekventen $\Gamma \vdash \Delta$ hvis v oppfyller alle formlene i Γ og falsifiserer alle formlene i Δ.*
- *Vi sier at en motmodell til en sekvent* falsifiserer *sekventen.*
- *En sekvent er* falsifiserbar *hvis den har en motmodell.*

Eksempel

Følgende sekventer er falsifiserbare:

- $P \vdash Q$ *Motmodell:* $v(P) = \mathbf{1}, v(Q) = \mathbf{0}$
- $P \vee Q \vdash P \wedge Q$ *Motmodell: som over eller* $v(P) = \mathbf{0}, v(Q) = \mathbf{1}$
- $\vdash P$

Definisjon (Motmodell/falsifiserbar sekvent)

- *En valuasjon v er en motmodell til sekventen $\Gamma \vdash \Delta$ hvis v oppfyller alle formlene i Γ og falsifiserer alle formlene i Δ.*
- *Vi sier at en motmodell til en sekvent falsifiserer sekventen.*
- *En sekvent er falsifiserbar hvis den har en motmodell.*

Eksempel

Følgende sekventer er falsifiserbare:

- $P \vdash Q$ *Motmodell:* $v(P) = \mathbf{1}, v(Q) = \mathbf{0}$
- $P \vee Q \vdash P \wedge Q$ *Motmodell: som over eller* $v(P) = \mathbf{0}, v(Q) = \mathbf{1}$
- $\vdash P$ *Motmodell:* $v(P) = \mathbf{0}$

Definisjon (Motmodell/falsifiserbar sekvent)

- *En valuasjon v er en motmodell til sekventen $\Gamma \vdash \Delta$ hvis v oppfyller alle formlene i Γ og falsifiserer alle formlene i Δ.*
- *Vi sier at en motmodell til en sekvent falsifiserer sekventen.*
- *En sekvent er falsifiserbar hvis den har en motmodell.*

Eksempel

Følgende sekventer er falsifiserbare:

- $P \vdash Q$ — *Motmodell:* $v(P) = \mathbf{1}, v(Q) = \mathbf{0}$
- $P \lor Q \vdash P \land Q$ — *Motmodell: som over eller* $v(P) = \mathbf{0}, v(Q) = \mathbf{1}$
- $\vdash P$ — *Motmodell:* $v(P) = \mathbf{0}$
- $P \vdash$

Definisjon (Motmodell/falsifiserbar sekvent)

- *En valuasjon v er en motmodell til sekventen $\Gamma \vdash \Delta$ hvis v oppfyller alle formlene i Γ og falsifiserer alle formlene i Δ.*
- *Vi sier at en motmodell til en sekvent falsifiserer sekventen.*
- *En sekvent er falsifiserbar hvis den har en motmodell.*

Eksempel

Følgende sekventer er falsifiserbare:

- $P \vdash Q$ — *Motmodell:* $v(P) = \mathbf{1}, v(Q) = \mathbf{0}$
- $P \lor Q \vdash P \land Q$ — *Motmodell: som over eller* $v(P) = \mathbf{0}, v(Q) = \mathbf{1}$
- $\vdash P$ — *Motmodell:* $v(P) = \mathbf{0}$
- $P \vdash$ — *Motmodell:* $v(P) = \mathbf{1}$

Definisjon (Motmodell/falsifiserbar sekvent)

- *En valuasjon v er en motmodell til sekventen $\Gamma \vdash \Delta$ hvis v oppfyller alle formlene i Γ og falsifiserer alle formlene i Δ.*
- *Vi sier at en motmodell til en sekvent falsifiserer sekventen.*
- *En sekvent er falsifiserbar hvis den har en motmodell.*

Eksempel

Følgende sekventer er falsifiserbare:

- $P \vdash Q$ *Motmodell:* $v(P) = \mathbf{1}, v(Q) = \mathbf{0}$
- $P \lor Q \vdash P \land Q$ *Motmodell: som over eller* $v(P) = \mathbf{0}, v(Q) = \mathbf{1}$
- $\vdash P$ *Motmodell:* $v(P) = \mathbf{0}$
- $P \vdash$ *Motmodell:* $v(P) = \mathbf{1}$
- $\vdash$

Definisjon (Motmodell/falsifiserbar sekvent)

- *En valuasjon v er en motmodell til sekventen $\Gamma \vdash \Delta$ hvis v oppfyller alle formlene i Γ og falsifiserer alle formlene i Δ.*
- *Vi sier at en motmodell til en sekvent falsifiserer sekventen.*
- *En sekvent er falsifiserbar hvis den har en motmodell.*

Eksempel

Følgende sekventer er falsifiserbare:

- $P \vdash Q$ — *Motmodell:* $v(P) = \mathbf{1}, v(Q) = \mathbf{0}$
- $P \lor Q \vdash P \land Q$ — *Motmodell: som over eller* $v(P) = \mathbf{0}, v(Q) = \mathbf{1}$
- $\vdash P$ — *Motmodell:* $v(P) = \mathbf{0}$
- $P \vdash$ — *Motmodell:* $v(P) = \mathbf{1}$
- $\vdash$ — *Motmodell: alle modeller!*

Oppsummering

Gyldig

- $P, P \rightarrow Q \vdash Q$
- Hvis $v \models P$ og $v \models P \rightarrow Q$, så $v \models Q$.

Oppsummering

Gyldig

- $P, P \rightarrow Q \vdash Q$
- Hvis $v \models P$ og $v \models P \rightarrow Q$, så $v \models Q$.

Bevisbar

$$\dfrac{\underset{P \vdash P}{\times} \qquad \underset{Q \vdash Q}{\times}}{P, P \rightarrow Q \vdash Q}$$

Oppsummering

Gyldig

- $P, P \rightarrow Q \vdash Q$
- Hvis $v \models P$ og $v \models P \rightarrow Q$, så $v \models Q$.

Bevisbar

$$\dfrac{\dfrac{\times}{P \vdash P} \qquad \dfrac{\times}{Q \vdash Q}}{P, P \rightarrow Q \vdash Q}$$

Falsifiserbar

- $\neg P, P \rightarrow Q \vdash \neg Q$
- En valuasjon v slik at $v \not\models P$ og $v \models Q$.

Oppsummering

Gyldig

- $P, P \to Q \vdash Q$
- Hvis $v \models P$ og $v \models P \to Q$, så $v \models Q$.

Bevisbar

$$\dfrac{\dfrac{\times}{P \vdash P} \qquad \dfrac{\times}{Q \vdash Q}}{P, P \to Q \vdash Q}$$

Falsifiserbar

- $\neg P, P \to Q \vdash \neg Q$
- En valuasjon v slik at $v \not\models P$ og $v \models Q$.

Ikke bevisbar

$$\dfrac{\dfrac{\vdash P, P}{\neg P \vdash P} \qquad \dfrac{Q, Q \vdash}{Q \vdash \neg Q}}{\neg P, P \to Q \vdash \neg Q}$$

Sunnhet av LK

- Vi ønsker at alle LK-bevisbare sekventer skal være gyldige!

Sunnhet av LK

- Vi ønsker at alle LK-bevisbare sekventer skal være gyldige!
- Hvis ikke, så er LK ukorrekt eller usunn . . .

Sunnhet av LK

- Vi ønsker at alle LK-bevisbare sekventer skal være gyldige!
- Hvis ikke, så er LK ukorrekt eller usunn ...

Definisjon (Sunnhet)

Sekventkalkylen LK *er sunn hvis enhver* LK*-bevisbar sekvent er gyldig.*

Sunnhet av LK

- Vi ønsker at alle LK-bevisbare sekventer skal være gyldige!
- Hvis ikke, så er LK ukorrekt eller usunn ...

Definisjon (Sunnhet)

Sekventkalkylen LK *er sunn hvis enhver* LK*-bevisbar sekvent er gyldig.*

Teorem

Sekventkalkylen LK *er sunn.*

Sunnhet av LK

- Vi ønsker at alle LK-bevisbare sekventer skal være gyldige!
- Hvis ikke, så er LK ukorrekt eller usunn ...

Definisjon (Sunnhet)

Sekventkalkylen LK *er sunn hvis enhver* LK*-bevisbar sekvent er gyldig.*

Teorem

Sekventkalkylen LK *er sunn.*

Sunnhetsteoremet sikrer oss at LK er en korrekt kalkyle.

Hvordan vise sunnhetsteoremet?

Hvordan vise sunnhetsteoremet?

Vi viser følgende lemmaer:

Hvordan vise sunnhetsteoremet?

Vi viser følgende lemmaer:

1. Alle LK-reglene bevarer falsifiserbarhet oppover.

Hvordan vise sunnhetsteoremet?

Vi viser følgende lemmaer:

1. Alle LK-reglene bevarer falsifiserbarhet oppover.
2. En LK-utledning med falsifiserbar rotsekvent har minst én falsifiserbar løvsekvent.

Hvordan vise sunnhetsteoremet?

Vi viser følgende lemmaer:

1. Alle LK-reglene bevarer falsifiserbarhet oppover.
2. En LK-utledning med falsifiserbar rotsekvent har minst én falsifiserbar løvsekvent.
3. Alle aksiomer er gyldige.

Hvordan vise sunnhetsteoremet?

Vi viser følgende lemmaer:

1. Alle LK-reglene bevarer falsifiserbarhet oppover.
2. En LK-utledning med falsifiserbar rotsekvent har minst én falsifiserbar løvsekvent.
3. Alle aksiomer er gyldige.

Til slutt vises sunnhetsteoremet ved hjelp av lemmaene.

Hvordan vise sunnhetsteoremet?

Vi viser følgende lemmaer:

1. Alle LK-reglene bevarer falsifiserbarhet oppover.
2. En LK-utledning med falsifiserbar rotsekvent har minst én falsifiserbar løvsekvent.
3. Alle aksiomer er gyldige.

Til slutt vises sunnhetsteoremet ved hjelp av lemmaene.

Definisjon

En LK-*regel* θ *er falsifiserbarhetsbevarende (oppover) hvis alle valuasjoner som falsifiserer konklusjonen i en* θ*-slutning også falsifiserer minst ett av premissene i slutningen.*

Definisjon

En LK*-regel* θ *er falsifiserbarhetsbevarende (oppover) hvis alle valuasjoner som falsifiserer konklusjonen i en* θ*-slutning også falsifiserer minst ett av premissene i slutningen.*

Lemma

Alle LK*-reglene er falsifiserbarhetsbevarende.*

- Vi får ett delbevis for hver LK-regel.

