INF3170 – Logikk

Forelesning 5: Førsteordens logikk – syntaks og semantikk

Christian Mahesh Hansen

Institutt for informatikk, Universitetet i Oslo

19. februar 2007

Dagens plan

1. Førsteordens logikk - syntaks
2. Førsteordens logikk - semantikk

1. Førsteordens logikk - syntaks
   - Repetisjon
   - Frie variable
   - Substitusjoner
   - Lukkede og åpne formler

2. Førsteordens logikk - semantikk

Repetisjon

Repetisjon

Et førsteordens språk $\mathcal{L}$ består av:

Repetisjon

Et førsteordens språk $\mathcal{L}$ består av:

1. Logiske symboler

Repetisjon

Et førsteordens språk $\mathcal{L}$ består av:

1. Logiske symboler
   - konnektiver: $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$ og $\neg$

Repetisjon

Et førsteordens språk $\mathcal{L}$ består av:

1. Logiske symboler
    - konnektiver: $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$ og $\neg$
    - hjelpesymboler: '(' og ')' og ','

Repetisjon

Et førsteordens språk $\mathcal{L}$ består av:

1. Logiske symboler
   - konnektiver: $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$ og $\neg$
   - hjelpesymboler: '(' og ')' og ','
   - kvantorer: $\exists$ og $\forall$

Repetisjon

Et førsteordens språk $\mathcal{L}$ består av:

1. Logiske symboler
   - konnektiver: $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$ og $\neg$
   - hjelpesymboler: '(' og ')' og ','
   - kvantorer: $\exists$ og $\forall$
   - variable: $\mathcal{V} = \{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$

Repetisjon

Et førsteordens språk $\mathcal{L}$ består av:

1. Logiske symboler
   - konnektiver: $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$ og $\neg$
   - hjelpesymboler: '(' og ')' og ','
   - kvantorer: $\exists$ og $\forall$
   - variable: $\mathcal{V} = \{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$
2. Ikke-logiske symboler:

Repetisjon

Et førsteordens språk $\mathcal{L}$ består av:

1. Logiske symboler
   - konnektiver: $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$ og $\neg$
   - hjelpesymboler: '(' og ')' og ','
   - kvantorer: $\exists$ og $\forall$
   - variable: $\mathcal{V} = \{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$
2. Ikke-logiske symboler:
   - en tellbar mengde konstantsymboler

Repetisjon

Et førsteordens språk $\mathcal{L}$ består av:

1. Logiske symboler
   - konnektiver: $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$ og $\neg$
   - hjelpesymboler: '(' og ')' og ','
   - kvantorer: $\exists$ og $\forall$
   - variable: $\mathcal{V} = \{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$
2. Ikke-logiske symboler:
   - en tellbar mengde konstantsymboler
   - en tellbar mengde funksjonssymboler (med aritet)

Repetisjon

Et førsteordens språk $\mathcal{L}$ består av:

1. Logiske symboler
   - konnektiver: $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$ og $\neg$
   - hjelpesymboler: '(' og ')' og ','
   - kvantorer: $\exists$ og $\forall$
   - variable: $\mathcal{V} = \{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$
2. Ikke-logiske symboler:
   - en tellbar mengde konstantsymboler
   - en tellbar mengde funksjonssymboler (med aritet)
   - en tellbar mengde relasjonssymboler (med aritet)

Repetisjon

Et førsteordens språk $\mathcal{L}$ består av:

1. Logiske symboler
   - konnektiver: $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$ og $\neg$
   - hjelpesymboler: '(' og ')' og ','
   - kvantorer: $\exists$ og $\forall$
   - variable: $\mathcal{V} = \{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$
2. Ikke-logiske symboler:
   - en tellbar mengde konstantsymboler
   - en tellbar mengde funksjonssymboler (med aritet)
   - en tellbar mengde relasjonssymboler (med aritet)

- De ikke-logiske symbolene utgjør en signatur

Repetisjon

Et førsteordens språk $\mathcal{L}$ består av:

1. Logiske symboler
   - konnektiver: $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$ og $\neg$
   - hjelpesymboler: '(' og ')' og ','
   - kvantorer: $\exists$ og $\forall$
   - variable: $\mathcal{V} = \{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$
2. Ikke-logiske symboler:
   - en tellbar mengde konstantsymboler
   - en tellbar mengde funksjonssymboler (med aritet)
   - en tellbar mengde relasjonssymboler (med aritet)

- De ikke-logiske symbolene utgjør en signatur

$$\langle \underbrace{c_1, c_2, c_3, \ldots}_{\textit{konstantsymboler}} ; \underbrace{f_1, f_2, f_3, \ldots}_{\textit{funksjonssymboler}} ; \underbrace{R_1, R_2, R_3, \ldots}_{\textit{relasjonssymboler}} \rangle.$$

Repetisjon

Vi så følgende signaturer sist:

Repetisjon

Vi så følgende signaturer sist:

enkelt språk: $\langle \quad a \quad ; \quad f, g \quad ; \quad P, R \quad \rangle$

Repetisjon

Vi så følgende signaturer sist:

enkelt språk:	$\langle$	a	;	f, g	;	P, R	$\rangle$
aritmetikk 1:	$\langle$	0	;	$s, +$	;	$=$	$\rangle$

Repetisjon

Vi så følgende signaturer sist:

$$
\begin{array}{llcccccl}
\text{enkelt språk:} & \langle & a & ; & f, g & ; & P, R & \rangle \\
\text{aritmetikk 1:} & \langle & 0 & ; & s, + & ; & = & \rangle \\
\text{aritmetikk 2:} & \langle & 0, 1 & ; & +, \times & ; & =, < & \rangle
\end{array}
$$

Repetisjon

Vi så følgende signaturer sist:

$$
\begin{array}{lccccccc}
\text{enkelt språk:} & \langle & a & ; & f, g & ; & P, R & \rangle \\
\text{aritmetikk 1:} & \langle & 0 & ; & s, + & ; & = & \rangle \\
\text{aritmetikk 2:} & \langle & 0, 1 & ; & +, \times & ; & =, < & \rangle \\
\text{mengdelære:} & \langle & \emptyset & ; & \cap, \cup & ; & =, \in & \rangle
\end{array}
$$

Repetisjon

Vi så følgende signaturer sist:

enkelt språk:	$\langle$	a	;	f, g	;	P, R	$\rangle$
aritmetikk 1:	$\langle$	0	;	$s, +$	;	$=$	$\rangle$
aritmetikk 2:	$\langle$	$0, 1$	;	$+, \times$	;	$=, <$	$\rangle$
mengdelære:	$\langle$	$\emptyset$	;	$\cap, \cup$	;	$=, \in$	$\rangle$
familierelasjoner:	$\langle$	Ola, Kari	;	mor, far	;	Mor, Far, Slektning	$\rangle$

Repetisjon

Vi så følgende signaturer sist:

enkelt språk:	$\langle$	a	;	f, g	;	P, R	$\rangle$
aritmetikk 1:	$\langle$	0	;	$s, +$	;	$=$	$\rangle$
aritmetikk 2:	$\langle$	$0, 1$	;	$+, \times$	;	$=, <$	$\rangle$
mengdelære:	$\langle$	$\emptyset$	;	$\cap, \cup$	;	$=, \in$	$\rangle$
familierelasjoner:	$\langle$	Ola, Kari	;	mor, far	;	Mor, Far, Slektning	$\rangle$
beundring:	$\langle$	a, b	;		;	Idol, Liker	$\rangle$

Repetisjon

Hvis et førsteordens språk $\mathcal{L}$ er gitt, så får vi (definert induktivt):

Repetisjon

Hvis et førsteordens språk $\mathcal{L}$ er gitt, så får vi (definert induktivt):

1. Mengden $\mathcal{T}$ av termer i $\mathcal{L}$:

Repetisjon

Hvis et førsteordens språk $\mathcal{L}$ er gitt, så får vi (definert induktivt):

1. Mengden $\mathcal{T}$ av termer i $\mathcal{L}$:
    - Enhver variabel og konstant er en term.

Repetisjon

Hvis et førsteordens språk $\mathcal{L}$ er gitt, så får vi (definert induktivt):

1. Mengden $\mathcal{T}$ av termer i $\mathcal{L}$:
   - Enhver variabel og konstant er en term.
   - Hvis f er et funksjonssymbol med aritet n og $t_1, \ldots, t_n$ er termer,så er $f(t_1, ..., t_n)$ en term.

Repetisjon

Hvis et førsteordens språk $\mathcal{L}$ er gitt, så får vi (definert induktivt):

1. Mengden $\mathcal{T}$ av termer i $\mathcal{L}$:
   - Enhver variabel og konstant er en term.
   - Hvis f er et funksjonssymbol med aritet n og $t_1, \ldots, t_n$ er termer,så er $f(t_1, ..., t_n)$ en term.
2. Mengden $\mathcal{F}$ av formler i $\mathcal{L}$:

Repetisjon

Hvis et førsteordens språk $\mathcal{L}$ er gitt, så får vi (definert induktivt):

1. Mengden $\mathcal{T}$ av termer i $\mathcal{L}$:
   - Enhver variabel og konstant er en term.
   - Hvis f er et funksjonssymbol med aritet n og $t_1, \ldots, t_n$ er termer,så er $f(t_1, ..., t_n)$ en term.
2. Mengden $\mathcal{F}$ av formler i $\mathcal{L}$:
   - Hvis R er et relasjonssymbol med aritet n og $t_1, \ldots, t_n$ er termer,så er $R(t_1, \ldots, t_n)$ en (atomær) formel.

Repetisjon

Hvis et førsteordens språk $\mathcal{L}$ er gitt, så får vi (definert induktivt):

1. Mengden $\mathcal{T}$ av termer i $\mathcal{L}$:
   - Enhver variabel og konstant er en term.
   - Hvis f er et funksjonssymbol med aritet n og $t_1, \ldots, t_n$ er termer,så er $f(t_1, ..., t_n)$ en term.
2. Mengden $\mathcal{F}$ av formler i $\mathcal{L}$:
   - Hvis R er et relasjonssymbol med aritet n og $t_1, \ldots, t_n$ er termer,så er $R(t_1, \ldots, t_n)$ en (atomær) formel.
   - Hvis φ og ψ er formler,så er $\neg\varphi$, $(\varphi \wedge \psi)$, $(\varphi \vee \psi)$ og $(\varphi \rightarrow \psi)$ formler.

Repetisjon

Hvis et førsteordens språk $\mathcal{L}$ er gitt, så får vi (definert induktivt):

1. Mengden $\mathcal{T}$ av termer i $\mathcal{L}$:
   - Enhver variabel og konstant er en term.
   - Hvis f er et funksjonssymbol med aritet n og $t_1, \ldots, t_n$ er termer,så er $f(t_1, ..., t_n)$ en term.
2. Mengden $\mathcal{F}$ av formler i $\mathcal{L}$:
   - Hvis R er et relasjonssymbol med aritet n og $t_1, \ldots, t_n$ er termer,så er $R(t_1, \ldots, t_n)$ en (atomær) formel.
   - Hvis φ og ψ er formler,så er $\neg\varphi$, $(\varphi \land \psi)$, $(\varphi \lor \psi)$ og $(\varphi \rightarrow \psi)$ formler.
   - Hvis φ er en formel og x er en variabel,så er $\forall x\varphi$ og $\exists x\varphi$ formler.

Repetisjon

Hvis et førsteordens språk $\mathcal{L}$ er gitt, så får vi (definert induktivt):

1. Mengden $\mathcal{T}$ av termer i $\mathcal{L}$:
   - Enhver variabel og konstant er en term.
   - Hvis f er et funksjonssymbol med aritet n og $t_1, \ldots, t_n$ er termer,så er $f(t_1, ..., t_n)$ en term.
2. Mengden $\mathcal{F}$ av formler i $\mathcal{L}$:
   - Hvis R er et relasjonssymbol med aritet n og $t_1, \ldots, t_n$ er termer,så er $R(t_1, \ldots, t_n)$ en (atomær) formel.
   - Hvis φ og ψ er formler,så er $\neg\varphi$, $(\varphi \wedge \psi)$, $(\varphi \vee \psi)$ og $(\varphi \rightarrow \psi)$ formler.
   - Hvis φ er en formel og x er en variabel,så er $\forall x\varphi$ og $\exists x\varphi$ formler.

Alle forekomster av en variabel x i φ sies å være bundet i formlene $\forall x\varphi$ og $\exists x\varphi$ og innenfor skopet til den gjeldende kvantoren.

Repetisjon

I språket for beundring $\langle a, b; -; \text{Idol}, \text{Liker} \rangle$ kan vi uttrykke:

Repetisjon

I språket for beundring $\langle a, b; -; \mathrm{Idol}, \mathrm{Liker} \rangle$ kan vi uttrykke:

1: Alice liker Bob:

Repetisjon

I språket for beundring $\langle a, b; -; \mathrm{Idol}, \mathrm{Liker}\rangle$ kan vi uttrykke:

1: Alice liker Bob: $\mathrm{Liker}(a, b)$

Repetisjon

I språket for beundring $\langle a, b; -; \mathrm{Idol}, \mathrm{Liker}\rangle$ kan vi uttrykke:

1: Alice liker Bob: $\mathrm{Liker}(a, b)$

2: Alice liker alle:

Repetisjon

I språket for beundring $\langle a, b; -; \text{Idol}, \text{Liker}\rangle$ kan vi uttrykke:

1: Alice liker Bob: $\text{Liker}(a, b)$

2: Alice liker alle: $\forall x \text{Liker}(a, x)$

Repetisjon

I språket for beundring $\langle a, b; -; \mathrm{Idol}, \mathrm{Liker}\rangle$ kan vi uttrykke:

1:	Alice liker Bob:	$\mathrm{Liker}(a, b)$
2:	Alice liker alle:	$\forall x \mathrm{Liker}(a, x)$
3:	Alice liker alle som Bob liker:	

Repetisjon

I språket for beundring $\langle a, b; -; \mathrm{Idol}, \mathrm{Liker}\rangle$ kan vi uttrykke:

1:	Alice liker Bob:	$\mathrm{Liker}(a, b)$
2:	Alice liker alle:	$\forall x \mathrm{Liker}(a, x)$
3:	Alice liker alle som Bob liker:	$\forall x(\mathrm{Liker}(b, x) \rightarrow \mathrm{Liker}(a, x))$

Repetisjon

I språket for beundring $\langle a, b; -; \text{Idol}, \text{Liker}\rangle$ kan vi uttrykke:

1:	Alice liker Bob:	$\text{Liker}(a, b)$
2:	Alice liker alle:	$\forall x \text{Liker}(a, x)$
3:	Alice liker alle som Bob liker:	$\forall x(\text{Liker}(b, x) \rightarrow \text{Liker}(a, x))$
4:	Noen liker seg selv:	

Repetisjon

I språket for beundring $\langle a, b; -; \text{Idol}, \text{Liker}\rangle$ kan vi uttrykke:

1:	Alice liker Bob:	$\text{Liker}(a, b)$
2:	Alice liker alle:	$\forall x \text{Liker}(a, x)$
3:	Alice liker alle som Bob liker:	$\forall x(\text{Liker}(b, x) \to \text{Liker}(a, x))$
4:	Noen liker seg selv:	$\exists x \text{Liker}(x, x)$

Repetisjon

I språket for beundring $\langle a, b; -; \text{Idol}, \text{Liker}\rangle$ kan vi uttrykke:

1:	Alice liker Bob:	$\text{Liker}(a, b)$
2:	Alice liker alle:	$\forall x \text{Liker}(a, x)$
3:	Alice liker alle som Bob liker:	$\forall x(\text{Liker}(b, x) \rightarrow \text{Liker}(a, x))$
4:	Noen liker seg selv:	$\exists x \text{Liker}(x, x)$
5:	Bob liker alle som liker seg selv:	

Repetisjon

I språket for beundring $\langle a, b; -; \text{Idol}, \text{Liker}\rangle$ kan vi uttrykke:

1:	Alice liker Bob:	$\text{Liker}(a, b)$
2:	Alice liker alle:	$\forall x \text{Liker}(a, x)$
3:	Alice liker alle som Bob liker:	$\forall x(\text{Liker}(b, x) \rightarrow \text{Liker}(a, x))$
4:	Noen liker seg selv:	$\exists x \text{Liker}(x, x)$
5:	Bob liker alle som liker seg selv:	$\forall x(\text{Liker}(x, x) \rightarrow \text{Liker}(b, x))$

Repetisjon

I språket for beundring $\langle a, b; -; \text{Idol}, \text{Liker} \rangle$ kan vi uttrykke:

1:	Alice liker Bob:	$\text{Liker}(a, b)$
2:	Alice liker alle:	$\forall x \text{Liker}(a, x)$
3:	Alice liker alle som Bob liker:	$\forall x (\text{Liker}(b, x) \rightarrow \text{Liker}(a, x))$
4:	Noen liker seg selv:	$\exists x \text{Liker}(x, x)$
5:	Bob liker alle som liker seg selv:	$\forall x (\text{Liker}(x, x) \rightarrow \text{Liker}(b, x))$
6:	Ingen liker både Alice og Bob:	

Repetisjon

I språket for beundring $\langle a, b; -; \mathrm{Idol}, \mathrm{Liker}\rangle$ kan vi uttrykke:

1:	Alice liker Bob:	$\mathrm{Liker}(a, b)$
2:	Alice liker alle:	$\forall x \mathrm{Liker}(a, x)$
3:	Alice liker alle som Bob liker:	$\forall x(\mathrm{Liker}(b, x) \rightarrow \mathrm{Liker}(a, x))$
4:	Noen liker seg selv:	$\exists x \mathrm{Liker}(x, x)$
5:	Bob liker alle som liker seg selv:	$\forall x(\mathrm{Liker}(x, x) \rightarrow \mathrm{Liker}(b, x))$
6:	Ingen liker både Alice og Bob:	$\neg\exists x(\mathrm{Liker}(x, a) \wedge \mathrm{Liker}(x, b))$

Repetisjon

I språket for beundring $\langle a, b; -; \mathrm{Idol}, \mathrm{Liker} \rangle$ kan vi uttrykke:

1:	Alice liker Bob:	$\mathrm{Liker}(a, b)$
2:	Alice liker alle:	$\forall x \mathrm{Liker}(a, x)$
3:	Alice liker alle som Bob liker:	$\forall x(\mathrm{Liker}(b, x) \rightarrow \mathrm{Liker}(a, x))$
4:	Noen liker seg selv:	$\exists x \mathrm{Liker}(x, x)$
5:	Bob liker alle som liker seg selv:	$\forall x(\mathrm{Liker}(x, x) \rightarrow \mathrm{Liker}(b, x))$
6:	Ingen liker både Alice og Bob:	$\neg \exists x(\mathrm{Liker}(x, a) \land \mathrm{Liker}(x, b))$
		$\forall x(\mathrm{Liker}(x, a) \rightarrow \neg \mathrm{Liker}(x, b))$

Repetisjon

I språket for beundring $\langle a, b; -; \text{Idol}, \text{Liker}\rangle$ kan vi uttrykke:

1:	Alice liker Bob:	$\text{Liker}(a, b)$
2:	Alice liker alle:	$\forall x \text{Liker}(a, x)$
3:	Alice liker alle som Bob liker:	$\forall x(\text{Liker}(b, x) \rightarrow \text{Liker}(a, x))$
4:	Noen liker seg selv:	$\exists x \text{Liker}(x, x)$
5:	Bob liker alle som liker seg selv:	$\forall x(\text{Liker}(x, x) \rightarrow \text{Liker}(b, x))$
6:	Ingen liker både Alice og Bob:	$\neg\exists x(\text{Liker}(x, a) \land \text{Liker}(x, b))$
		$\forall x(\text{Liker}(x, a) \rightarrow \neg\text{Liker}(x, b))$
7:	Noen liker ikke seg selv:	

Repetisjon

I språket for beundring $\langle a, b; -; \text{Idol}, \text{Liker}\rangle$ kan vi uttrykke:

1:	Alice liker Bob:	$\text{Liker}(a, b)$
2:	Alice liker alle:	$\forall x \text{Liker}(a, x)$
3:	Alice liker alle som Bob liker:	$\forall x(\text{Liker}(b, x) \rightarrow \text{Liker}(a, x))$
4:	Noen liker seg selv:	$\exists x \text{Liker}(x, x)$
5:	Bob liker alle som liker seg selv:	$\forall x(\text{Liker}(x, x) \rightarrow \text{Liker}(b, x))$
6:	Ingen liker både Alice og Bob:	$\neg\exists x(\text{Liker}(x, a) \land \text{Liker}(x, b))$
		$\forall x(\text{Liker}(x, a) \rightarrow \neg\text{Liker}(x, b))$
7:	Noen liker ikke seg selv:	$\exists x \neg\text{Liker}(x, x)$

Repetisjon

I språket for beundring $\langle a, b; -; \text{Idol}, \text{Liker}\rangle$ kan vi uttrykke:

1:	Alice liker Bob:	$\text{Liker}(a, b)$
2:	Alice liker alle:	$\forall x \text{Liker}(a, x)$
3:	Alice liker alle som Bob liker:	$\forall x(\text{Liker}(b, x) \rightarrow \text{Liker}(a, x))$
4:	Noen liker seg selv:	$\exists x \text{Liker}(x, x)$
5:	Bob liker alle som liker seg selv:	$\forall x(\text{Liker}(x, x) \rightarrow \text{Liker}(b, x))$
6:	Ingen liker både Alice og Bob:	$\neg\exists x(\text{Liker}(x, a) \wedge \text{Liker}(x, b))$
		$\forall x(\text{Liker}(x, a) \rightarrow \neg\text{Liker}(x, b))$
7:	Noen liker ikke seg selv:	$\exists x \neg\text{Liker}(x, x)$
8:	Bob liker noen som liker Alice:	

Repetisjon

I språket for beundring $\langle a, b; -; \mathrm{Idol}, \mathrm{Liker}\rangle$ kan vi uttrykke:

1:	Alice liker Bob:	$\mathrm{Liker}(a, b)$
2:	Alice liker alle:	$\forall x \mathrm{Liker}(a, x)$
3:	Alice liker alle som Bob liker:	$\forall x(\mathrm{Liker}(b, x) \rightarrow \mathrm{Liker}(a, x))$
4:	Noen liker seg selv:	$\exists x \mathrm{Liker}(x, x)$
5:	Bob liker alle som liker seg selv:	$\forall x(\mathrm{Liker}(x, x) \rightarrow \mathrm{Liker}(b, x))$
6:	Ingen liker både Alice og Bob:	$\neg\exists x(\mathrm{Liker}(x, a) \land \mathrm{Liker}(x, b))$
		$\forall x(\mathrm{Liker}(x, a) \rightarrow \neg\mathrm{Liker}(x, b))$
7:	Noen liker ikke seg selv:	$\exists x \neg\mathrm{Liker}(x, x)$
8:	Bob liker noen som liker Alice:	$\exists x(\mathrm{Liker}(b, x) \land \mathrm{Liker}(x, a))$