- Vi får ett delbevis for hver LK-regel.
- Se på f.eks. L$\rightarrow$-regelen:

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta \qquad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \rightarrow B \vdash \Delta}\ \mathsf{L}{\rightarrow}$$

- Vi får ett delbevis for hver LK-regel.
- Se på f.eks. L→-regelen:

$$\frac{\Gamma \ \vdash A, \Delta \qquad \Gamma, B \ \vdash \Delta}{\Gamma, A \rightarrow B \ \vdash \Delta} \, \mathsf{L}{\rightarrow}$$

- I delbeviset for L→ må vi vise at alle L→-slutninger bevarer falsifiserbarhet oppover.

- Vi får ett delbevis for hver LK-regel.
- Se på f.eks. L→-regelen:

$$\frac{\Gamma \;\vdash A, \Delta \qquad \Gamma, B \;\vdash \Delta}{\Gamma, A \rightarrow B \;\vdash \Delta}\,\mathsf{L}\rightarrow$$

- I delbeviset for L→ må vi vise at alle L→-slutninger bevarer falsifiserbarhet oppover.
- Regelen L→ generaliserer alle L→-slutninger.

- Vi får ett delbevis for hver LK-regel.
- Se på f.eks. L$\rightarrow$-regelen:

$$\frac{\Gamma \ \vdash A, \Delta \qquad \Gamma, B \ \vdash \Delta}{\Gamma, A \rightarrow B \ \vdash \Delta} \, \mathsf{L}{\rightarrow}$$

- I delbeviset for L$\rightarrow$ må vi vise at alle L$\rightarrow$-slutninger bevarer falsifiserbarhet oppover.
- Regelen L$\rightarrow$ generaliserer alle L$\rightarrow$-slutninger.
- Vi lar Γ, Δ, A og B i regelen stå for vilkårlige (multimengder av) utsagnslogiske formler og viser på den måten at alle L$\rightarrow$-slutninger bevarer falsifiserbarhet.

Bevis for R¬.

$$\frac{\Gamma, A \ \vdash \Delta}{\Gamma \ \vdash \neg A, \Delta}\, \mathrm{R}\neg$$

□

Bevis for R¬.

$$\frac{\Gamma, A \ \vdash \Delta}{\Gamma \ \vdash \neg A, \Delta}\ \mathrm{R}\neg$$

- Anta at v falsifiserer konklusjonen.

$\square$

Bevis for R¬.

$$\frac{\Gamma, A \;\vdash \Delta}{\color{red}{\Gamma} \;\vdash \neg A, \Delta}\ \mathrm{R}\neg$$

- Anta at v falsifiserer konklusjonen.
- Det betyr at $v \models \Gamma$

□

Bevis for R¬.

$$\frac{\Gamma, A \ \vdash \Delta}{\Gamma \ \vdash \neg A, \Delta} \text{R}\neg$$

- Anta at v falsifiserer konklusjonen.
- Det betyr at $v \models \Gamma$, $v \not\models \neg A$

□

Bevis for R¬.

$$\frac{\Gamma, A \ \vdash \Delta}{\Gamma \ \vdash \neg A, {\color{red}\Delta}}\ \mathrm{R}\neg$$

- Anta at v falsifiserer konklusjonen.
- Det betyr at $v \models \Gamma$, $v \not\models \neg A$ og v falsifiserer alle formlene i Δ.

□

Bevis for R¬.

$$\frac{\Gamma, A \ \vdash \Delta}{\Gamma \ \vdash \neg A, \Delta}\,\mathrm{R}\neg$$

- Anta at v falsifiserer konklusjonen.
- Det betyr at $v \models \Gamma$, $v \not\models \neg A$ og v falsifiserer alle formlene i Δ.
- Pr. definisjon av v har vi at $v \models A$.

$\square$

Bevis for R¬.

$$\frac{\Gamma, A \ \vdash \Delta}{\Gamma \ \vdash \neg A, \Delta}\ \mathrm{R}\neg$$

- Anta at v falsifiserer konklusjonen.
- Det betyr at $v \models \Gamma$, $v \not\models \neg A$ og v falsifiserer alle formlene i Δ.
- Pr. definisjon av v har vi at $v \models A$.
- Vi har da at $v \models \Gamma \cup \{A\}$

$\square$

Bevis for R¬.

$$\frac{\Gamma, A \ \vdash \Delta}{\Gamma \ \vdash \neg A, \Delta}\,\mathrm{R}\neg$$

- Anta at v falsifiserer konklusjonen.
- Det betyr at $v \models \Gamma$, $v \not\models \neg A$ og v falsifiserer alle formlene i Δ.
- Pr. definisjon av v har vi at $v \models A$.
- Vi har da at $v \models \Gamma \cup \{A\}$ og v falsifiserer alle formlene i Δ.

$\square$

Bevis for R¬.

$$\frac{\Gamma, A \ \vdash \Delta}{\Gamma \ \vdash \neg A, \Delta}\ \mathrm{R}\neg$$

- Anta at v falsifiserer konklusjonen.
- Det betyr at $v \models \Gamma$, $v \not\models \neg A$ og v falsifiserer alle formlene i Δ.
- Pr. definisjon av v har vi at $v \models A$.
- Vi har da at $v \models \Gamma \cup \{A\}$ og v falsifiserer alle formlene i Δ.
- Da falsifiserer v premisset.

$\square$

Bevis for L→.

$$\frac{\Gamma \ \vdash A, \Delta \qquad \Gamma, B \ \vdash \Delta}{\Gamma, A \rightarrow B \ \vdash \Delta}\ \mathsf{L}{\rightarrow}$$

□

Bevis for L$\rightarrow$.

$$\frac{\Gamma \ \vdash A, \Delta \qquad \Gamma, B \ \vdash \Delta}{\Gamma, A \rightarrow B \ \vdash \Delta} \, \mathsf{L}{\rightarrow}$$

- Anta at v falsifiserer konklusjonen.

$\square$

Bevis for L→.

$$\frac{\Gamma \ \vdash A, \Delta \qquad \Gamma, B \ \vdash \Delta}{\Gamma, A \rightarrow B \ \vdash \Delta}\ \mathsf{L}{\rightarrow}$$

- Anta at v falsifiserer konklusjonen.
- Det betyr at v oppfyller $\Gamma \cup \{A \rightarrow B\}$

□

Bevis for L→.

$$\frac{\Gamma \ \vdash A, \Delta \qquad \Gamma, B \ \vdash \Delta}{\Gamma, A \rightarrow B \ \vdash \Delta} \ \mathsf{L}{\rightarrow}$$

- Anta at v falsifiserer konklusjonen.
- Det betyr at v oppfyller $\Gamma \cup \{A \rightarrow B\}$ og falsifiserer alle formlene i Δ.

$\square$

Bevis for L→.

$$\frac{\Gamma \ \vdash A, \Delta \qquad \Gamma, B \ \vdash \Delta}{\Gamma, A \rightarrow B \ \vdash \Delta} \, \mathsf{L}{\rightarrow}$$

- Anta at v falsifiserer konklusjonen.
- Det betyr at v oppfyller $\Gamma \cup \{A \rightarrow B\}$ og falsifiserer alle formlene i Δ.
- Siden v oppfyller $A \rightarrow B$

$\square$

Bevis for L→.

$$\frac{\Gamma \ \vdash A, \Delta \qquad \Gamma, B \ \vdash \Delta}{\Gamma, A \rightarrow B \ \vdash \Delta} \ \mathsf{L}{\rightarrow}$$

- Anta at v falsifiserer konklusjonen.
- Det betyr at v oppfyller $\Gamma \cup \{A \rightarrow B\}$ og falsifiserer alle formlene i Δ.
- Siden v oppfyller $A \rightarrow B$, så har vi pr. definisjon av v at

$\square$

Bevis for L$\rightarrow$.

$$\frac{\Gamma \ \vdash A, \Delta \qquad \Gamma, B \ \vdash \Delta}{\Gamma, A \rightarrow B \ \vdash \Delta} \, \mathsf{L}\!\rightarrow$$

- Anta at v falsifiserer konklusjonen.
- Det betyr at v oppfyller $\Gamma \cup \{A \rightarrow B\}$ og falsifiserer alle formlene i Δ.
- Siden v oppfyller $A \rightarrow B$, så har vi pr. definisjon av v at
  (1) $v \not\models A$, eller

$\square$

Bevis for L$\rightarrow$.

$$\frac{\Gamma \ \vdash A, \Delta \qquad \Gamma, B \ \vdash \Delta}{\Gamma, A \rightarrow B \ \vdash \Delta}\ \mathrm{L}\!\rightarrow$$

- Anta at v falsifiserer konklusjonen.
- Det betyr at v oppfyller $\Gamma \cup \{A \rightarrow B\}$ og falsifiserer alle formlene i Δ.
- Siden v oppfyller $A \rightarrow B$, så har vi pr. definisjon av v at
  (1) $v \not\models A$, eller
  (2) $v \models B$.

$\square$

Bevis for L$\rightarrow$.

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta \qquad \Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \rightarrow B \vdash \Delta} \text{L}\rightarrow$$

- Anta at v falsifiserer konklusjonen.
- Det betyr at v oppfyller $\Gamma \cup \{A \rightarrow B\}$ og falsifiserer alle formlene i Δ.
- Siden v oppfyller $A \rightarrow B$, så har vi pr. definisjon av v at
  (1) $v \not\models A$, eller
  (2) $v \models B$.
- Hvis (1), så falsifiserer v venstre premiss.

$\square$

Bevis for L$\rightarrow$.

$$\frac{\Gamma \;\vdash A, \Delta \qquad \Gamma, B \;\vdash \Delta}{\Gamma, A \rightarrow B \;\vdash \Delta}\ \mathsf{L}\!\rightarrow$$

- Anta at v falsifiserer konklusjonen.
- Det betyr at v oppfyller $\Gamma \cup \{A \rightarrow B\}$ og falsifiserer alle formlene i Δ.
- Siden v oppfyller $A \rightarrow B$, så har vi pr. definisjon av v at
  (1) $v \not\models A$, eller
  (2) $v \models B$.
- Hvis (1), så falsifiserer v venstre premiss.
- Hvis (2), så falsifiserer v høyre premiss.

$\square$

Bevis for “for alle”-påstander

- Se på påstanden “for alle $x \in S$: $P(x)$”.

Bevis for “for alle”-påstander

- Se på påstanden “for alle $x \in S$: $P(x)$”.
- Vi kan vise påstanden ved å vise at $P(a)$ for hvert element $a \in S$.

Bevis for "for alle"-påstander

- Se på påstanden "for alle $x \in S$: $P(x)$".
- Vi kan vise påstanden ved å vise at $P(a)$ for hvert element $a \in S$.
- Hva hvis S er svært stor eller uendelig?

Bevis for "for alle"-påstander

- Se på påstanden "for alle $x \in S$: $P(x)$".
- Vi kan vise påstanden ved å vise at $P(a)$ for hvert element $a \in S$.
- Hva hvis S er svært stor eller uendelig?
- Vi kan generalisere fra et vilkårlig element:

Bevis for "for alle"-påstander

- Se på påstanden "for alle $x \in S$: $P(x)$".
- Vi kan vise påstanden ved å vise at $P(a)$ for hvert element $a \in S$.
- Hva hvis S er svært stor eller uendelig?
- Vi kan generalisere fra et vilkårlig element:
  - Velg et vilkårlig element $a \in S$.

Bevis for "for alle"-påstander

- Se på påstanden "for alle $x \in S$: $P(x)$".
- Vi kan vise påstanden ved å vise at $P(a)$ for hvert element $a \in S$.
- Hva hvis S er svært stor eller uendelig?
- Vi kan generalisere fra et vilkårlig element:
  - Velg et vilkårlig element $a \in S$.
  - Vis at $P(a)$ holder.

Bevis for "for alle"-påstander

- Se på påstanden "for alle $x \in S$: $P(x)$".
- Vi kan vise påstanden ved å vise at $P(a)$ for hvert element $a \in S$.
- Hva hvis S er svært stor eller uendelig?
- Vi kan generalisere fra et vilkårlig element:
  - Velg et vilkårlig element $a \in S$.
  - Vis at $P(a)$ holder.
  - Siden a var tilfeldig valgt må påstanden i første linje holde.

Hvordan vise sunnhetsteoremet?

Vi viser følgende lemmaer:

1. Alle LK-reglene bevarer falsifiserbarhet oppover.
2. En LK-utledning med falsifiserbar rotsekvent har minst én falsifiserbar løvsekvent.
3. Alle aksiomer er gyldige.

Til slutt vises sunnhetsteoremet ved hjelp av lemmaene.

Lemma

Hvis en valuasjon v falsifiserer rotsekventen i en LK*-utledning* δ*, så falsifiserer v minst én av løvsekventene i* δ*.*

Lemma

Hvis en valuasjon v falsifiserer rotsekventen i en LK-utledning δ, så falsifiserer v minst én av løvsekventene i δ.

Bevis.

Ved strukturell induksjon på LK-utledningen δ.

□

Lemma

Hvis en valuasjon v falsifiserer rotsekventen i en LK*-utledning δ, så falsifiserer v minst én av løvsekventene i δ.*

Bevis.

Ved strukturell induksjon på LK-utledningen δ.

Basissteg: δ er en sekvent $\Gamma \vdash \Delta$:

$$\Gamma \vdash \Delta$$

$\square$

Lemma

Hvis en valuasjon v falsifiserer rotsekventen i en LK-utledning δ, så falsifiserer v minst én av løvsekventene i δ.

Bevis.

Ved strukturell induksjon på LK-utledningen δ.

Basissteg: δ er en sekvent $\Gamma \vdash \Delta$:

$$\Gamma \vdash \Delta$$

- Her er $\Gamma \vdash \Delta$ både rotsekvent og (eneste) løvsekvent.

□

Lemma

Hvis en valuasjon v falsifiserer rotsekventen i en LK*-utledning δ, så falsifiserer v minst én av løvsekventene i δ.*

Bevis.

Ved strukturell induksjon på LK-utledningen δ.
Basissteg: δ er en sekvent $\Gamma \vdash \Delta$:

$$\Gamma \vdash \Delta$$

- Her er $\Gamma \vdash \Delta$ både rotsekvent og (eneste) løvsekvent.
- Anta at v falsifiserer $\Gamma \vdash \Delta$.

□

Lemma

Hvis en valuasjon v falsifiserer rotsekventen i en LK*-utledning δ, så falsifiserer v minst én av løvsekventene i δ.*

Bevis.

Ved strukturell induksjon på LK-utledningen δ.
Basissteg: δ er en sekvent $\Gamma \vdash \Delta$:

$$\Gamma \vdash \Delta$$

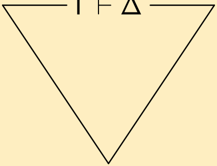
- Her er $\Gamma \vdash \Delta$ både rotsekvent og (eneste) løvsekvent.
- Anta at v falsifiserer $\Gamma \vdash \Delta$.
- Da falsifiserer v én løvsekvent i δ, nemlig $\Gamma \vdash \Delta$.

$\square$

Bevis (induksjonssteg – α-utvidelse).

Induksjonssteg: δ er en utledning på formen

$$\dfrac{\Gamma' \vdash \Delta'}{\Gamma \vdash \Delta}\,\alpha$$



$\square$

Bevis (induksjonssteg – α-utvidelse).

Induksjonssteg: δ er en utledning på formen

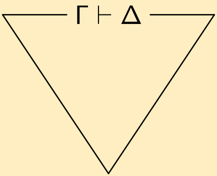
$$\frac{\Gamma' \vdash \Delta'}{\Gamma \vdash \Delta}\,\alpha$$

- Anta at v falsifiserer rotsekventen i δ

□

Bevis (induksjonssteg – α-utvidelse).

Induksjonssteg: δ er en utledning på formen

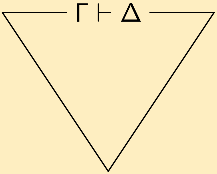


- Anta at v falsifiserer rotsekventen i δ, og anta at v falsifiserer en løvsekvent i utledningen før α-utvidelsen.

$\square$

Bevis (induksjonssteg – α-utvidelse).

Induksjonssteg: δ er en utledning på formen



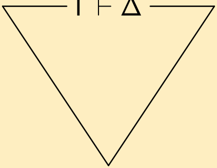
- Anta at v falsifiserer rotsekventen i δ, og anta at v falsifiserer en løvsekvent i utledningen før α-utvidelsen.
- Hvis den falsifiserte løvsekventen ikke er $\Gamma \vdash \Delta$

$\square$

Bevis (induksjonssteg – α-utvidelse).

Induksjonssteg: δ er en utledning på formen

$$\dfrac{\Gamma' \vdash \Delta'}{\Gamma \vdash \Delta}\,\alpha$$



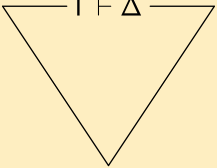
- Anta at v falsifiserer rotsekventen i δ, og anta at v falsifiserer en løvsekvent i utledningen før α-utvidelsen.
- Hvis den falsifiserte løvsekventen ikke er $\Gamma \vdash \Delta$, så er den også løvsekvent i δ.

$\square$

Bevis (induksjonssteg – α-utvidelse).

Induksjonssteg: δ er en utledning på formen

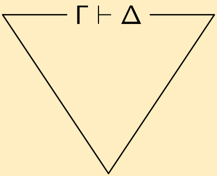
$$\frac{\Gamma' \vdash \Delta'}{\Gamma \vdash \Delta}\,\alpha$$



- Anta at v falsifiserer rotsekventen i δ, og anta at v falsifiserer en løvsekvent i utledningen før α-utvidelsen.
- Hvis den falsifiserte løvsekventen ikke er $\Gamma \vdash \Delta$, så er den også løvsekvent i δ. Dermed falsifiserer v en løvsekvent i δ.

Bevis (induksjonssteg – α-utvidelse).

Induksjonssteg: δ er en utledning på formen



- Anta at v falsifiserer rotsekventen i δ, og anta at v falsifiserer en løvsekvent i utledningen før α-utvidelsen.
- Hvis den falsifiserte løvsekventen ikke er $\Gamma \vdash \Delta$, så er den også løvsekvent i δ. Dermed falsifiserer v en løvsekvent i δ.
- Hvis den falsifiserte løvsekventen er $\Gamma \vdash \Delta$

Bevis (induksjonssteg – α-utvidelse).

Induksjonssteg: δ er en utledning på formen

$$\frac{\Gamma' \vdash \Delta'}{\Gamma \vdash \Delta}\,\alpha$$

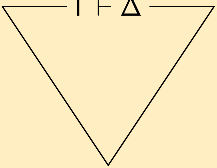
- Anta at v falsifiserer rotsekventen i δ, og anta at v falsifiserer en løvsekvent i utledningen før α-utvidelsen.
- Hvis den falsifiserte løvsekventen ikke er $\Gamma \vdash \Delta$, så er den også løvsekvent i δ. Dermed falsifiserer v en løvsekvent i δ.
- Hvis den falsifiserte løvsekventen er $\Gamma \vdash \Delta$, så falsifiserer v også $\Gamma' \vdash \Delta'$

$\square$

Bevis (induksjonssteg – α-utvidelse).

Induksjonssteg: δ er en utledning på formen

$$\frac{\Gamma' \vdash \Delta'}{\Gamma \vdash \Delta}\,\alpha$$



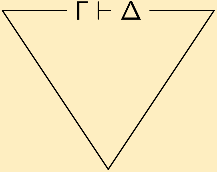
- Anta at v falsifiserer rotsekventen i δ, og anta at v falsifiserer en løvsekvent i utledningen før α-utvidelsen.
- Hvis den falsifiserte løvsekventen ikke er $\Gamma \vdash \Delta$, så er den også løvsekvent i δ. Dermed falsifiserer v en løvsekvent i δ.
- Hvis den falsifiserte løvsekventen er $\Gamma \vdash \Delta$, så falsifiserer v også $\Gamma' \vdash \Delta'$ siden α-reglene bevarer falsifiserbarhet.

$\square$

Bevis (induksjonssteg – β-utvidelse).

Induksjonssteg: δ er en utledning på formen

$$\dfrac{\Gamma' \vdash \Delta' \qquad \Gamma'' \vdash \Delta''}{\Gamma \vdash \Delta}\,\beta$$

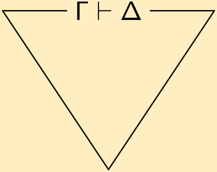


□

Bevis (induksjonssteg – β-utvidelse).

Induksjonssteg: δ er en utledning på formen

$$\frac{\Gamma' \vdash \Delta' \qquad \Gamma'' \vdash \Delta''}{\Gamma \vdash \Delta}\,\beta$$

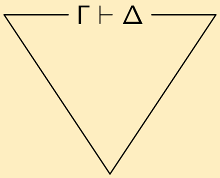


- Anta at v falsifiserer rotsekventen i δ

□

Bevis (induksjonssteg – β-utvidelse).

Induksjonssteg: δ er en utledning på formen

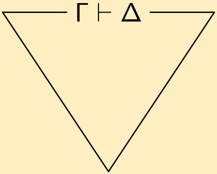


- Anta at v falsifiserer rotsekventen i δ, og anta at v falsifiserer en løvsekvent i utledningen før β-utvidelsen.

□

Bevis (induksjonssteg – β-utvidelse).