Repetisjon

I språket for beundring $\langle a, b; -; \text{Idol}, \text{Liker}\rangle$ kan vi uttrykke:

1:	Alice liker Bob:	$\text{Liker}(a, b)$
2:	Alice liker alle:	$\forall x \text{Liker}(a, x)$
3:	Alice liker alle som Bob liker:	$\forall x(\text{Liker}(b, x) \to \text{Liker}(a, x))$
4:	Noen liker seg selv:	$\exists x \text{Liker}(x, x)$
5:	Bob liker alle som liker seg selv:	$\forall x(\text{Liker}(x, x) \to \text{Liker}(b, x))$
6:	Ingen liker både Alice og Bob:	$\neg\exists x(\text{Liker}(x, a) \land \text{Liker}(x, b))$
		$\forall x(\text{Liker}(x, a) \to \neg\text{Liker}(x, b))$
7:	Noen liker ikke seg selv:	$\exists x \neg\text{Liker}(x, x)$
8:	Bob liker noen som liker Alice:	$\exists x(\text{Liker}(b, x) \land \text{Liker}(x, a))$
9:	En som blir likt av alle er et idol:	

Repetisjon

I språket for beundring $\langle a, b; -; \text{Idol}, \text{Liker} \rangle$ kan vi uttrykke:

1:	Alice liker Bob:	$\text{Liker}(a, b)$
2:	Alice liker alle:	$\forall x \text{Liker}(a, x)$
3:	Alice liker alle som Bob liker:	$\forall x(\text{Liker}(b, x) \rightarrow \text{Liker}(a, x))$
4:	Noen liker seg selv:	$\exists x \text{Liker}(x, x)$
5:	Bob liker alle som liker seg selv:	$\forall x(\text{Liker}(x, x) \rightarrow \text{Liker}(b, x))$
6:	Ingen liker både Alice og Bob:	$\neg \exists x(\text{Liker}(x, a) \land \text{Liker}(x, b))$
		$\forall x(\text{Liker}(x, a) \rightarrow \neg \text{Liker}(x, b))$
7:	Noen liker ikke seg selv:	$\exists x \neg \text{Liker}(x, x)$
8:	Bob liker noen som liker Alice:	$\exists x(\text{Liker}(b, x) \land \text{Liker}(x, a))$
9:	En som blir likt av alle er et idol:	$\forall x(\forall y \text{Liker}(y, x) \rightarrow \text{Idol}(x))$

Repetisjon

I språket for beundring $\langle a, b; -; \text{Idol}, \text{Liker}\rangle$ kan vi uttrykke:

1:	Alice liker Bob:	$\text{Liker}(a, b)$
2:	Alice liker alle:	$\forall x \text{Liker}(a, x)$
3:	Alice liker alle som Bob liker:	$\forall x(\text{Liker}(b, x) \rightarrow \text{Liker}(a, x))$
4:	Noen liker seg selv:	$\exists x \text{Liker}(x, x)$
5:	Bob liker alle som liker seg selv:	$\forall x(\text{Liker}(x, x) \rightarrow \text{Liker}(b, x))$
6:	Ingen liker både Alice og Bob:	$\neg\exists x(\text{Liker}(x, a) \wedge \text{Liker}(x, b))$
		$\forall x(\text{Liker}(x, a) \rightarrow \neg\text{Liker}(x, b))$
7:	Noen liker ikke seg selv:	$\exists x \neg\text{Liker}(x, x)$
8:	Bob liker noen som liker Alice:	$\exists x(\text{Liker}(b, x) \wedge \text{Liker}(x, a))$
9:	En som blir likt av alle er et idol:	$\forall x(\forall y \text{Liker}(y, x) \rightarrow \text{Idol}(x))$
10:	Et idol blir likt av alle:	

Repetisjon

I språket for beundring $\langle a, b; -; \text{Idol}, \text{Liker}\rangle$ kan vi uttrykke:

1:	Alice liker Bob:	$\text{Liker}(a, b)$
2:	Alice liker alle:	$\forall x \text{Liker}(a, x)$
3:	Alice liker alle som Bob liker:	$\forall x(\text{Liker}(b, x) \rightarrow \text{Liker}(a, x))$
4:	Noen liker seg selv:	$\exists x \text{Liker}(x, x)$
5:	Bob liker alle som liker seg selv:	$\forall x(\text{Liker}(x, x) \rightarrow \text{Liker}(b, x))$
6:	Ingen liker både Alice og Bob:	$\neg\exists x(\text{Liker}(x, a) \land \text{Liker}(x, b))$
		$\forall x(\text{Liker}(x, a) \rightarrow \neg\text{Liker}(x, b))$
7:	Noen liker ikke seg selv:	$\exists x \neg\text{Liker}(x, x)$
8:	Bob liker noen som liker Alice:	$\exists x(\text{Liker}(b, x) \land \text{Liker}(x, a))$
9:	En som blir likt av alle er et idol:	$\forall x(\forall y \text{Liker}(y, x) \rightarrow \text{Idol}(x))$
10:	Et idol blir likt av alle:	$\forall x(\text{Idol}(x) \rightarrow \forall y \text{Liker}(y, x))$

Frie variable i termer

Frie variable i termer

Definisjon (Frie variable i en term)

Frie variable i termer

Definisjon (Frie variable i en term)

$\mathrm{FV}(t)$ *betegner mengden av frie variable i termen* t.

Frie variable i termer

Definisjon (Frie variable i en term)

$\mathrm{FV}(t)$ *betegner mengden av frie variable i termen* t.

Definisjon (Lukket term)

Frie variable i termer

Definisjon (Frie variable i en term)

$\mathrm{FV}(t)$ *betegner mengden av frie variable i termen* t.

Definisjon (Lukket term)

En term t *er lukket hvis* $\mathrm{FV}(t) = \emptyset$, *dvs.* t *inneholder ingen frie variable.*

Frie variable i termer

Definisjon (Frie variable i en term)

$\mathrm{FV}(t)$ *betegner mengden av frie variable i termen* t.

Definisjon (Lukket term)

En term t *er lukket hvis* $\mathrm{FV}(t) = \emptyset$, *dvs.* t *inneholder ingen frie variable.*

Eksempel

Frie variable i termer

Definisjon (Frie variable i en term)

$\mathrm{FV}(t)$ *betegner mengden av frie variable i termen* t.

Definisjon (Lukket term)

En term t *er lukket hvis* $\mathrm{FV}(t) = \emptyset$, *dvs.* t *inneholder ingen frie variable.*

Eksempel

I språket $\langle a, b; f; - \rangle$ *har vi:*

Frie variable i termer

Definisjon (Frie variable i en term)

$\mathrm{FV}(t)$ *betegner mengden av frie variable i termen* t.

Definisjon (Lukket term)

En term t *er lukket hvis* $\mathrm{FV}(t) = \emptyset$, *dvs.* t *inneholder ingen frie variable.*

Eksempel

I språket $\langle a, b; f; - \rangle$ *har vi:*

- *Termen* $f(x, a)$ *har en fri variabel* x.

Frie variable i termer

Definisjon (Frie variable i en term)

$\mathrm{FV}(t)$ *betegner mengden av frie variable i termen* t.

Definisjon (Lukket term)

En term t *er lukket hvis* $\mathrm{FV}(t) = \emptyset$, *dvs.* t *inneholder ingen frie variable.*

Eksempel

I språket $\langle a, b; f; - \rangle$ *har vi:*

- *Termen* $f(x, a)$ *har en fri variabel* x.
- *Termen* $f(a, b)$ *har ingen frie variable og er en lukket term.*

Rekursive definisjoner

Rekursive definisjoner

Når mengder er definert *induktivt*, så kan vi definere funksjoner over denne mengden rekursivt ved å

Rekursive definisjoner

Når mengder er definert *induktivt*, så kan vi definere funksjoner over denne mengden rekursivt ved å

1. gi verdi til de “atomære” elementene (i basismengden), og

Rekursive definisjoner

Når mengder er definert *induktivt*, så kan vi definere funksjoner over denne mengden rekursivt ved å

1. gi verdi til de "atomære" elementene (i basismengden), og
2. gi verdi til "sammensatte" elementene (fra induksjonssteget) ved å bruke verdiene som ble gitt til komponentene.

Rekursive definisjoner

Når mengder er definert *induktivt*, så kan vi definere funksjoner over denne mengden rekursivt ved å

1. gi verdi til de “atomære” elementene (i basismengden), og
2. gi verdi til “sammensatte” elementene (fra induksjonssteget) ved å bruke verdiene som ble gitt til komponentene.

Den presise, rekursive definisjonen av FV er følgende.

Rekursive definisjoner

Når mengder er definert *induktivt*, så kan vi definere funksjoner over denne mengden rekursivt ved å

1. gi verdi til de "atomære" elementene (i basismengden), og
2. gi verdi til "sammensatte" elementene (fra induksjonssteget) ved å bruke verdiene som ble gitt til komponentene.

Den presise, rekursive definisjonen av FV er følgende.

Definisjon (Frie variable - definert rekursivt)

Rekursive definisjoner

Når mengder er definert *induktivt*, så kan vi definere funksjoner over denne mengden rekursivt ved å

1. gi verdi til de "atomære" elementene (i basismengden), og
2. gi verdi til "sammensatte" elementene (fra induksjonssteget) ved å bruke verdiene som ble gitt til komponentene.

Den presise, rekursive definisjonen av FV er følgende.

Definisjon (Frie variable - definert rekursivt)

Gitt en term t, la mengden $\mathrm{FV}(t)$ *av frie variable i t være definert rekursivt ved:*

Rekursive definisjoner

Når mengder er definert *induktivt*, så kan vi definere funksjoner over denne mengden rekursivt ved å

1. gi verdi til de "atomære" elementene (i basismengden), og
2. gi verdi til "sammensatte" elementene (fra induksjonssteget) ved å bruke verdiene som ble gitt til komponentene.

Den presise, rekursive definisjonen av FV er følgende.

Definisjon (Frie variable - definert rekursivt)

Gitt en term t, la mengden $\mathrm{FV}(t)$ *av frie variable i t være definert rekursivt ved:*

- $\mathrm{FV}(x_i) = \{x_i\}$, *for en variabel x_i, og*

Rekursive definisjoner

Når mengder er definert *induktivt*, så kan vi definere funksjoner over denne mengden rekursivt ved å

1. gi verdi til de "atomære" elementene (i basismengden), og
2. gi verdi til "sammensatte" elementene (fra induksjonssteget) ved å bruke verdiene som ble gitt til komponentene.

Den presise, rekursive definisjonen av FV er følgende.

Definisjon (Frie variable - definert rekursivt)

Gitt en term t, la mengden $\mathrm{FV}(t)$ *av frie variable i t være definert rekursivt ved:*

- $\mathrm{FV}(x_i) = \{x_i\}$, *for en variabel x_i, og*
- $\mathrm{FV}(c_i) = \emptyset$, *for en konstant c_i, og*

Rekursive definisjoner

Når mengder er definert *induktivt*, så kan vi definere funksjoner over denne mengden rekursivt ved å

1. gi verdi til de "atomære" elementene (i basismengden), og
2. gi verdi til "sammensatte" elementene (fra induksjonssteget) ved å bruke verdiene som ble gitt til komponentene.

Den presise, rekursive definisjonen av FV er følgende.