Induksjonssteg: δ er en utledning på formen



- Anta at v falsifiserer rotsekventen i δ, og anta at v falsifiserer en løvsekvent i utledningen før β-utvidelsen.
- Hvis den falsifiserte løvsekventen ikke er $\Gamma \vdash \Delta$

$\square$

Bevis (induksjonssteg – β-utvidelse).

Induksjonssteg: δ er en utledning på formen

$$\frac{\Gamma' \vdash \Delta' \qquad \Gamma'' \vdash \Delta''}{\Gamma \vdash \Delta}\,\beta$$

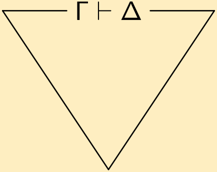
- Anta at v falsifiserer rotsekventen i δ, og anta at v falsifiserer en løvsekvent i utledningen før β-utvidelsen.
- Hvis den falsifiserte løvsekventen ikke er $\Gamma \vdash \Delta$, så er den også løvsekvent i δ.

$\square$

Bevis (induksjonssteg – β-utvidelse).

Induksjonssteg: δ er en utledning på formen

$$\frac{\Gamma' \vdash \Delta' \qquad \Gamma'' \vdash \Delta''}{\Gamma \vdash \Delta}\ \beta$$

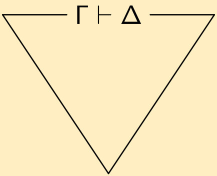


- Anta at v falsifiserer rotsekventen i δ, og anta at v falsifiserer en løvsekvent i utledningen før β-utvidelsen.
- Hvis den falsifiserte løvsekventen ikke er $\Gamma \vdash \Delta$, så er den også løvsekvent i δ. Dermed falsifiserer v en løvsekvent i δ.

$\square$

Bevis (induksjonssteg – β-utvidelse).

Induksjonssteg: δ er en utledning på formen



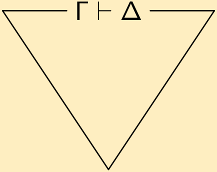
- Anta at v falsifiserer rotsekventen i δ, og anta at v falsifiserer en løvsekvent i utledningen før β-utvidelsen.
- Hvis den falsifiserte løvsekventen ikke er $\Gamma \vdash \Delta$, så er den også løvsekvent i δ. Dermed falsifiserer v en løvsekvent i δ.
- Hvis den falsifiserte løvsekventen er $\Gamma \vdash \Delta$

□

Bevis (induksjonssteg – β-utvidelse).

Induksjonssteg: δ er en utledning på formen

$$\frac{\Gamma' \vdash \Delta' \qquad \Gamma'' \vdash \Delta''}{\Gamma \vdash \Delta}\,\beta$$



- Anta at v falsifiserer rotsekventen i δ, og anta at v falsifiserer en løvsekvent i utledningen før β-utvidelsen.
- Hvis den falsifiserte løvsekventen ikke er $\Gamma \vdash \Delta$, så er den også løvsekvent i δ. Dermed falsifiserer v en løvsekvent i δ.
- Hvis den falsifiserte løvsekventen er $\Gamma \vdash \Delta$, så falsifiserer v også $\Gamma' \vdash \Delta'$

□

Bevis (induksjonssteg – β-utvidelse).

Induksjonssteg: δ er en utledning på formen

$$\frac{\Gamma' \vdash \Delta' \qquad \Gamma'' \vdash \Delta''}{\Gamma \vdash \Delta}\,\beta$$

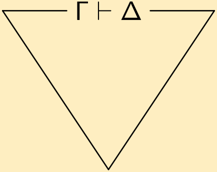
- Anta at v falsifiserer rotsekventen i δ, og anta at v falsifiserer en løvsekvent i utledningen før β-utvidelsen.
- Hvis den falsifiserte løvsekventen ikke er $\Gamma \vdash \Delta$, så er den også løvsekvent i δ. Dermed falsifiserer v en løvsekvent i δ.
- Hvis den falsifiserte løvsekventen er $\Gamma \vdash \Delta$, så falsifiserer v også $\Gamma' \vdash \Delta'$ eller $\Gamma'' \vdash \Delta''$

□

Bevis (induksjonssteg – β-utvidelse).

Induksjonssteg: δ er en utledning på formen

$$\frac{\Gamma' \vdash \Delta' \qquad \Gamma'' \vdash \Delta''}{\Gamma \vdash \Delta}\ \beta$$



- Anta at v falsifiserer rotsekventen i δ, og anta at v falsifiserer en løvsekvent i utledningen før β-utvidelsen.
- Hvis den falsifiserte løvsekventen ikke er $\Gamma \vdash \Delta$, så er den også løvsekvent i δ. Dermed falsifiserer v en løvsekvent i δ.
- Hvis den falsifiserte løvsekventen er $\Gamma \vdash \Delta$, så falsifiserer v også $\Gamma' \vdash \Delta'$ eller $\Gamma'' \vdash \Delta''$ siden β-reglene bevarer falsifiserbarhet.

$\square$

Hvordan vise sunnhetsteoremet?

Vi viser følgende lemmaer:

1. Alle LK-reglene bevarer falsifiserbarhet oppover.
2. En LK-utledning med falsifiserbar rotsekvent har minst én falsifiserbar løvsekvent.
3. Alle aksiomer er gyldige.

Til slutt vises sunnhetsteoremet ved hjelp av lemmaene.

Lemma

Alle aksiomer er gyldige.

Lemma

Alle aksiomer er gyldige.

Bevis.

$$\Gamma, A \vdash A, \Delta$$

$\square$

Lemma

Alle aksiomer er gyldige.

Bevis.

$$\Gamma, A \vdash A, \Delta$$

- Vi skal vise at alle valuasjoner som oppfyller antecedenten

$\square$

Lemma

Alle aksiomer er gyldige.

Bevis.

$$\Gamma, A \vdash A, \Delta$$

- Vi skal vise at alle valuasjoner som oppfyller antecedenten også oppfyller én formel i succedenten.

$\square$

Lemma

Alle aksiomer er gyldige.

Bevis.

$$\Gamma, A \vdash A, \Delta$$

- Vi skal vise at alle valuasjoner som oppfyller antecedenten også oppfyller én formel i succedenten.
- La v være en tilfeldig valgt valuasjon som oppfyller antecedenten.

$\square$

Lemma

Alle aksiomer er gyldige.

Bevis.

$$\Gamma, A \vdash A, \Delta$$

- Vi skal vise at alle valuasjoner som oppfyller antecedenten også oppfyller én formel i succedenten.
- La v være en tilfeldig valgt valuasjon som oppfyller antecedenten.
- Da oppfyller v formelen A i succedenten.

□

Bevis for sunnhet.

- Anta at π er et LK-bevis for sekventen $\Gamma \vdash \Delta$.

$\square$

Bevis for sunnhet.

- Anta at π er et LK-bevis for sekventen $\Gamma \vdash \Delta$.
- Anta for motsigelse at $\Gamma \vdash \Delta$ ikke er gyldig.

$\square$

Bevis for sunnhet.

- Anta at π er et LK-bevis for sekventen $\Gamma \vdash \Delta$.
- Anta for motsigelse at $\Gamma \vdash \Delta$ ikke er gyldig.
- Da har den en motmodell v som falsifiserer $\Gamma \vdash \Delta$.

$\square$

Bevis for sunnhet.

- Anta at π er et LK-bevis for sekventen $\Gamma \vdash \Delta$.
- Anta for motsigelse at $\Gamma \vdash \Delta$ ikke er gyldig.
- Da har den en motmodell v som falsifiserer $\Gamma \vdash \Delta$.
- Vi har da fra tidligere lemma at v falsifiserer minst én løvsekvent i π.

$\square$

Bevis for sunnhet.

- Anta at π er et LK-bevis for sekventen $\Gamma \vdash \Delta$.
- Anta for motsigelse at $\Gamma \vdash \Delta$ ikke er gyldig.
- Da har den en motmodell v som falsifiserer $\Gamma \vdash \Delta$.
- Vi har da fra tidligere lemma at v falsifiserer minst én løvsekvent i π.
- Da har π en løvsekvent som ikke er et aksiom, siden ingen aksiomer er falsifiserbare.

$\square$

Bevis for sunnhet.

- Anta at π er et LK-bevis for sekventen $\Gamma \vdash \Delta$.
- Anta for motsigelse at $\Gamma \vdash \Delta$ ikke er gyldig.
- Da har den en motmodell v som falsifiserer $\Gamma \vdash \Delta$.
- Vi har da fra tidligere lemma at v falsifiserer minst én løvsekvent i π.
- Da har π en løvsekvent som ikke er et aksiom, siden ingen aksiomer er falsifiserbare.
- Men da er ikke π et LK-bevis.

$\square$

Introduksjon

Definisjon (Sunnhet)

Sekventkalkylen LK *er sunn hvis enhver* LK*-bevisbar sekvent er gyldig.*

Introduksjon

Definisjon (Sunnhet)

Sekventkalkylen LK *er sunn hvis enhver* LK-*bevisbar sekvent er gyldig.*

Definisjon (Kompletthet)

Sekventkalkylen LK *er komplett hvis enhver gyldig sekvent er* LK-*bevisbar.*

Introduksjon

Definisjon (Sunnhet)

Sekventkalkylen LK *er sunn hvis enhver* LK*-bevisbar sekvent er gyldig.*

Definisjon (Kompletthet)

Sekventkalkylen LK *er komplett hvis enhver gyldig sekvent er* LK*-bevisbar.*

Gyldighet
(semantisk)
Universell påstand:
"for alle valuasjoner..."

Introduksjon

Definisjon (Sunnhet)

Sekventkalkylen LK *er sunn hvis enhver* LK*-bevisbar sekvent er gyldig.*

Definisjon (Kompletthet)

Sekventkalkylen LK *er komplett hvis enhver gyldig sekvent er* LK*-bevisbar.*

Gyldighet
(semantisk)
Universell påstand:
"for alle valuasjoner…"

Bevisbarhet
(syntaktisk)
Eksistensiell påstand:
"det fins et bevis…"

Introduksjon

Definisjon (Sunnhet)

Sekventkalkylen LK *er* *sunn* *hvis enhver* LK-*bevisbar sekvent er gyldig.*

Definisjon (Kompletthet)

Sekventkalkylen LK *er* *komplett* *hvis enhver gyldig sekvent er* LK-*bevisbar.*

$$\xleftarrow{\text{sunnhet}}$$

Gyldighet
(semantisk)
Universell påstand:
"for alle valuasjoner..."

Bevisbarhet
(syntaktisk)
Eksistensiell påstand:
"det fins et bevis..."

Introduksjon

Definisjon (Sunnhet)

Sekventkalkylen LK *er sunn hvis enhver* LK-*bevisbar sekvent er gyldig.*

Definisjon (Kompletthet)

Sekventkalkylen LK *er komplett hvis enhver gyldig sekvent er* LK-*bevisbar.*

$$\xleftarrow{\text{sunnhet}}$$

Gyldighet
(semantisk)
Universell påstand:
"for alle valuasjoner. . ."

Bevisbarhet
(syntaktisk)
Eksistensiell påstand:
"det fins et bevis. . ."

$$\xrightarrow{\text{kompletthet}}$$

Introduksjon

Sunnhet:	$\Gamma \vdash \Delta$ bevisbar	:	$\Gamma \vdash \Delta$ gyldig
Kompletthet:	$\Gamma \vdash \Delta$ gyldig	:	$\Gamma \vdash \Delta$ bevisbar

Introduksjon

Sunnhet: $\Gamma \vdash \Delta$ bevisbar : $\Gamma \vdash \Delta$ gyldig
Kompletthet: $\Gamma \vdash \Delta$ gyldig : $\Gamma \vdash \Delta$ bevisbar

- Sunnhet og kompletthet er duale begreper.

Introduksjon

Sunnhet:	$\Gamma \vdash \Delta$ bevisbar	:	$\Gamma \vdash \Delta$ gyldig
Kompletthet:	$\Gamma \vdash \Delta$ gyldig	:	$\Gamma \vdash \Delta$ bevisbar

- Sunnhet og kompletthet er duale begreper.
- Sunnhet gir at vi ikke kan bevise noe *mer* enn de gyldige sekventene.

Introduksjon

Sunnhet:	$\Gamma \vdash \Delta$ bevisbar	:	$\Gamma \vdash \Delta$ gyldig
Kompletthet:	$\Gamma \vdash \Delta$ gyldig	:	$\Gamma \vdash \Delta$ bevisbar

- Sunnhet og kompletthet er duale begreper.
- Sunnhet gir at vi ikke kan bevise noe *mer* enn de gyldige sekventene.
- Kompletthet gir at vi kan bevise *alle* gyldige sekventer.

Introduksjon

Sunnhet:	$\Gamma \vdash \Delta$ bevisbar	:	$\Gamma \vdash \Delta$ gyldig
Kompletthet:	$\Gamma \vdash \Delta$ gyldig	:	$\Gamma \vdash \Delta$ bevisbar

- Sunnhet og kompletthet er duale begreper.
- Sunnhet gir at vi ikke kan bevise noe *mer* enn de gyldige sekventene.
- Kompletthet gir at vi kan bevise *alle* gyldige sekventer.
- Husk at vi introduserte LK som et systematisk forsøk på å falsifisere.

Introduksjon

Sunnhet: $\Gamma \vdash \Delta$ bevisbar : $\Gamma \vdash \Delta$ gyldig
Kompletthet: $\Gamma \vdash \Delta$ gyldig : $\Gamma \vdash \Delta$ bevisbar

- Sunnhet og kompletthet er duale begreper.
- Sunnhet gir at vi ikke kan bevise noe *mer* enn de gyldige sekventene.
- Kompletthet gir at vi kan bevise *alle* gyldige sekventer.
- Husk at vi introduserte LK som et systematisk forsøk på å falsifisere.
- En sekvent er gyldig hvis og bare hvis den ikke er falsifiserbar.

Introduksjon

Sunnhet: $\Gamma \vdash \Delta$ bevisbar : $\Gamma \vdash \Delta$ gyldig
Kompletthet: $\Gamma \vdash \Delta$ gyldig : $\Gamma \vdash \Delta$ bevisbar

- Sunnhet og kompletthet er duale begreper.
- Sunnhet gir at vi ikke kan bevise noe *mer* enn de gyldige sekventene.
- Kompletthet gir at vi kan bevise *alle* gyldige sekventer.
- Husk at vi introduserte LK som et systematisk forsøk på å falsifisere.
- En sekvent er gyldig hvis og bare hvis den ikke er falsifiserbar.
- Vi kan dermed uttrykke sunnhet og kompletthet slik:

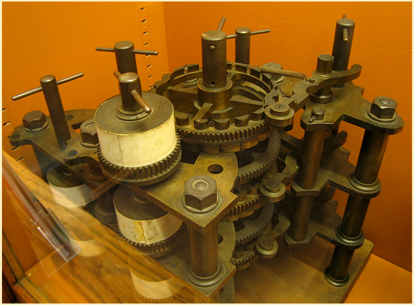
Introduksjon

Sunnhet:	$\Gamma \vdash \Delta$ bevisbar	:	$\Gamma \vdash \Delta$ gyldig
Kompletthet:	$\Gamma \vdash \Delta$ gyldig	:	$\Gamma \vdash \Delta$ bevisbar

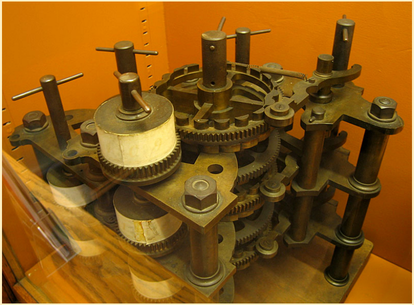
- Sunnhet og kompletthet er duale begreper.
- Sunnhet gir at vi ikke kan bevise noe *mer* enn de gyldige sekventene.
- Kompletthet gir at vi kan bevise *alle* gyldige sekventer.
- Husk at vi introduserte LK som et systematisk forsøk på å falsifisere.
- En sekvent er gyldig hvis og bare hvis den ikke er falsifiserbar.
- Vi kan dermed uttrykke sunnhet og kompletthet slik:

Sunnhet:	$\Gamma \vdash \Delta$ falsifiserbar	:	$\Gamma \vdash \Delta$ ikke bevisbar
Kompletthet:	$\Gamma \vdash \Delta$ ikke bevisbar	:	$\Gamma \vdash \Delta$ falsifiserbar

En LK-maskin?



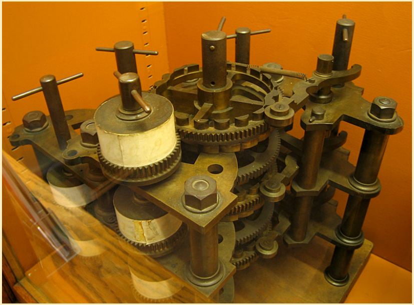
En LK-maskin?



Sunnhet

Alt som skrives ut er gyldig.

En LK-maskin?



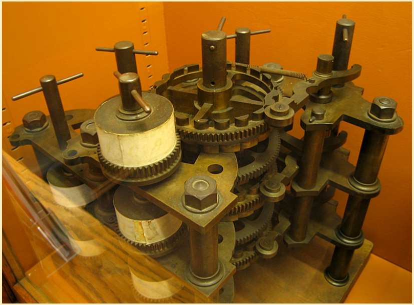
Sunnhet

Alt som skrives ut er gyldig.

Kompletthet

Alt som er gyldig blir skrevet ut.

En LK-maskin?



Sunnhet

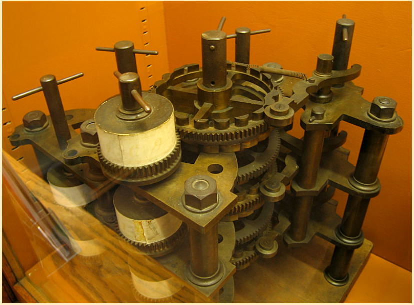
Alt som skrives ut er gyldig.

Kompletthet

Alt som er gyldig blir skrevet ut.

- Noe kan være sunt uten å være komplett.

En LK-maskin?



- Noe kan være sunt uten å være komplett.
  - Da vises for lite.

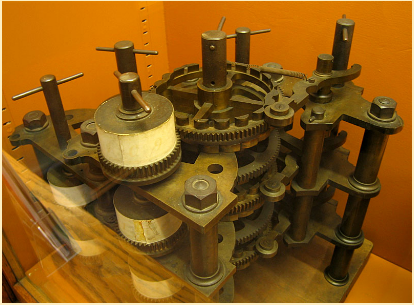
Sunnhet

Alt som skrives ut er gyldig.

Kompletthet

Alt som er gyldig blir skrevet ut.

En LK-maskin?



- Noe kan være sunt uten å være komplett.
  - Da vises for lite.
  - Eksempel med primtall: 2, 5, 7, 11, 17, 19, ...

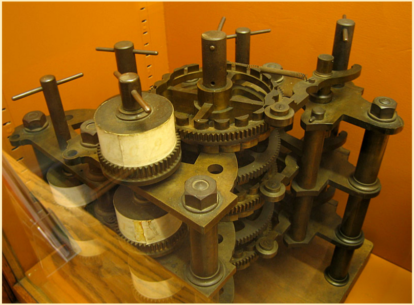
Sunnhet

Alt som skrives ut er gyldig.

Kompletthet

Alt som er gyldig blir skrevet ut.

En LK-maskin?



Sunnhet

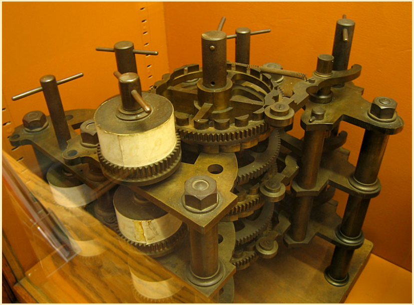
Alt som skrives ut er gyldig.

Kompletthet

Alt som er gyldig blir skrevet ut.

- Noe kan være sunt uten å være komplett.
  - Da vises for lite.
  - Eksempel med primtall: 2, 5, 7, 11, 17, 19, ...
- Noe kan være komplett uten å være sunt.

En LK-maskin?



Sunnhet

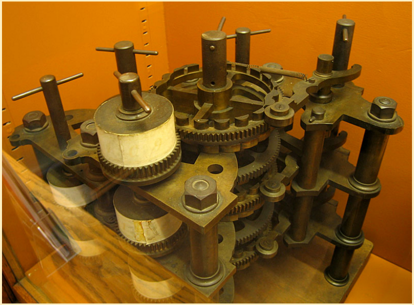
Alt som skrives ut er gyldig.

Kompletthet

Alt som er gyldig blir skrevet ut.

- Noe kan være sunt uten å være komplett.
  - Da vises for lite.
  - Eksempel med primtall:
    2, 5, 7, 11, 17, 19, ...
- Noe kan være komplett uten å være sunt.
  - Da vises for mye.

En LK-maskin?



Sunnhet

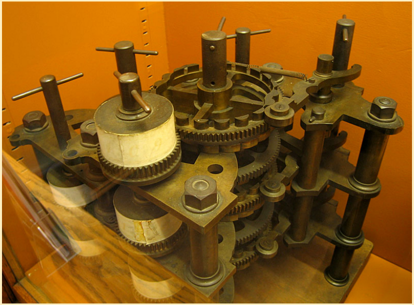
Alt som skrives ut er gyldig.