Definisjon (Frie variable - definert rekursivt)

Gitt en term t, la mengden $\mathrm{FV}(t)$ *av frie variable i t være definert rekursivt ved:*

- $\mathrm{FV}(x_i) = \{x_i\}$, *for en variabel x_i, og*
- $\mathrm{FV}(c_i) = \emptyset$, *for en konstant c_i, og*
- $\mathrm{FV}(f(t_1, \ldots, t_n)) = \mathrm{FV}(t_1) \cup \cdots \cup \mathrm{FV}(t_n)$, *for et funksjonssymbol f med aritet n.*

Frie variable i formler

Frie variable i formler

Definisjon (Frie variable i en formel)

En variabelforekomst i en førsteordens formel er fri hvis den ikke er bundet, dvs. hvis den ikke er innenfor skopet til en kvantor. Vi skriver $\mathsf{FV}(\varphi)$ *for mengden av frie variable i* φ.

Frie variable i formler

Definisjon (Frie variable i en formel)

En variabelforekomst i en førsteordens formel er fri hvis den ikke er bundet, dvs. hvis den ikke er innenfor skopet til en kvantor. Vi skriver FV(φ) *for mengden av frie variable i* φ.

Eksempel ($\forall x Rxy \wedge Pz$)

Frie variable i formler

Definisjon (Frie variable i en formel)

En variabelforekomst i en førsteordens formel er fri hvis den ikke er bundet, dvs. hvis den ikke er innenfor skopet til en kvantor. Vi skriver FV(φ) *for mengden av frie variable i* φ.

Eksempel ($\forall x Rxy \wedge Pz$)

- x *er bundet*

Frie variable i formler

Definisjon (Frie variable i en formel)

En variabelforekomst i en førsteordens formel er fri hvis den ikke er bundet, dvs. hvis den ikke er innenfor skopet til en kvantor. Vi skriver $\mathrm{FV}(\varphi)$ *for mengden av frie variable i* φ.

Eksempel ($\forall xRxy \land Pz$)

- x *er bundet*
- y *er fri*

Frie variable i formler

Definisjon (Frie variable i en formel)

En variabelforekomst i en førsteordens formel er fri hvis den ikke er bundet, dvs. hvis den ikke er innenfor skopet til en kvantor. Vi skriver FV(φ) *for mengden av frie variable i* φ*.*

Eksempel ($\forall xRxy \land Pz$)

- x *er bundet*
- y *er fri*
- z *er fri*

Frie variable i formler

Definisjon (Frie variable i en formel)

En variabelforekomst i en førsteordens formel er fri hvis den ikke er bundet, dvs. hvis den ikke er innenfor skopet til en kvantor. Vi skriver $\mathrm{FV}(\varphi)$ *for mengden av frie variable i* φ*.*

Eksempel ($\forall xRxy \land Pz$)

- x *er bundet*
- y *er fri*
- z *er fri*

Eksempel ($\forall xPxy \rightarrow \forall zPzx$)

Frie variable i formler

Definisjon (Frie variable i en formel)

En variabelforekomst i en førsteordens formel er fri hvis den ikke er bundet, dvs. hvis den ikke er innenfor skopet til en kvantor. Vi skriver $\mathrm{FV}(\varphi)$ *for mengden av frie variable i* φ*.*

Eksempel ($\forall xRxy \land Pz$)

- x *er bundet*
- y *er fri*
- z *er fri*

Eksempel ($\forall xPxy \to \forall zPzx$)

- x *er bundet*

Frie variable i formler

Definisjon (Frie variable i en formel)

En variabelforekomst i en førsteordens formel er fri *hvis den ikke er bundet, dvs. hvis den ikke er innenfor skopet til en kvantor. Vi skriver* FV(φ) *for mengden av frie variable i* φ.

Eksempel ($\forall xRxy \land Pz$)

- x *er bundet*
- y *er fri*
- z *er fri*

Eksempel ($\forall xPxy \to \forall zPzx$)

- x *er bundet*
- x *er fri*

Frie variable i formler

Definisjon (Frie variable i en formel)

En variabelforekomst i en førsteordens formel er fri hvis den ikke er bundet, dvs. hvis den ikke er innenfor skopet til en kvantor. Vi skriver $\mathrm{FV}(\varphi)$ *for mengden av frie variable i* φ*.*

Eksempel ($\forall x Rxy \land Pz$)

- x *er bundet*
- y *er fri*
- z *er fri*

Eksempel ($\forall x Pxy \to \forall z Pzx$)

- x *er bundet*
- x *er fri*
- y *er fri*

Frie variable i formler

Definisjon (Frie variable i en formel)

En variabelforekomst i en førsteordens formel er fri hvis den ikke er bundet, dvs. hvis den ikke er innenfor skopet til en kvantor. Vi skriver FV(φ) *for mengden av frie variable i* φ*.*

Eksempel ($\forall xRxy \land Pz$)

- x *er bundet*
- y *er fri*
- z *er fri*

Eksempel ($\forall xPxy \to \forall zPzx$)

- x *er bundet*
- x *er fri*
- y *er fri*
- z *er bundet*

Frie variable i formler

Definisjon (Frie variable i en formel)

En variabelforekomst i en førsteordens formel er fri hvis den ikke er bundet, dvs. hvis den ikke er innenfor skopet til en kvantor. Vi skriver FV(φ) *for mengden av frie variable i* φ.

Eksempel ($\forall xRxy \land Pz$)

- x *er bundet*
- y *er fri*
- z *er fri*

Eksempel ($\forall xPxy \to \forall zPzx$)

- x *er bundet*
- x *er fri*
- y *er fri*
- z *er bundet*

Oppgave

Gi den presise, rekursive, definisjonen av frie variable i en formel.

Substitusjoner

Substitusjoner

Definisjon (Substitusjon for termer)

Substitusjoner

Definisjon (Substitusjon for termer)

La s og t være termer og x en variabel. Da er $s[t/x]$, det vi får ved å erstatte alle forekomster av x i s med t, definert rekursivt ved:

Substitusjoner

Definisjon (Substitusjon for termer)

La s og t være termer og x en variabel. Da er $s[t/x]$, det vi får ved å erstatte alle forekomster av x i s med t, definert rekursivt ved:

1. $y[t/x] = \begin{cases} t & \text{hvis } x = y \\ y & \text{ellers} \end{cases}$ *(når s er en variabel y).*

Substitusjoner

Definisjon (Substitusjon for termer)

La s og t være termer og x en variabel. Da er $s[t/x]$, det vi får ved å erstatte alle forekomster av x i s med t, definert rekursivt ved:

1. $y[t/x] = \begin{cases} t & \text{hvis } x = y \\ y & \text{ellers} \end{cases}$ *(når s er en variabel y).*
2. $c[t/x] = c$ *(når s er en konstant c).*

Substitusjoner

Definisjon (Substitusjon for termer)

La s og t være termer og x en variabel. Da er $s[t/x]$, det vi får ved å erstatte alle forekomster av x i s med t, definert rekursivt ved:

1. $y[t/x] = \begin{cases} t & \text{hvis } x = y \\ y & \text{ellers} \end{cases}$ *(når s er en variabel y).*
2. $c[t/x] = c$ *(når s er en konstant c).*
3. $f(t_1[t/x], \ldots, t_n[t/x])$ *(når s er en funksjonsterm $f(t_1, \ldots, t_n)$).*

Substitusjoner

Definisjon (Substitusjon for termer)

La s og t være termer og x en variabel. Da er $s[t/x]$, det vi får ved å erstatte alle forekomster av x i s med t, definert rekursivt ved:

1. $y[t/x] = \begin{cases} t & \textit{hvis } x = y \\ y & \textit{ellers} \end{cases}$ *(når s er en variabel y).*
2. $c[t/x] = c$ *(når s er en konstant c).*
3. $f(t_1[t/x], \ldots, t_n[t/x])$ *(når s er en funksjonsterm $f(t_1, \ldots, t_n)$).*

Eksempel

Substitusjoner

Definisjon (Substitusjon for termer)

La s og t være termer og x en variabel. Da er $s[t/x]$, det vi får ved å erstatte alle forekomster av x i s med t, definert rekursivt ved:

1. $y[t/x] = \begin{cases} t & \textit{hvis } x = y \\ y & \textit{ellers} \end{cases}$ *(når s er en variabel y).*
2. $c[t/x] = c$ *(når s er en konstant c).*
3. $f(t_1[t/x], \ldots, t_n[t/x])$ *(når s er en funksjonsterm $f(t_1, \ldots, t_n)$).*

Eksempel

- $f(x, y, a)[y/x]$

Substitusjoner

Definisjon (Substitusjon for termer)

La s og t være termer og x en variabel. Da er $s[t/x]$, det vi får ved å erstatte alle forekomster av x i s med t, definert rekursivt ved:

1. $y[t/x] = \begin{cases} t & \text{hvis } x = y \\ y & \text{ellers} \end{cases}$ *(når s er en variabel y).*
2. $c[t/x] = c$ *(når s er en konstant c).*
3. $f(t_1[t/x], \ldots, t_n[t/x])$ *(når s er en funksjonsterm $f(t_1, \ldots, t_n)$).*

Eksempel

- $f(x, y, a)[y/x] = f(x[y/x], y[y/x], a[y/x])$

Substitusjoner

Definisjon (Substitusjon for termer)

La s og t være termer og x en variabel. Da er $s[t/x]$, det vi får ved å erstatte alle forekomster av x i s med t, definert rekursivt ved:

1. $y[t/x] = \begin{cases} t & \textit{hvis } x = y \\ y & \textit{ellers} \end{cases}$ *(når s er en variabel y).*
2. $c[t/x] = c$ *(når s er en konstant c).*
3. $f(t_1[t/x], \ldots, t_n[t/x])$ *(når s er en funksjonsterm $f(t_1, \ldots, t_n)$).*

Eksempel

- $f(x, y, a)[y/x] = f(x[y/x], y[y/x], a[y/x]) = f(y, y, a)$

Substitusjoner

Definisjon (Substitusjon for termer)

La s og t være termer og x en variabel. Da er $s[t/x]$, det vi får ved å erstatte alle forekomster av x i s med t, definert rekursivt ved:

1. $y[t/x] = \begin{cases} t & \text{hvis } x = y \\ y & \text{ellers} \end{cases}$ *(når s er en variabel y).*
2. $c[t/x] = c$ *(når s er en konstant c).*
3. $f(t_1[t/x], \ldots, t_n[t/x])$ *(når s er en funksjonsterm $f(t_1, \ldots, t_n)$).*

Eksempel

- $f(x, y, a)[y/x] = f(x[y/x], y[y/x], a[y/x]) = f(y, y, a)$
- $f(y, y, a)[b/y]$

Substitusjoner

Definisjon (Substitusjon for termer)

La s og t være termer og x en variabel. Da er $s[t/x]$, det vi får ved å erstatte alle forekomster av x i s med t, definert rekursivt ved:

1. $y[t/x] = \begin{cases} t & \textit{hvis } x = y \\ y & \textit{ellers} \end{cases}$ *(når s er en variabel y).*
2. $c[t/x] = c$ *(når s er en konstant c).*
3. $f(t_1[t/x], \ldots, t_n[t/x])$ *(når s er en funksjonsterm $f(t_1, \ldots, t_n)$).*

Eksempel

- $f(x, y, a)[y/x] = f(x[y/x], y[y/x], a[y/x]) = f(y, y, a)$
- $f(y, y, a)[b/y] = f(y[b/y], y[b/y], a[b/y])$

Substitusjoner

Definisjon (Substitusjon for termer)

La s og t være termer og x en variabel. Da er $s[t/x]$, det vi får ved å erstatte alle forekomster av x i s med t, definert rekursivt ved:

1. $y[t/x] = \begin{cases} t & \text{hvis } x = y \\ y & \text{ellers} \end{cases}$ *(når s er en variabel y).*
2. $c[t/x] = c$ *(når s er en konstant c).*
3. $f(t_1[t/x], \ldots, t_n[t/x])$ *(når s er en funksjonsterm $f(t_1, \ldots, t_n)$).*

Eksempel

- $f(x, y, a)[y/x] = f(x[y/x], y[y/x], a[y/x]) = f(y, y, a)$
- $f(y, y, a)[b/y] = f(y[b/y], y[b/y], a[b/y]) = f(b, b, a)$

Substitusjoner

Substitusjoner

Definisjon (Substitusjon for formler)

Substitusjoner

Definisjon (Substitusjon for formler)

$\varphi[t/x]$ *er definert rekursivt ved:*

Substitusjoner

Definisjon (Substitusjon for formler)

$\varphi[t/x]$ *er definert rekursivt ved:*

1. $R(t_1, \ldots, t_n)[t/x]$

Substitusjoner

Definisjon (Substitusjon for formler)

$\varphi[t/x]$ *er definert rekursivt ved:*

1. $R(t_1, \ldots, t_n)[t/x] = R(t_1[t/x], \ldots, t_n[t/x])$

Substitusjoner

Definisjon (Substitusjon for formler)

$\varphi[t/x]$ *er definert rekursivt ved:*

1. $R(t_1, \ldots, t_n)[t/x] = R(t_1[t/x], \ldots, t_n[t/x])$
2. $\neg\psi[t/x]$

Substitusjoner

Definisjon (Substitusjon for formler)

$\varphi[t/x]$ er definert rekursivt ved:

1. $R(t_1, \ldots, t_n)[t/x] = R(t_1[t/x], \ldots, t_n[t/x])$
2. $\neg\psi[t/x] = \neg(\psi[t/x])$

Substitusjoner

Definisjon (Substitusjon for formler)

$\varphi[t/x]$ er definert rekursivt ved:

1. $R(t_1, \ldots, t_n)[t/x] = R(t_1[t/x], \ldots, t_n[t/x])$
2. $\neg\psi[t/x] = \neg(\psi[t/x])$
3. $(\varphi_1 \circ \varphi_2)[t/x]$ *hvor* $\circ \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$

Substitusjoner

Definisjon (Substitusjon for formler)

$\varphi[t/x]$ *er definert rekursivt ved:*

1. $R(t_1, \ldots, t_n)[t/x] = R(t_1[t/x], \ldots, t_n[t/x])$
2. $\neg\psi[t/x] = \neg(\psi[t/x])$
3. $(\varphi_1 \circ \varphi_2)[t/x] = (\varphi_1[t/x] \circ \varphi_2[t/x])$, *hvor* $\circ \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$

Substitusjoner

Definisjon (Substitusjon for formler)

$\varphi[t/x]$ er definert rekursivt ved:

1. $R(t_1, \ldots, t_n)[t/x] = R(t_1[t/x], \ldots, t_n[t/x])$
2. $\neg\psi[t/x] = \neg(\psi[t/x])$
3. $(\varphi_1 \circ \varphi_2)[t/x] = (\varphi_1[t/x] \circ \varphi_2[t/x])$, *hvor* $\circ \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$
4. $\mathrm{Q}y\psi[t/x] =$, *hvor* $\mathrm{Q} \in \{\forall, \exists\}$

Substitusjoner

Definisjon (Substitusjon for formler)

$\varphi[t/x]$ *er definert rekursivt ved:*

1. $R(t_1, \ldots, t_n)[t/x] = R(t_1[t/x], \ldots, t_n[t/x])$
2. $\neg\psi[t/x] = \neg(\psi[t/x])$
3. $(\varphi_1 \circ \varphi_2)[t/x] = (\varphi_1[t/x] \circ \varphi_2[t/x])$, *hvor* $\circ \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$
4. $\mathrm{Q}y\psi[t/x] = \begin{cases} \mathrm{Q}y(\psi[t/x]) & \textit{hvis } x \neq y \\ \mathrm{Q}y\psi & \textit{ellers} \end{cases}$, *hvor* $\mathrm{Q} \in \{\forall, \exists\}$

Substitusjoner

Definisjon (Substitusjon for formler)

$\varphi[t/x]$ *er definert rekursivt ved:*

1. $R(t_1, \ldots, t_n)[t/x] = R(t_1[t/x], \ldots, t_n[t/x])$
2. $\neg\psi[t/x] = \neg(\psi[t/x])$
3. $(\varphi_1 \circ \varphi_2)[t/x] = (\varphi_1[t/x] \circ \varphi_2[t/x])$, *hvor* $\circ \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$
4. $\mathrm{Q}y\psi[t/x] = \begin{cases} \mathrm{Q}y(\psi[t/x]) & \textit{hvis } x \neq y \\ \mathrm{Q}y\psi & \textit{ellers} \end{cases}$, *hvor* $\mathrm{Q} \in \{\forall, \exists\}$

Eksempel

Substitusjoner

Definisjon (Substitusjon for formler)

$\varphi[t/x]$ *er definert rekursivt ved:*

1. $R(t_1, \dots, t_n)[t/x] = R(t_1[t/x], \dots, t_n[t/x])$
2. $\neg\psi[t/x] = \neg(\psi[t/x])$
3. $(\varphi_1 \circ \varphi_2)[t/x] = (\varphi_1[t/x] \circ \varphi_2[t/x])$, *hvor* $\circ \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$
4. $\mathrm{Q}y\psi[t/x] = \begin{cases} \mathrm{Q}y(\psi[t/x]) & \textit{hvis } x \neq y \\ \mathrm{Q}y\psi & \textit{ellers} \end{cases}$, *hvor* $\mathrm{Q} \in \{\forall, \exists\}$

Eksempel

- $(Pxy \wedge \forall x Pxy)[a/x]$

Substitusjoner

Definisjon (Substitusjon for formler)

$\varphi[t/x]$ *er definert rekursivt ved:*

1. $R(t_1,\ldots,t_n)[t/x] = R(t_1[t/x],\ldots,t_n[t/x])$
2. $\neg\psi[t/x] = \neg(\psi[t/x])$
3. $(\varphi_1 \circ \varphi_2)[t/x] = (\varphi_1[t/x] \circ \varphi_2[t/x])$, *hvor* $\circ \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$
4. $\mathsf{Q}y\psi[t/x] = \begin{cases} \mathsf{Q}y(\psi[t/x]) & \textit{hvis } x \neq y \\ \mathsf{Q}y\psi & \textit{ellers} \end{cases}$, *hvor* $\mathsf{Q} \in \{\forall, \exists\}$

Eksempel

- $(Pxy \wedge \forall x Pxy)[a/x] = (Pay \wedge \forall x Pxy)$

Substitusjoner

Definisjon (Substitusjon for formler)

$\varphi[t/x]$ *er definert rekursivt ved:*

1. $R(t_1, \ldots, t_n)[t/x] = R(t_1[t/x], \ldots, t_n[t/x])$
2. $\neg\psi[t/x] = \neg(\psi[t/x])$
3. $(\varphi_1 \circ \varphi_2)[t/x] = (\varphi_1[t/x] \circ \varphi_2[t/x])$, *hvor* $\circ \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$
4. $\mathsf{Q}y\psi[t/x] = \begin{cases} \mathsf{Q}y(\psi[t/x]) & \text{hvis } x \neq y \\ \mathsf{Q}y\psi & \text{ellers} \end{cases}$, *hvor* $\mathsf{Q} \in \{\forall, \exists\}$

Eksempel

- $(Pxy \wedge \forall xPxy)[a/x] = (Pay \wedge \forall xPxy)$
- $(Pxy \wedge \forall xPxy)[a/y]$

Substitusjoner

Definisjon (Substitusjon for formler)

$\varphi[t/x]$ er definert rekursivt ved:

1. $R(t_1, \ldots, t_n)[t/x] = R(t_1[t/x], \ldots, t_n[t/x])$
2. $\neg\psi[t/x] = \neg(\psi[t/x])$
3. $(\varphi_1 \circ \varphi_2)[t/x] = (\varphi_1[t/x] \circ \varphi_2[t/x])$, *hvor* $\circ \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$
4. $\mathrm{Q}y\psi[t/x] = \begin{cases} \mathrm{Q}y(\psi[t/x]) & \textit{hvis } x \neq y \\ \mathrm{Q}y\psi & \textit{ellers} \end{cases}$, *hvor* $\mathrm{Q} \in \{\forall, \exists\}$

Eksempel

- $(Pxy \wedge \forall xPxy)[a/x] = (Pay \wedge \forall xPxy)$
- $(Pxy \wedge \forall xPxy)[a/y] = (Pxa \wedge \forall xPxa)$

Substitusjoner

Substitusjoner

- Vi ser at substitusjon ikke blir gjort for bundne variable.

Substitusjoner

- Vi ser at substitusjon ikke blir gjort for bundne variable.
- Vi har enda et tilfelle hvor vi ønsker å forhindre substitusjon.

Substitusjoner

- Vi ser at substitusjon ikke blir gjort for bundne variable.
- Vi har enda et tilfelle hvor vi ønsker å forhindre substitusjon.

Eksempel

Substitusjoner

- Vi ser at substitusjon ikke blir gjort for bundne variable.
- Vi har enda et tilfelle hvor vi ønsker å forhindre substitusjon.

Eksempel

- $\exists x \mathrm{Liker}(x, y)[f(x)/y]$

Substitusjoner

- Vi ser at substitusjon ikke blir gjort for bundne variable.
- Vi har enda et tilfelle hvor vi ønsker å forhindre substitusjon.

Eksempel

- $\exists x \mathrm{Liker}(x, y)[f(x)/y] = \exists x \mathrm{Liker}(x, f(x))$

Substitusjoner

- Vi ser at substitusjon ikke blir gjort for bundne variable.
- Vi har enda et tilfelle hvor vi ønsker å forhindre substitusjon.

Eksempel

- $\exists x \mathrm{Liker}(x, y)[f(x)/y] = \exists x \mathrm{Liker}(x, f(x))$

- Her blir en variabel bundet *etter* substitusjon.

Substitusjoner

- Vi ser at substitusjon ikke blir gjort for bundne variable.
- Vi har enda et tilfelle hvor vi ønsker å forhindre substitusjon.

Eksempel

- $\exists x \text{Liker}(x, y)[f(x)/y] = \exists x \text{Liker}(x, f(x))$

- Her blir en variabel bundet *etter* substitusjon.
- Dette kan endre meningen til en formel på en måte som vi ikke ønsker.

Substitusjoner

Definisjon

Substitusjoner

Definisjon

Vi sier at t er fri for x i φ *hvis ingen variabel i t blir bundet som følge av å substitutere t for x i* φ.

Substitusjoner

Definisjon

Vi sier at t er fri for x i φ hvis ingen variabel i t blir bundet som følge av å substitutere t for x i φ.

Eksempel

Termen $f(x)$ er ikke fri for y i formelen $\exists x \mathrm{Liker}(x, y)$.

Substitusjoner

Definisjon

Vi sier at t er fri for x i φ hvis ingen variabel i t blir bundet som følge av å substitutere t for x i φ.

Eksempel

Termen $f(x)$ er ikke fri for y i formelen $\exists x \mathrm{Liker}(x, y)$.

- En måte å unngå dette på er å omdøpe bundne variable først.

Substitusjoner

Definisjon

Vi sier at t er fri for x i φ hvis ingen variabel i t blir bundet som følge av å substitutere t for x i φ.