Kompletthet

Alt som er gyldig blir skrevet ut.

- Noe kan være sunt uten å være komplett.
  - Da vises for lite.
  - Eksempel med primtall:
    2,   5, 7, 11,   17, 19, . . .
- Noe kan være komplett uten å være sunt.
  - Da vises for mye.
  - Eksempel med primtall:
    2, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15 . . .

En LK-maskin?



Sunnhet

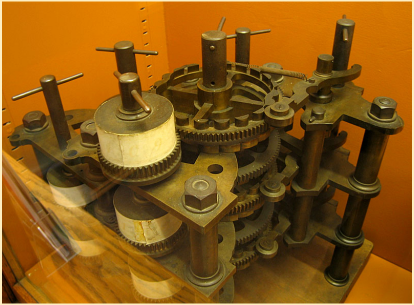
Alt som skrives ut er gyldig.

Kompletthet

Alt som er gyldig blir skrevet ut.

- Noe kan være sunt uten å være komplett.
  - Da vises for lite.
  - Eksempel med primtall:
    2, 5, 7, 11, 17, 19, . . .
- Noe kan være komplett uten å være sunt.
  - Da vises for mye.
  - Eksempel med primtall:
    2, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15 . . .
- Vi ønsker begge deler

En LK-maskin?



Sunnhet

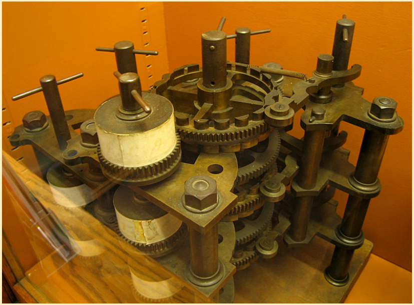
Alt som skrives ut er gyldig.

Kompletthet

Alt som er gyldig blir skrevet ut.

- Noe kan være sunt uten å være komplett.
  - Da vises for lite.
  - Eksempel med primtall:
    2, 5, 7, 11, 17, 19, . . .
- Noe kan være komplett uten å være sunt.
  - Da vises for mye.
  - Eksempel med primtall:
    2, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15 . . .
- Vi ønsker begge deler
  - Hverken for mye eller for lite.

En LK-maskin?



Sunnhet

Alt som skrives ut er gyldig.

Kompletthet

Alt som er gyldig blir skrevet ut.

- Noe kan være sunt uten å være komplett.
  - Da vises for lite.
  - Eksempel med primtall:
    2, 5, 7, 11, 17, 19, ...
- Noe kan være komplett uten å være sunt.
  - Da vises for mye.
  - Eksempel med primtall:
    2, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15 ...
- Vi ønsker begge deler
  - Hverken for mye eller for lite.
  - Eksempel med primtall:
    2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19 ...

Kompletthetsteoremet

Teorem (Kompletthet)

Hvis $\Gamma \vdash \Delta$ *er gyldig, så er den bevisbar i* LK.

Kompletthetsteoremet

Teorem (Kompletthet)

Hvis $\Gamma \vdash \Delta$ *er gyldig, så er den bevisbar i* LK.

For å vise *kompletthet* av sekventkalkylen, viser vi den ekvivalente påstanden:

Kompletthetsteoremet

Teorem (Kompletthet)

Hvis $\Gamma \vdash \Delta$ *er gyldig, så er den bevisbar i* LK.

For å vise *kompletthet* av sekventkalkylen, viser vi den ekvivalente påstanden:

Lemma (Eksistens av valuasjon)

Hvis $\Gamma \vdash \Delta$ *ikke er bevisbar i LK, så er den falsifiserbar*

Kompletthetsteoremet

Teorem (Kompletthet)

Hvis $\Gamma \vdash \Delta$ *er gyldig, så er den bevisbar i* LK.

For å vise *kompletthet* av sekventkalkylen, viser vi den ekvivalente påstanden:

Lemma (Eksistens av valuasjon)

Hvis $\Gamma \vdash \Delta$ *ikke er bevisbar i LK, så er den falsifiserbar*

Dvs. det finnes en valuasjon som gjør samtlige formler i Γ sanne og samtlige formler i Δ usanne.

Bevis for kompletthetsteoremet

Anta at $\Gamma \vdash \Delta$ ikke er bevisbar.

Bevis for kompletthetsteoremet

Anta at $\Gamma \vdash \Delta$ ikke er bevisbar.

- Konstruer en utledning π av $\Gamma \vdash \Delta$ slik at ingen regel lenger kan anvendes. “En maksimal utledning”.

Bevis for kompletthetsteoremet

Anta at $\Gamma \vdash \Delta$ ikke er bevisbar.

- Konstruer en utledning π av $\Gamma \vdash \Delta$ slik at ingen regel lenger kan anvendes. "En maksimal utledning".
- Da fins (minst) en gren G som ikke er lukket. Vi har da at:

Bevis for kompletthetsteoremet

Anta at $\Gamma \vdash \Delta$ ikke er bevisbar.

- Konstruer en utledning π av $\Gamma \vdash \Delta$ slik at ingen regel lenger kan anvendes. "En maksimal utledning".
- Da fins (minst) en gren G som ikke er lukket. Vi har da at:
  - løvsekventen i G inneholder kun atomære formler, og

Bevis for kompletthetsteoremet

Anta at $\Gamma \vdash \Delta$ ikke er bevisbar.

- Konstruer en utledning π av $\Gamma \vdash \Delta$ slik at ingen regel lenger kan anvendes. "En maksimal utledning".
- Da fins (minst) en gren G som ikke er lukket. Vi har da at:
  - løvsekventen i G inneholder kun atomære formler, og
  - løvsekventen i G er uten aksiom.

Bevis for kompletthetsteoremet

Anta at $\Gamma \vdash \Delta$ ikke er bevisbar.

- Konstruer en utledning π av $\Gamma \vdash \Delta$ slik at ingen regel lenger kan anvendes. "En maksimal utledning".
- Da fins (minst) en gren G som ikke er lukket. Vi har da at:
  - løvsekventen i G inneholder kun atomære formler, og
  - løvsekventen i G er uten aksiom.
- Vi konstruerer nå en valuasjon som falsifiserer $\Gamma \vdash \Delta$. La

Bevis for kompletthetsteoremet

Anta at $\Gamma \vdash \Delta$ ikke er bevisbar.

- Konstruer en utledning π av $\Gamma \vdash \Delta$ slik at ingen regel lenger kan anvendes. "En maksimal utledning".
- Da fins (minst) en gren G som ikke er lukket. Vi har da at:
  - løvsekventen i G inneholder kun atomære formler, og
  - løvsekventen i G er uten aksiom.
- Vi konstruerer nå en valuasjon som falsifiserer $\Gamma \vdash \Delta$. La

  $G^{\top}$ være mengden av alle formler som forekommer i en antecedent i G, og

Bevis for kompletthetsteoremet

Anta at $\Gamma \vdash \Delta$ ikke er bevisbar.

- Konstruer en utledning π av $\Gamma \vdash \Delta$ slik at ingen regel lenger kan anvendes. "En maksimal utledning".
- Da fins (minst) en gren G som ikke er lukket. Vi har da at:
  - løvsekventen i G inneholder kun atomære formler, og
  - løvsekventen i G er uten aksiom.
- Vi konstruerer nå en valuasjon som falsifiserer $\Gamma \vdash \Delta$. La

  $G^\top$ være mengden av alle formler som forekommer i en antecedent i G, og

  $G^\perp$ være mengden av alle formler som forekommer i en succedent i G, og

Bevis for kompletthetsteoremet

Anta at $\Gamma \vdash \Delta$ ikke er bevisbar.

- Konstruer en utledning π av $\Gamma \vdash \Delta$ slik at ingen regel lenger kan anvendes. "En maksimal utledning".
- Da fins (minst) en gren G som ikke er lukket. Vi har da at:
  - løvsekventen i G inneholder kun atomære formler, og
  - løvsekventen i G er uten aksiom.
- Vi konstruerer nå en valuasjon som falsifiserer $\Gamma \vdash \Delta$. La

  $G^\top$ være mengden av alle formler som forekommer i en antecedent i G, og

  $G^\bot$ være mengden av alle formler som forekommer i en succedent i G, og

  v være valuasjonen som gjør alle alle atomære formler i $G^\top$ sanne og alle andre atomære formler (spesielt de i $G^\bot$) usanne.

Eksempel

$$P \rightarrow Q \vdash (P \vee R) \rightarrow Q$$

Eksempel

$$\frac{P \to Q, P \vee R \vdash Q}{P \to Q \vdash (P \vee R) \to Q}$$

Eksempel

$$\dfrac{\dfrac{P \rightarrow Q, P \vdash Q \qquad P \rightarrow Q, R \vdash Q}{P \rightarrow Q, P \lor R \vdash Q}}{P \rightarrow Q \vdash (P \lor R) \rightarrow Q}$$

Eksempel

$$\dfrac{\dfrac{P \vdash Q, P \qquad Q, P \vdash Q}{P \to Q, P \vdash Q} \qquad P \to Q, R \vdash Q}{\dfrac{P \to Q, P \lor R \vdash Q}{P \to Q \vdash (P \lor R) \to Q}}$$

Eksempel

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\times}{P \vdash Q, P} \qquad \dfrac{\times}{Q, P \vdash Q}}{P \to Q, P \vdash Q} \qquad P \to Q, R \vdash Q}{P \to Q, P \lor R \vdash Q}}{P \to Q \vdash (P \lor R) \to Q}
$$

Eksempel

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{\times}{P \vdash Q, P} \qquad \overset{\times}{Q, P \vdash Q}}{P \to Q, P \vdash Q} \qquad \dfrac{R \vdash Q, P \qquad Q, R \vdash Q}{P \to Q, R \vdash Q}}{P \to Q, P \lor R \vdash Q}}{P \to Q \vdash (P \lor R) \to Q}
$$

Eksempel

$$
\dfrac{
  \dfrac{
    \dfrac{
      \dfrac{\times}{P \vdash Q, P}
      \qquad
      \dfrac{\times}{Q, P \vdash Q}
    }{P \to Q, P \vdash Q}
    \qquad
    \dfrac{
      R \vdash Q, P
      \qquad
      \dfrac{\times}{Q, R \vdash Q}
    }{P \to Q, R \vdash Q}
  }{P \to Q, P \lor R \vdash Q}
}{P \to Q \vdash (P \lor R) \to Q}
$$

Eksempel

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{\times}{P \vdash Q, P} \qquad \overset{\times}{Q, P \vdash Q}}{P \to Q, P \vdash Q} \qquad \dfrac{R \vdash Q, P \qquad \overset{\times}{Q, R \vdash Q}}{P \to Q, R \vdash Q}}{P \to Q, P \lor R \vdash Q}}{P \to Q \vdash (P \lor R) \to Q}$$

Vi får at grenen G med løvsekvent $R \vdash Q, P$ ikke er lukket.