Eksempel

Termen $f(x)$ er ikke fri for y i formelen $\exists x \mathrm{Liker}(x, y)$.

- En måte å unngå dette på er å omdøpe bundne variable først.
- F.eks. se på $\exists z \mathrm{Liker}(z, y)$ i stedet for $\exists x \mathrm{Liker}(x, y)$.

Substitusjoner

Definisjon

Vi sier at t er fri for x i φ *hvis ingen variabel i t blir bundet som følge av å substituere t for x i* φ.

Eksempel

Termen $f(x)$ *er ikke fri for* y *i formelen* $\exists x \mathrm{Liker}(x, y)$.

- En måte å unngå dette på er å omdøpe bundne variable først.
- F.eks. se på $\exists z \mathrm{Liker}(z, y)$ i stedet for $\exists x \mathrm{Liker}(x, y)$.
- Fra nå av antar vi at alle substitusjoner er "fri for", dvs. at ingen variable blir bundet som følge av en substitusjon.

Lukkede og åpne formler

Lukkede og åpne formler

Definisjon (Lukket/åpen formel)

Lukkede og åpne formler

Definisjon (Lukket/åpen formel)

En formel φ *er* *lukket* *hvis* $\mathsf{FV}(\varphi) = \emptyset$, *dvs.* φ *inneholder ingen frie variable.*

Lukkede og åpne formler

Definisjon (Lukket/åpen formel)

En formel φ er lukket hvis $\mathrm{FV}(\varphi) = \emptyset$, *dvs. φ inneholder ingen frie variable. En formel er åpen hvis den ikke inneholder noen kvantorer.*

Lukkede og åpne formler

Definisjon (Lukket/åpen formel)

En formel φ *er lukket hvis* $\mathsf{FV}(\varphi) = \emptyset$*, dvs.* φ *inneholder ingen frie variable. En formel er åpen hvis den ikke inneholder noen kvantorer.*

Eksempel

Lukkede og åpne formler

Definisjon (Lukket/åpen formel)

En formel φ er lukket hvis $\mathsf{FV}(\varphi) = \emptyset$, *dvs. φ inneholder ingen frie variable. En formel er åpen hvis den ikke inneholder noen kvantorer.*

Eksempel

- $\forall xPxa$ *er lukket*

Lukkede og åpne formler

Definisjon (Lukket/åpen formel)

En formel φ er lukket hvis $\mathrm{FV}(\varphi) = \emptyset$, dvs. φ inneholder ingen frie variable. En formel er åpen hvis den ikke inneholder noen kvantorer.

Eksempel

- $\forall xPxa$ *er lukket*
- $\forall xPxy$ *er ikke lukket*

Lukkede og åpne formler

Definisjon (Lukket/åpen formel)

En formel φ er lukket hvis $\mathsf{FV}(\varphi) = \emptyset$, dvs. φ inneholder ingen frie variable. En formel er åpen hvis den ikke inneholder noen kvantorer.

Eksempel

- $\forall x Pxa$ *er lukket*
- $\forall x Pxy$ *er ikke lukket*
- Pxy *er ikke lukket, men åpen*

Lukkede og åpne formler

Definisjon (Lukket/åpen formel)

En formel φ er lukket hvis $\mathsf{FV}(\varphi) = \emptyset$, dvs. φ inneholder ingen frie variable. En formel er åpen hvis den ikke inneholder noen kvantorer.

Eksempel

- $\forall xPxa$ *er lukket*
- $\forall xPxy$ *er ikke lukket*
- Pxy *er ikke lukket, men åpen*
- Pab *er åpen og lukket*

2 Førsteordens logikk - semantikk

Introduksjon

Introduksjon

- Hvordan skal vi tolke førsteordens formler?

Introduksjon

- Hvordan skal vi tolke førsteordens formler?
- Hva skal $\forall x \varphi$ og $\exists x \varphi$ bety?

Introduksjon

- Hvordan skal vi tolke førsteordens formler?
- Hva skal $\forall x \varphi$ og $\exists x \varphi$ bety?
- Hva kan vi bruke førsteordens formler til å uttrykke?

Introduksjon

- Hvordan skal vi tolke førsteordens formler?
- Hva skal $\forall x \varphi$ og $\exists x \varphi$ bety?
- Hva kan vi bruke førsteordens formler til å uttrykke?

  (Hva er det førsteordens formler *ikke* kan uttrykke?)

Introduksjon

- Hvordan skal vi tolke førsteordens formler?
- Hva skal $\forall x \varphi$ og $\exists x \varphi$ bety?
- Hva kan vi bruke førsteordens formler til å uttrykke?
  (Hva er det førsteordens formler *ikke* kan uttrykke?)
- Hva gjør en formel sann / gyldig / oppfyllbar?

Introduksjon

- Hvordan skal vi tolke førsteordens formler?
- Hva skal $\forall x \varphi$ og $\exists x \varphi$ bety?
- Hva kan vi bruke førsteordens formler til å uttrykke?
  (Hva er det førsteordens formler *ikke* kan uttrykke?)
- Hva gjør en formel sann / gyldig / oppfyllbar?
- Å gi en semantikk er å si noe om forholdet mellom språk og virkelighet.

Introduksjon

- Hvordan skal vi tolke førsteordens formler?
- Hva skal $\forall x \varphi$ og $\exists x \varphi$ bety?
- Hva kan vi bruke førsteordens formler til å uttrykke?

  (Hva er det førsteordens formler *ikke* kan uttrykke?)
- Hva gjør en formel sann / gyldig / oppfyllbar?
- Å gi en semantikk er å si noe om forholdet mellom språk og virkelighet.
  - Valuasjoner gir en semantikk for klassisk utsagnslogikk.

Introduksjon

- Hvordan skal vi tolke førsteordens formler?
- Hva skal $\forall x \varphi$ og $\exists x \varphi$ bety?
- Hva kan vi bruke førsteordens formler til å uttrykke?
  (Hva er det førsteordens formler *ikke* kan uttrykke?)
- Hva gjør en formel sann / gyldig / oppfyllbar?
- Å gi en semantikk er å si noe om forholdet mellom språk og virkelighet.
  - Valuasjoner gir en semantikk for klassisk utsagnslogikk.
- I førsteordens logikk vil modeller gi oss en semantikk.

Introduksjon

Introduksjon

En modell består intuitivt av

Introduksjon

En modell består intuitivt av

1. en mengde, og

Introduksjon

En modell består intuitivt av

1. en mengde, og
2. en tolkning av alle ikke-logiske symboler slik at

Introduksjon

En modell består intuitivt av

1. en mengde, og
2. en tolkning av alle ikke-logiske symboler slik at
   - et konstantsymbol tolkes som et element i mengden,

Introduksjon

En modell består intuitivt av

1. en mengde, og
2. en tolkning av alle ikke-logiske symboler slik at
   - et konstantsymbol tolkes som et element i mengden,
   - et funksjonssymbol tolkes som en funksjon på mengden, og

Introduksjon

En modell består intuitivt av

1. en mengde, og
2. en tolkning av alle ikke-logiske symboler slik at
   - et konstantsymbol tolkes som et element i mengden,
   - et funksjonssymbol tolkes som en funksjon på mengden, og
   - et relasjonssymbol tolkes som en relasjon på mengden.

Introduksjon

En modell består intuitivt av

1. en mengde, og
2. en tolkning av alle ikke-logiske symboler slik at
   - et konstantsymbol tolkes som et element i mengden,
   - et funksjonssymbol tolkes som en funksjon på mengden, og
   - et relasjonssymbol tolkes som en relasjon på mengden.

Vi skal først definere modeller helt presist, også skal vi definere hva det vil si at en formel er sann i en modell.

Introduksjon

En modell består intuitivt av

1. en mengde, og
2. en tolkning av alle ikke-logiske symboler slik at
   - et konstantsymbol tolkes som et element i mengden,
   - et funksjonssymbol tolkes som en funksjon på mengden, og
   - et relasjonssymbol tolkes som en relasjon på mengden.

Vi skal først definere modeller helt presist, også skal vi definere hva det vil si at en formel er sann i en modell.

Husk

Introduksjon

En modell består intuitivt av

1. en mengde, og
2. en tolkning av alle ikke-logiske symboler slik at
   - et konstantsymbol tolkes som et element i mengden,
   - et funksjonssymbol tolkes som en funksjon på mengden, og
   - et relasjonssymbol tolkes som en relasjon på mengden.

Vi skal først definere modeller helt presist, også skal vi definere hva det vil si at en formel er sann i en modell.

Husk

Hvis D en mengde, så består D^n av alle n-tupler av elementer fra D, for $n \geq 0$.

Introduksjon

En modell består intuitivt av

1. en mengde, og
2. en tolkning av alle ikke-logiske symboler slik at
   - et konstantsymbol tolkes som et element i mengden,
   - et funksjonssymbol tolkes som en funksjon på mengden, og
   - et relasjonssymbol tolkes som en relasjon på mengden.

Vi skal først definere modeller helt presist, også skal vi definere hva det vil si at en formel er sann i en modell.

Husk

Hvis D en mengde, så består D^n av alle n-tupler av elementer fra D, for $n \geq 0$.

$$D^n = \{\langle d_1, \ldots, d_n \rangle \mid d_1, \ldots, d_n \in D\}$$

Modeller

Modeller

La et førsteordens språk $\mathcal{L}$ være gitt.

Modeller

La et førsteordens språk $\mathcal{L}$ være gitt.

Definisjon (Modell)

Modeller

La et førsteordens språk $\mathcal{L}$ være gitt.

Definisjon (Modell)

En modell $\mathcal{M}$ for $\mathcal{L}$ består av en ikke-tom mengde D, kalt domenet til $\mathcal{M}$, og en funksjon $(\cdot)^{\mathcal{M}}$ som tolker alle ikke-logiske symboler på følgende måte:

Modeller

La et førsteordens språk $\mathcal{L}$ være gitt.

Definisjon (Modell)

En modell $\mathcal{M}$ for $\mathcal{L}$ består av en ikke-tom mengde D, kalt domenet til $\mathcal{M}$, og en funksjon $(\cdot)^{\mathcal{M}}$ som tolker alle ikke-logiske symboler på følgende måte:

- *Hvis c er et konstantsymbol,*

Modeller

La et førsteordens språk $\mathcal{L}$ være gitt.

Definisjon (Modell)

En modell $\mathcal{M}$ for $\mathcal{L}$ består av en ikke-tom mengde D, kalt domenet til $\mathcal{M}$, og en funksjon $(\cdot)^{\mathcal{M}}$ som tolker alle ikke-logiske symboler på følgende måte:

- *Hvis c er et konstantsymbol, så er $c^{\mathcal{M}} \in D$.*

Modeller

La et førsteordens språk $\mathcal{L}$ være gitt.

Definisjon (Modell)

En modell $\mathcal{M}$ for $\mathcal{L}$ består av en ikke-tom mengde D, kalt domenet til $\mathcal{M}$, og en funksjon $(\cdot)^{\mathcal{M}}$ som tolker alle ikke-logiske symboler på følgende måte:

- *Hvis c er et konstantsymbol, så er $c^{\mathcal{M}} \in D$.*
- *Hvis f er et funksjonsymbol med aritet n,*

Modeller

La et førsteordens språk $\mathcal{L}$ være gitt.

Definisjon (Modell)

En modell $\mathcal{M}$ for $\mathcal{L}$ består av en ikke-tom mengde D, kalt domenet til $\mathcal{M}$, og en funksjon $(\cdot)^{\mathcal{M}}$ som tolker alle ikke-logiske symboler på følgende måte:

- *Hvis c er et konstantsymbol, så er $c^{\mathcal{M}} \in D$.*
- *Hvis f er et funksjonsymbol med aritet n,så er $f^{\mathcal{M}}$ en funksjon fra $D^n = \underbrace{D \times \cdots \times D}_{n}$ til D.*

Modeller

La et førsteordens språk $\mathcal{L}$ være gitt.

Definisjon (Modell)

En modell $\mathcal{M}$ for $\mathcal{L}$ består av en ikke-tom mengde D, kalt domenet til $\mathcal{M}$, og en funksjon $(\cdot)^{\mathcal{M}}$ som tolker alle ikke-logiske symboler på følgende måte:

- *Hvis c er et konstantsymbol, så er $c^{\mathcal{M}} \in D$.*
- *Hvis f er et funksjonsymbol med aritet n,så er $f^{\mathcal{M}}$ en funksjon fra $D^n = \underbrace{D \times \cdots \times D}_{n}$ til D.*
- *Hvis R er et relasjonssymbol med aritet n,*

Modeller

La et førsteordens språk $\mathcal{L}$ være gitt.

Definisjon (Modell)

En modell $\mathcal{M}$ for $\mathcal{L}$ består av en ikke-tom mengde D, kalt domenet til $\mathcal{M}$, og en funksjon $(\cdot)^{\mathcal{M}}$ som tolker alle ikke-logiske symboler på følgende måte:

- *Hvis c er et konstantsymbol, så er $c^{\mathcal{M}} \in D$.*
- *Hvis f er et funksjonsymbol med aritet n,så er $f^{\mathcal{M}}$ en funksjon fra $D^n = \underbrace{D \times \cdots \times D}_{n}$ til D.*
- *Hvis R er et relasjonssymbol med aritet n,så er $R^{\mathcal{M}}$ en relasjon på $D^n = \underbrace{D \times \cdots \times D}_{n}$.*

Modeller

La et førsteordens språk $\mathcal{L}$ være gitt.

Definisjon (Modell)

En modell $\mathcal{M}$ for $\mathcal{L}$ består av en ikke-tom mengde D, kalt domenet til $\mathcal{M}$, og en funksjon $(\cdot)^{\mathcal{M}}$ som tolker alle ikke-logiske symboler på følgende måte:

- *Hvis c er et konstantsymbol, så er $c^{\mathcal{M}} \in D$.*
- *Hvis f er et funksjonsymbol med aritet n,så er $f^{\mathcal{M}}$ en funksjon fra $D^n = \underbrace{D \times \cdots \times D}_{n}$ til D.*
- *Hvis R er et relasjonssymbol med aritet n,så er $R^{\mathcal{M}}$ en relasjon på $D^n = \underbrace{D \times \cdots \times D}_{n}$.*

Vi skriver $|\mathcal{M}|$ for domenet D til modellen $\mathcal{M}$.

Noen kommentarer

Noen kommentarer

1. Et funksjonssymbol f med aritet 0 kan betraktes som en konstant.

Noen kommentarer

1. Et funksjonssymbol f med aritet 0 kan betraktes som en konstant.
   - Da er $f^{\mathcal{M}}$ en funksjon fra D^0 til D.

Noen kommentarer

1. Et funksjonssymbol f med aritet 0 kan betraktes som en konstant.
   - Da er $f^{\mathcal{M}}$ en funksjon fra D^0 til D.
   - Siden D^0 består av kun ett element $\langle\rangle$ - det tomme tuppelet - så består $f^{\mathcal{M}}$ også av kun ett element $\langle\langle\rangle, e\rangle$, hvor $e \in D$.

Noen kommentarer

1. Et funksjonssymbol f med aritet 0 kan betraktes som en konstant.
   - Da er $f^{\mathcal{M}}$ en funksjon fra D^0 til D.
   - Siden D^0 består av kun ett element $\langle\rangle$ - det tomme tuppelet - så består $f^{\mathcal{M}}$ også av kun ett element $\langle\langle\rangle, e\rangle$, hvor $e \in D$.
   - Vi kan derfor identifisere $f^{\mathcal{M}}$ med e.

Noen kommentarer

1. Et funksjonssymbol f med aritet 0 kan betraktes som en konstant.
   - Da er $f^{\mathcal{M}}$ en funksjon fra D^0 til D.
   - Siden D^0 består av kun ett element $\langle\rangle$ - det tomme tuppelet - så består $f^{\mathcal{M}}$ også av kun ett element $\langle\langle\rangle, e\rangle$, hvor $e \in D$.
   - Vi kan derfor identifisere $f^{\mathcal{M}}$ med e.
2. Et relasjonssymbol R med aritet 0 kan betraktes som en utsagnsvariabel.

Noen kommentarer

1. Et funksjonssymbol f med aritet 0 kan betraktes som en konstant.
   - Da er $f^{\mathcal{M}}$ en funksjon fra D^0 til D.
   - Siden D^0 består av kun ett element $\langle\rangle$ - det tomme tuppelet - så består $f^{\mathcal{M}}$ også av kun ett element $\langle\langle\rangle, e\rangle$, hvor $e \in D$.
   - Vi kan derfor identifisere $f^{\mathcal{M}}$ med e.
2. Et relasjonssymbol R med aritet 0 kan betraktes som en utsagnsvariabel.
   - Da er $R^{\mathcal{M}}$ en delmengde av D^0.

Noen kommentarer

1. Et funksjonssymbol f med aritet 0 kan betraktes som en konstant.
   - Da er $f^{\mathcal{M}}$ en funksjon fra D^0 til D.
   - Siden D^0 består av kun ett element $\langle\rangle$ - det tomme tuppelet - så består $f^{\mathcal{M}}$ også av kun ett element $\langle\langle\rangle, e\rangle$, hvor $e \in D$.
   - Vi kan derfor identifisere $f^{\mathcal{M}}$ med e.
2. Et relasjonssymbol R med aritet 0 kan betraktes som en utsagnsvariabel.
   - Da er $R^{\mathcal{M}}$ en delmengde av D^0.
   - Siden D^0 består av kun ett element $\langle\rangle$ - det tomme tuppelet -så fins det nøyaktig to muligheter for $R^{\mathcal{M}}$.

Noen kommentarer

1. Et funksjonssymbol f med aritet 0 kan betraktes som en konstant.
   - Da er $f^{\mathcal{M}}$ en funksjon fra D^0 til D.
   - Siden D^0 består av kun ett element $\langle\rangle$ - det tomme tuppelet - så består $f^{\mathcal{M}}$ også av kun ett element $\langle\langle\rangle, e\rangle$, hvor $e \in D$.
   - Vi kan derfor identifisere $f^{\mathcal{M}}$ med e.
2. Et relasjonssymbol R med aritet 0 kan betraktes som en utsagnsvariabel.
   - Da er $R^{\mathcal{M}}$ en delmengde av D^0.
   - Siden D^0 består av kun ett element $\langle\rangle$ - det tomme tuppelet -så fins det nøyaktig to muligheter for $R^{\mathcal{M}}$.
   - Enten så er $R^{\mathcal{M}}$ tom eller så er $\langle\rangle \in R^{\mathcal{M}}$.

Noen kommentarer

1. Et funksjonssymbol f med aritet 0 kan betraktes som en konstant.
   - Da er $f^{\mathcal{M}}$ en funksjon fra D^0 til D.
   - Siden D^0 består av kun ett element $\langle\rangle$ - det tomme tuppelet - så består $f^{\mathcal{M}}$ også av kun ett element $\langle\langle\rangle, e\rangle$, hvor $e \in D$.
   - Vi kan derfor identifisere $f^{\mathcal{M}}$ med e.
2. Et relasjonssymbol R med aritet 0 kan betraktes som en utsagnsvariabel.
   - Da er $R^{\mathcal{M}}$ en delmengde av D^0.
   - Siden D^0 består av kun ett element $\langle\rangle$ - det tomme tuppelet -så fins det nøyaktig to muligheter for $R^{\mathcal{M}}$.
   - Enten så er $R^{\mathcal{M}}$ tom eller så er $\langle\rangle \in R^{\mathcal{M}}$.
   - Vi kan derfor tenke på D^0 som **Bool**.

Noen kommentarer

1. Et funksjonssymbol f med aritet 0 kan betraktes som en konstant.
   - Da er $f^{\mathcal{M}}$ en funksjon fra D^0 til D.
   - Siden D^0 består av kun ett element $\langle\rangle$ - det tomme tuppelet - så består $f^{\mathcal{M}}$ også av kun ett element $\langle\langle\rangle, e\rangle$, hvor $e \in D$.
   - Vi kan derfor identifisere $f^{\mathcal{M}}$ med e.
2. Et relasjonssymbol R med aritet 0 kan betraktes som en utsagnsvariabel.
   - Da er $R^{\mathcal{M}}$ en delmengde av D^0.
   - Siden D^0 består av kun ett element $\langle\rangle$ - det tomme tuppelet -så fins det nøyaktig to muligheter for $R^{\mathcal{M}}$.
   - Enten så er $R^{\mathcal{M}}$ tom eller så er $\langle\rangle \in R^{\mathcal{M}}$.
   - Vi kan derfor tenke på D^0 som **Bool**.
3. Et tuppel $\langle e\rangle$, hvor $e \in D$, kan vi identifisere med elementet e.

Noen kommentarer

1. Et funksjonssymbol f med aritet 0 kan betraktes som en konstant.
   - Da er $f^{\mathcal{M}}$ en funksjon fra D^0 til D.
   - Siden D^0 består av kun ett element $\langle\rangle$ - det tomme tuppelet - så består $f^{\mathcal{M}}$ også av kun ett element $\langle\langle\rangle, e\rangle$, hvor $e \in D$.
   - Vi kan derfor identifisere $f^{\mathcal{M}}$ med e.
2. Et relasjonssymbol R med aritet 0 kan betraktes som en utsagnsvariabel.
   - Da er $R^{\mathcal{M}}$ en delmengde av D^0.
   - Siden D^0 består av kun ett element $\langle\rangle$ - det tomme tuppelet -så fins det nøyaktig to muligheter for $R^{\mathcal{M}}$.
   - Enten så er $R^{\mathcal{M}}$ tom eller så er $\langle\rangle \in R^{\mathcal{M}}$.
   - Vi kan derfor tenke på D^0 som **Bool**.
3. Et tuppel $\langle e\rangle$, hvor $e \in D$, kan vi identifisere med elementet e.
   - Når et relasjonssymbol R har aritet 1,så skriver vi derfor $\{e_1, \ldots, e_n\}$ i stedet for $\{\langle e_1\rangle, \ldots, \langle e_n\rangle\}$.

Noen kommentarer

1. Et funksjonssymbol f med aritet 0 kan betraktes som en konstant.
   - Da er $f^{\mathcal{M}}$ en funksjon fra D^0 til D.
   - Siden D^0 består av kun ett element $\langle\rangle$ - det tomme tuppelet - så består $f^{\mathcal{M}}$ også av kun ett element $\langle\langle\rangle, e\rangle$, hvor $e \in D$.
   - Vi kan derfor identifisere $f^{\mathcal{M}}$ med e.
2. Et relasjonssymbol R med aritet 0 kan betraktes som en utsagnsvariabel.
   - Da er $R^{\mathcal{M}}$ en delmengde av D^0.
   - Siden D^0 består av kun ett element $\langle\rangle$ - det tomme tuppelet -så fins det nøyaktig to muligheter for $R^{\mathcal{M}}$.
   - Enten så er $R^{\mathcal{M}}$ tom eller så er $\langle\rangle \in R^{\mathcal{M}}$.
   - Vi kan derfor tenke på D^0 som **Bool**.
3. Et tuppel $\langle e\rangle$, hvor $e \in D$, kan vi identifisere med elementet e.
   - Når et relasjonssymbol R har aritet 1,så skriver vi derfor $\{e_1, \ldots, e_n\}$ i stedet for $\{\langle e_1\rangle, \ldots, \langle e_n\rangle\}$.
   - Vi antar derfor også at $R^{\mathcal{M}} \subseteq D$.