Eksempel

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\times}{P \vdash Q, P} \qquad \dfrac{\times}{Q, P \vdash Q}}{P \rightarrow Q, P \vdash Q} \qquad \dfrac{R \vdash Q, P \qquad \dfrac{\times}{Q, R \vdash Q}}{P \rightarrow Q, R \vdash Q}}{P \rightarrow Q, P \vee R \vdash Q}}{P \rightarrow Q \vdash (P \vee R) \rightarrow Q}
$$

Vi får at grenen G med løvsekvent $R \vdash Q, P$ ikke er lukket.

$$G^{\top} = \{R, P \rightarrow Q, P \vee R\}$$

Eksempel

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{\times}{P \vdash Q, P} \qquad \overset{\times}{Q, P \vdash Q}}{P \to Q, P \vdash Q} \qquad \dfrac{R \vdash Q, P \qquad \overset{\times}{Q, R \vdash Q}}{P \to Q, R \vdash Q}}{P \to Q, P \lor R \vdash Q}}{P \to Q \vdash (P \lor R) \to Q}$$

Vi får at grenen G med løvsekvent $R \vdash Q, P$ ikke er lukket.

$$G^{\top} = \{R, P \to Q, P \lor R\}$$
$$G^{\bot} = \{Q, P, (P \lor R) \to Q\}$$

Eksempel

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{\times}{P \vdash Q, P} \qquad \overset{\times}{Q, P \vdash Q}}{P \to Q, P \vdash Q} \qquad \dfrac{R \vdash Q, P \qquad \overset{\times}{Q, R \vdash Q}}{P \to Q, R \vdash Q}}{P \to Q, P \lor R \vdash Q}}{P \to Q \vdash (P \lor R) \to Q}$$

Vi får at grenen G med løvsekvent $R \vdash Q, P$ ikke er lukket.

$$\begin{aligned} G^{\top} &= \{R, P \to Q, P \lor R\} \\ G^{\bot} &= \{Q, P, (P \lor R) \to Q\} \\ v &= \text{valuasjonen definert ved } v(R) = 1 \text{ og } v(Q) = v(P) = 0 \end{aligned}$$

Eksempel

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\times}{P \vdash Q, P} \qquad \dfrac{\times}{Q, P \vdash Q}}{P \rightarrow Q, P \vdash Q} \qquad \dfrac{R \vdash Q, P \qquad \dfrac{\times}{Q, R \vdash Q}}{P \rightarrow Q, R \vdash Q}}{P \rightarrow Q, P \vee R \vdash Q}}{P \rightarrow Q \vdash (P \vee R) \rightarrow Q}$$

Vi får at grenen G med løvsekvent $R \vdash Q, P$ ikke er lukket.

$$G^{\top} = \{R, P \rightarrow Q, P \vee R\}$$
$$G^{\perp} = \{Q, P, (P \vee R) \rightarrow Q\}$$
$v =$ valuasjonen definert ved $v(R) = 1$ og $v(Q) = v(P) = 0$

Denne valuasjonen falsifiserer rotsekventen.

Bevis for kompletthetsteoremet

- Vi viser ved strukturell induksjon på utsagnslogiske formler at valuasjonen v gjør *alle* formler i $G^{\top}$ sanne og alle formler i $G^{\perp}$ usanne.

Bevis for kompletthetsteoremet

- Vi viser ved strukturell induksjon på utsagnslogiske formler at valuasjonen v gjør *alle* formler i $G^\top$ sanne og alle formler i $G^\perp$ usanne.
- Påstandene som vi viser for utsagnslogiske formler er:

Bevis for kompletthetsteoremet

- Vi viser ved strukturell induksjon på utsagnslogiske formler at valuasjonen v gjør *alle* formler i $G^\top$ sanne og alle formler i $G^\perp$ usanne.
- Påstandene som vi viser for utsagnslogiske formler er:

  Hvis $A \in G^\top$, så $v(A) = 1$.

Bevis for kompletthetsteoremet

- Vi viser ved strukturell induksjon på utsagnslogiske formler at valuasjonen v gjør *alle* formler i $G^{\top}$ sanne og alle formler i $G^{\perp}$ usanne.
- Påstandene som vi viser for utsagnslogiske formler er:

  Hvis $A \in G^{\top}$, så $v(A) = 1$.
  Hvis $A \in G^{\perp}$, så $v(A) = 0$.

Bevis for kompletthetsteoremet

- Vi viser ved strukturell induksjon på utsagnslogiske formler at valuasjonen v gjør *alle* formler i $G^\top$ sanne og alle formler i $G^\perp$ usanne.
- Påstandene som vi viser for utsagnslogiske formler er:

  Hvis $A \in G^\top$, så $v(A) = 1$.
  Hvis $A \in G^\perp$, så $v(A) = 0$.

<u>Basissteg:</u> A er en atomær formel i $G^\top / G^\perp$.

Bevis for kompletthetsteoremet

- Vi viser ved strukturell induksjon på utsagnslogiske formler at valuasjonen v gjør *alle* formler i $G^\top$ sanne og alle formler i $G^\perp$ usanne.
- Påstandene som vi viser for utsagnslogiske formler er:

  Hvis $A \in G^\top$, så $v(A) = 1$.
  Hvis $A \in G^\perp$, så $v(A) = 0$.

Basissteg: A er en atomær formel i $G^\top / G^\perp$.

- Påstanden holder, fordi det var slik vi konstruerte $G^\top / G^\perp$.

Bevis for kompletthetsteoremet

- Vi viser ved strukturell induksjon på utsagnslogiske formler at valuasjonen v gjør *alle* formler i $G^\top$ sanne og alle formler i $G^\perp$ usanne.
- Påstandene som vi viser for utsagnslogiske formler er:

  Hvis $A \in G^\top$, så $v(A) = 1$.
  Hvis $A \in G^\perp$, så $v(A) = 0$.

Basissteg: A er en atomær formel i $G^\top / G^\perp$.

- Påstanden holder, fordi det var slik vi konstruerte $G^\top / G^\perp$.

Induksjonssteg: Fra antakelsen om at påstanden holder for A og B, så må vi vise at den holder for $\neg A$, $(A \land B)$, $(A \lor B)$ og $(A \to B)$. Dette gir fire forskjellige tilfeller. (Vi viser tre av dem her.)

Bevis for kompletthetsteoremet

Anta at $\neg A \in G^{\top}$.

Bevis for kompletthetsteoremet

Anta at $\neg A \in G^{\top}$.

- Siden utledningen er "maksimal", har vi $A \in G^{\perp}$.

Bevis for kompletthetsteoremet

Anta at $\neg A \in G^{\top}$.

- Siden utledningen er "maksimal", har vi $A \in G^{\perp}$.
- Ved IH har vi $v(A) = 0$.

Bevis for kompletthetsteoremet

Anta at $\neg A \in G^{\top}$.

- Siden utledningen er "maksimal", har vi $A \in G^{\perp}$.
- Ved IH har vi $v(A) = 0$.
- Ved definisjonen av valuasjoner har vi $v(\neg A) = 1$.

Bevis for kompletthetsteoremet

Anta at $\neg A \in G^\top$.

- Siden utledningen er "maksimal", har vi $A \in G^\perp$.
- Ved IH har vi $v(A) = 0$.
- Ved definisjonen av valuasjoner har vi $v(\neg A) = 1$.

Anta at $\neg A \in G^\perp$.

Bevis for kompletthetsteoremet

Anta at $\neg A \in G^\top$.

- Siden utledningen er "maksimal", har vi $A \in G^\perp$.
- Ved IH har vi $v(A) = 0$.
- Ved definisjonen av valuasjoner har vi $v(\neg A) = 1$.

Anta at $\neg A \in G^\perp$.

- Siden utledningen er "maksimal", har vi $A \in G^\top$.

Bevis for kompletthetsteoremet

Anta at $\neg A \in G^{\top}$.

- Siden utledningen er "maksimal", har vi $A \in G^{\perp}$.
- Ved IH har vi $v(A) = 0$.
- Ved definisjonen av valuasjoner har vi $v(\neg A) = 1$.

Anta at $\neg A \in G^{\perp}$.

- Siden utledningen er "maksimal", har vi $A \in G^{\top}$.
- Ved IH har vi $v(A) = 1$.

Bevis for kompletthetsteoremet

Anta at $\neg A \in G^{\top}$.

- Siden utledningen er "maksimal", har vi $A \in G^{\perp}$.
- Ved IH har vi $v(A) = 0$.
- Ved definisjonen av valuasjoner har vi $v(\neg A) = 1$.

Anta at $\neg A \in G^{\perp}$.

- Siden utledningen er "maksimal", har vi $A \in G^{\top}$.
- Ved IH har vi $v(A) = 1$.
- Ved definisjonen av valuasjoner har vi $v(\neg A) = 0$.

Bevis for kompletthetsteoremet

Anta at $(A \land B) \in G^\top$.

Bevis for kompletthetsteoremet

Anta at $(A \wedge B) \in G^\top$.

- Siden utledningen er "maksimal", har vi $A \in G^\top$ og $B \in G^\top$.

Bevis for kompletthetsteoremet

Anta at $(A \wedge B) \in G^\top$.

- Siden utledningen er "maksimal", har vi $A \in G^\top$ og $B \in G^\top$.
- Ved IH har vi $v(A) = 1$ og $v(B) = 1$.

Bevis for kompletthetsteoremet

Anta at $(A \land B) \in G^\top$.

- Siden utledningen er "maksimal", har vi $A \in G^\top$ og $B \in G^\top$.
- Ved IH har vi $v(A) = 1$ og $v(B) = 1$.
- Ved definisjonen av valuasjoner har vi $v(A \land B) = 1$.

Bevis for kompletthetsteoremet

Anta at $(A \land B) \in G^\top$.

- Siden utledningen er "maksimal", har vi $A \in G^\top$ og $B \in G^\top$.
- Ved IH har vi $v(A) = 1$ og $v(B) = 1$.
- Ved definisjonen av valuasjoner har vi $v(A \land B) = 1$.

Anta at $(A \land B) \in G^\perp$.

Bevis for kompletthetsteoremet

Anta at $(A \wedge B) \in G^{\top}$.

- Siden utledningen er "maksimal", har vi $A \in G^{\top}$ og $B \in G^{\top}$.
- Ved IH har vi $v(A) = 1$ og $v(B) = 1$.
- Ved definisjonen av valuasjoner har vi $v(A \wedge B) = 1$.

Anta at $(A \wedge B) \in G^{\perp}$.

- Siden utledningen er "maksimal", har vi $A \in G^{\perp}$ eller $B \in G^{\perp}$.

Bevis for kompletthetsteoremet

Anta at $(A \wedge B) \in G^{\top}$.

- Siden utledningen er "maksimal", har vi $A \in G^{\top}$ og $B \in G^{\top}$.
- Ved IH har vi $v(A) = 1$ og $v(B) = 1$.
- Ved definisjonen av valuasjoner har vi $v(A \wedge B) = 1$.

Anta at $(A \wedge B) \in G^{\perp}$.

- Siden utledningen er "maksimal", har vi $A \in G^{\perp}$ eller $B \in G^{\perp}$.
- Ved IH har vi $v(A) = 0$ eller $v(B) = 0$.

Bevis for kompletthetsteoremet

Anta at $(A \land B) \in G^\top$.

- Siden utledningen er "maksimal", har vi $A \in G^\top$ og $B \in G^\top$.
- Ved IH har vi $v(A) = 1$ og $v(B) = 1$.
- Ved definisjonen av valuasjoner har vi $v(A \land B) = 1$.

Anta at $(A \land B) \in G^\bot$.

- Siden utledningen er "maksimal", har vi $A \in G^\bot$ eller $B \in G^\bot$.
- Ved IH har vi $v(A) = 0$ eller $v(B) = 0$.
- Ved definisjonen av valuasjoner har vi $v(A \land B) = 0$.

Bevis for kompletthetsteoremet

Anta at $(A \rightarrow B) \in G^{\top}$.

Bevis for kompletthetsteoremet

Anta at $(A \to B) \in G^{\top}$.

- Siden utledningen er "maksimal", har vi $A \in G^{\perp}$ eller $B \in G^{\top}$.

Bevis for kompletthetsteoremet

Anta at $(A \to B) \in G^\top$.

- Siden utledningen er "maksimal", har vi $A \in G^\perp$ eller $B \in G^\top$.
- Ved IH har vi $v(A) = 0$ eller $v(B) = 1$.

Bevis for kompletthetsteoremet

Anta at $(A \to B) \in G^\top$.

- Siden utledningen er "maksimal", har vi $A \in G^\perp$ eller $B \in G^\top$.
- Ved IH har vi $v(A) = 0$ eller $v(B) = 1$.
- Ved definisjonen av valuasjoner har vi $v(A \to B) = 1$.

Bevis for kompletthetsteoremet

Anta at $(A \to B) \in G^{\top}$.

- Siden utledningen er "maksimal", har vi $A \in G^{\perp}$ eller $B \in G^{\top}$.
- Ved IH har vi $v(A) = 0$ eller $v(B) = 1$.
- Ved definisjonen av valuasjoner har vi $v(A \to B) = 1$.

Anta at $(A \to B) \in G^{\perp}$.

Bevis for kompletthetsteoremet

Anta at $(A \to B) \in G^\top$.

- Siden utledningen er "maksimal", har vi $A \in G^\perp$ eller $B \in G^\top$.
- Ved IH har vi $v(A) = 0$ eller $v(B) = 1$.
- Ved definisjonen av valuasjoner har vi $v(A \to B) = 1$.

Anta at $(A \to B) \in G^\perp$.

- Siden utledningen er "maksimal", har vi $A \in G^\top$ og $B \in G^\perp$.

Bevis for kompletthetsteoremet

Anta at $(A \to B) \in G^{\top}$.

- Siden utledningen er "maksimal", har vi $A \in G^{\perp}$ eller $B \in G^{\top}$.
- Ved IH har vi $v(A) = 0$ eller $v(B) = 1$.
- Ved definisjonen av valuasjoner har vi $v(A \to B) = 1$.

Anta at $(A \to B) \in G^{\perp}$.

- Siden utledningen er "maksimal", har vi $A \in G^{\top}$ og $B \in G^{\perp}$.
- Ved IH har vi $v(A) = 1$ og $v(B) = 0$.

Bevis for kompletthetsteoremet

Anta at $(A \to B) \in G^{\top}$.

- Siden utledningen er “maksimal”, har vi $A \in G^{\perp}$ eller $B \in G^{\top}$.
- Ved IH har vi $v(A) = 0$ eller $v(B) = 1$.
- Ved definisjonen av valuasjoner har vi $v(A \to B) = 1$.

Anta at $(A \to B) \in G^{\perp}$.

- Siden utledningen er “maksimal”, har vi $A \in G^{\top}$ og $B \in G^{\perp}$.
- Ved IH har vi $v(A) = 1$ og $v(B) = 0$.
- Ved definisjonen av valuasjoner har vi $v(A \to B) = 0$.

Uttrykkskraft

Noe av det sterkeste vi kan uttrykke med utsagnslogikk er duehullprinsippet:

Uttrykkskraft

Noe av det sterkeste vi kan uttrykke med utsagnslogikk er duehullprinsippet:

Duehullprinsippet / Dirichlets boksprinsipp

Gitt n bokser og $m > n$ objekter, så må minst en boks inneholde mer enn ett objekt.

Uttrykkskraft

Noe av det sterkeste vi kan uttrykke med utsagnslogikk er duehullprinsippet:

Duehullprinsippet / Dirichlets boksprinsipp

Gitt n bokser og $m > n$ objekter, så må minst en boks inneholde mer enn ett objekt.

- Anta at vi har n bokser og $n + 1$ objekter.

Uttrykkskraft

Noe av det sterkeste vi kan uttrykke med utsagnslogikk er duehullprinsippet:

Duehullprinsippet / Dirichlets boksprinsipp

Gitt n bokser og $m > n$ objekter, så må minst en boks inneholde mer enn ett objekt.

- Anta at vi har n bokser og $n + 1$ objekter.
- Vi uttrykke duehullprinsippet i utsagnslogikk ved å la P^i_j være en utsagnsvariabel som tolkes som "objekt nr i ligger i boks nr j".

Uttrykkskraft

Noe av det sterkeste vi kan uttrykke med utsagnslogikk er duehullprinsippet:

Duehullprinsippet / Dirichlets boksprinsipp

Gitt n bokser og $m > n$ objekter, så må minst en boks inneholde mer enn ett objekt.

- Anta at vi har n bokser og $n + 1$ objekter.
- Vi uttrykke duehullprinsippet i utsagnslogikk ved å la P^i_j være en utsagnsvariabel som tolkes som "objekt nr i ligger i boks nr j".
- Hvis vi har 2 bokser og 3 objekter får vi f.eks.

Uttrykkskraft

Noe av det sterkeste vi kan uttrykke med utsagnslogikk er duehullprinsippet:

Duehullprinsippet / Dirichlets boksprinsipp

Gitt n bokser og $m > n$ objekter, så må minst en boks inneholde mer enn ett objekt.

- Anta at vi har n bokser og $n + 1$ objekter.
- Vi uttrykke duehullprinsippet i utsagnslogikk ved å la P^i_j være en utsagnsvariabel som tolkes som "objekt nr i ligger i boks nr j".
- Hvis vi har 2 bokser og 3 objekter får vi f.eks.
  - Objekt 1 ligger i en av boksene: $P^1_1 \vee P^1_2$.

Uttrykkskraft

Noe av det sterkeste vi kan uttrykke med utsagnslogikk er duehullprinsippet:

Duehullprinsippet / Dirichlets boksprinsipp

Gitt n bokser og $m > n$ objekter, så må minst en boks inneholde mer enn ett objekt.

- Anta at vi har n bokser og $n + 1$ objekter.
- Vi uttrykke duehullprinsippet i utsagnslogikk ved å la P_j^i være en utsagnsvariabel som tolkes som "objekt nr i ligger i boks nr j".
- Hvis vi har 2 bokser og 3 objekter får vi f.eks.
  - Objekt 1 ligger i en av boksene: $P_1^1 \vee P_2^1$.
  - Objekt 3 ligger i en av boksene: $P_1^3 \vee P_2^3$.

Uttrykkskraft

Noe av det sterkeste vi kan uttrykke med utsagnslogikk er duehullprinsippet:

Duehullprinsippet / Dirichlets boksprinsipp

Gitt n bokser og $m > n$ objekter, så må minst en boks inneholde mer enn ett objekt.

- Anta at vi har n bokser og $n+1$ objekter.
- Vi uttrykke duehullprinsippet i utsagnslogikk ved å la P^i_j være en utsagnsvariabel som tolkes som "objekt nr i ligger i boks nr j".
- Hvis vi har 2 bokser og 3 objekter får vi f.eks.
  - Objekt 1 ligger i en av boksene: $P^1_1 \vee P^1_2$.
  - Objekt 3 ligger i en av boksene: $P^3_1 \vee P^3_2$.
  - Boks 1 inneholder både objekt 1 og 2: $P^1_1 \wedge P^2_1$.

Uttrykkskraft

Noe av det sterkeste vi kan uttrykke med utsagnslogikk er duehullprinsippet:

Duehullprinsippet / Dirichlets boksprinsipp

Gitt n bokser og $m > n$ objekter, så må minst en boks inneholde mer enn ett objekt.

- Anta at vi har n bokser og $n + 1$ objekter.
- Vi uttrykke duehullprinsippet i utsagnslogikk ved å la P^i_j være en utsagnsvariabel som tolkes som "objekt nr i ligger i boks nr j".
- Hvis vi har 2 bokser og 3 objekter får vi f.eks.
  - Objekt 1 ligger i en av boksene: $P^1_1 \lor P^1_2$.
  - Objekt 3 ligger i en av boksene: $P^3_1 \lor P^3_2$.
  - Boks 1 inneholder både objekt 1 og 2: $P^1_1 \land P^2_1$.
  - Boks 2 inneholder både objekt 1 og 3: $P^1_2 \land P^3_2$.

Avgjørbarhet

Teorem

Utsagnslogikk er avgjørbart, dvs. det fins en algoritme som er i stand til etter endelig mange steg å avgjøre hvorvidt en utsagnslogisk formel er gyldig eller ikke.

Avgjørbarhet

Teorem

Utsagnslogikk er avgjørbart, dvs. det fins en algoritme som er i stand til etter endelig mange steg å avgjøre hvorvidt en utsagnslogisk formel er gyldig eller ikke.

- Vår sekventkalkyle gir opphav til en slik algoritme.

Kompleksitet

Teorem

Oppfyllbarhetsproblemet for utsagnslogikk - å finne ut hvorvidt en formel/sekvent er oppfyllbar eller ikke - er NP-komplett. (Avgjørbart i ikke-deterministisk polynomiell tid.)

Kompleksitet

Teorem

Oppfyllbarhetsproblemet for utsagnslogikk - å finne ut hvorvidt en formel/sekvent er oppfyllbar eller ikke - er NP-komplett. (Avgjørbart i ikke-deterministisk polynomiell tid.)

Teorem

Gyldighetsproblemet for utsagnslogikk er coNP-komplett.