Hovedeksempel - et figurspråk

Hovedeksempel - et figurspråk

- Konstantsymboler: a, b, c, d, e, f.

Hovedeksempel - et figurspråk

- Konstantsymboler: a, b, c, d, e, f.
- Funksjonssymboler: ingen.

Hovedeksempel - et figurspråk

Relasjonssymbol	aritet

- Konstantsymboler: a, b, c, d, e, f.
- Funksjonssymboler: ingen.

Hovedeksempel - et figurspråk

Relasjonssymbol	aritet
Sirkel	1

- Konstantsymboler: a, b, c, d, e, f.
- Funksjonssymboler: ingen.

Hovedeksempel - et figurspråk

Relasjonssymbol	aritet
Sirkel	1

- Konstantsymboler: a, b, c, d, e, f.
- Funksjonssymboler: ingen.
- Vi leser på denne måten:

Hovedeksempel - et figurspråk

Relasjonssymbol	aritet
Sirkel	1

- Konstantsymboler: a, b, c, d, e, f.
- Funksjonssymboler: ingen.
- Vi leser på denne måten:

  Sirkel(x): "x er en sirkel"

Hovedeksempel - et figurspråk

Relasjonssymbol	aritet
Sirkel	1
Firkant	1

- Konstantsymboler: a, b, c, d, e, f.
- Funksjonssymboler: ingen.
- Vi leser på denne måten:

  Sirkel(x): "x er en sirkel"

Hovedeksempel - et figurspråk

Relasjonssymbol	aritet
Sirkel	1
Firkant	1

- Konstantsymboler: a, b, c, d, e, f.
- Funksjonssymboler: ingen.
- Vi leser på denne måten:

  Sirkel(x): "x er en sirkel"

  Firkant(x): "x er en firkant"

Hovedeksempel - et figurspråk

Relasjonssymbol	aritet
Sirkel	1
Firkant	1
Trekant	1

- Konstantsymboler: a, b, c, d, e, f.
- Funksjonssymboler: ingen.
- Vi leser på denne måten:

  Sirkel(x): "x er en sirkel"

  Firkant(x): "x er en firkant"

Hovedeksempel - et figurspråk

Relasjonssymbol	aritet
Sirkel	1
Firkant	1
Trekant	1

- Konstantsymboler: a, b, c, d, e, f.
- Funksjonssymboler: ingen.
- Vi leser på denne måten:

  Sirkel(x): "x er en sirkel"

  Firkant(x): "x er en firkant"

  Trekant(x): "x er en trekant"

Hovedeksempel - et figurspråk

Relasjonssymbol	aritet
Sirkel	1
Firkant	1
Trekant	1
Stor	1

- Konstantsymboler: a, b, c, d, e, f.
- Funksjonssymboler: ingen.
- Vi leser på denne måten:

  Sirkel(x): "x er en sirkel"

  Firkant(x): "x er en firkant"

  Trekant(x): "x er en trekant"

Hovedeksempel - et figurspråk

Relasjonssymbol	aritet
Sirkel	1
Firkant	1
Trekant	1
Stor	1

- Konstantsymboler: a, b, c, d, e, f.
- Funksjonssymboler: ingen.
- Vi leser på denne måten:

  Sirkel(x): "x er en sirkel"

  Firkant(x): "x er en firkant"

  Trekant(x): "x er en trekant"

  Stor(x): "x er stor"

Hovedeksempel - et figurspråk

Relasjonssymbol	aritet
Sirkel	1
Firkant	1
Trekant	1
Stor	1
Liten	1

- Konstantsymboler: a, b, c, d, e, f.
- Funksjonssymboler: ingen.
- Vi leser på denne måten:

  Sirkel(x): "x er en sirkel"

  Firkant(x): "x er en firkant"

  Trekant(x): "x er en trekant"

  Stor(x): "x er stor"

Hovedeksempel - et figurspråk

Relasjonssymbol	aritet
Sirkel	1
Firkant	1
Trekant	1
Stor	1
Liten	1

- Konstantsymboler: a, b, c, d, e, f.
- Funksjonssymboler: ingen.
- Vi leser på denne måten:

  Sirkel(x): "x er en sirkel"

  Firkant(x): "x er en firkant"

  Trekant(x): "x er en trekant"

  Stor(x): "x er stor"

  Liten(x): "x er liten"

Hovedeksempel - et figurspråk

Relasjonssymbol	aritet
Sirkel	1
Firkant	1
Trekant	1
Stor	1
Liten	1
Mindre	2

- Konstantsymboler: a, b, c, d, e, f.
- Funksjonssymboler: ingen.
- Vi leser på denne måten:

  Sirkel(x): "x er en sirkel"

  Firkant(x): "x er en firkant"

  Trekant(x): "x er en trekant"

  Stor(x): "x er stor"

  Liten(x): "x er liten"

Hovedeksempel - et figurspråk

Relasjonssymbol	aritet
Sirkel	1
Firkant	1
Trekant	1
Stor	1
Liten	1
Mindre	2

- Konstantsymboler: a, b, c, d, e, f.
- Funksjonssymboler: ingen.
- Vi leser på denne måten:

  Sirkel(x): "x er en sirkel"

  Firkant(x): "x er en firkant"

  Trekant(x): "x er en trekant"

  Stor(x): "x er stor"

  Liten(x): "x er liten"

  Mindre(x, y): "x er mindre enn y"

Hovedeksempel - et figurspråk

Relasjonssymbol	aritet
Sirkel	1
Firkant	1
Trekant	1
Stor	1
Liten	1
Mindre	2

- Konstantsymboler: a, b, c, d, e, f.
- Funksjonssymboler: ingen.
- Vi leser på denne måten:

  Sirkel(x): "x er en sirkel"

  Firkant(x): "x er en firkant"

  Trekant(x): "x er en trekant"

  Stor(x): "x er stor"

  Liten(x): "x er liten"

  Mindre(x, y): "x er mindre enn y"

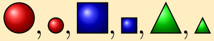
La oss nå lage en modell for dette språket!

Hovedeksempel - et figurspråk

En tolkning av figurspråket

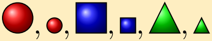
Hovedeksempel - et figurspråk

En tolkning av figurspråket

La $\mathcal{M}$ være en modell med domene $D = \{$  $\}$.

Hovedeksempel - et figurspråk

En tolkning av figurspråket

La $\mathcal{M}$ være en modell med domene $D = \{$  $\}$.

$a^{\mathcal{M}} =$ Sirkel$^{\mathcal{M}} =$

$b^{\mathcal{M}} =$ Firkant$^{\mathcal{M}} =$

$c^{\mathcal{M}} =$ Trekant$^{\mathcal{M}} =$

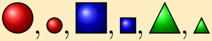
$d^{\mathcal{M}} =$ Stor$^{\mathcal{M}} =$

$e^{\mathcal{M}} =$ Liten$^{\mathcal{M}} =$

$f^{\mathcal{M}} =$ Mindre$^{\mathcal{M}} =$

Hovedeksempel - et figurspråk

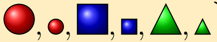
En tolkning av figurspråket

La $\mathcal{M}$ være en modell med domene $D = \{$  $\}$.

$a^{\mathcal{M}} =$ 		$\mathsf{Sirkel}^{\mathcal{M}}$	$=$
$b^{\mathcal{M}} =$		$\mathsf{Firkant}^{\mathcal{M}}$	$=$
$c^{\mathcal{M}} =$		$\mathsf{Trekant}^{\mathcal{M}}$	$=$
$d^{\mathcal{M}} =$		$\mathsf{Stor}^{\mathcal{M}}$	$=$
$e^{\mathcal{M}} =$		$\mathsf{Liten}^{\mathcal{M}}$	$=$
$f^{\mathcal{M}} =$		$\mathsf{Mindre}^{\mathcal{M}}$	$=$

Hovedeksempel - et figurspråk

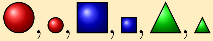
En tolkning av figurspråket

La $\mathcal{M}$ være en modell med domene $D =$ {  }.

$a^{\mathcal{M}} =$ 		$\mathsf{Sirkel}^{\mathcal{M}}$	$=$
$b^{\mathcal{M}} =$ 		$\mathsf{Firkant}^{\mathcal{M}}$	$=$
$c^{\mathcal{M}} =$		$\mathsf{Trekant}^{\mathcal{M}}$	$=$
$d^{\mathcal{M}} =$		$\mathsf{Stor}^{\mathcal{M}}$	$=$
$e^{\mathcal{M}} =$		$\mathsf{Liten}^{\mathcal{M}}$	$=$
$f^{\mathcal{M}} =$		$\mathsf{Mindre}^{\mathcal{M}}$	$=$

Hovedeksempel - et figurspråk

En tolkning av figurspråket

La $\mathcal{M}$ være en modell med domene $D = \{$  $\}$.

$a^{\mathcal{M}} =$  Sirkel$^{\mathcal{M}} =$

$b^{\mathcal{M}} =$  Firkant$^{\mathcal{M}} =$

$c^{\mathcal{M}} =$  Trekant$^{\mathcal{M}} =$

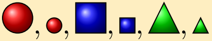
$d^{\mathcal{M}} =$ Stor$^{\mathcal{M}} =$

$e^{\mathcal{M}} =$ Liten$^{\mathcal{M}} =$

$f^{\mathcal{M}} =$ Mindre$^{\mathcal{M}} =$

Hovedeksempel - et figurspråk

En tolkning av figurspråket

La $\mathcal{M}$ være en modell med domene $D = \{$  $\}$.

$a^{\mathcal{M}} =$  $\text{Sirkel}^{\mathcal{M}} =$

$b^{\mathcal{M}} =$  $\text{Firkant}^{\mathcal{M}} =$

$c^{\mathcal{M}} =$  $\text{Trekant}^{\mathcal{M}} =$

$d^{\mathcal{M}} =$  $\text{Stor}^{\mathcal{M}} =$

$e^{\mathcal{M}} =$ $\text{Liten}^{\mathcal{M}} =$

$f^{\mathcal{M}} =$ $\text{Mindre}^{\mathcal{M}} =$

Hovedeksempel - et figurspråk

En tolkning av figurspråket

La $\mathcal{M}$ være en modell med domene $D = \{$ , , , , ,  $\}$.

$a^{\mathcal{M}} =$ 		Sirkel$^{\mathcal{M}}$	$=$
$b^{\mathcal{M}} =$ 		Firkant$^{\mathcal{M}}$	$=$
$c^{\mathcal{M}} =$ 		Trekant$^{\mathcal{M}}$	$=$
$d^{\mathcal{M}} =$ 		Stor$^{\mathcal{M}}$	$=$
$e^{\mathcal{M}} =$ 		Liten$^{\mathcal{M}}$	$=$
$f^{\mathcal{M}} =$		Mindre$^{\mathcal{M}}$	$=$

Hovedeksempel - et figurspråk

En tolkning av figurspråket

La $\mathcal{M}$ være en modell med domene $D = \{$, , , , , $\}$.

$a^{\mathcal{M}} =$  Sirkel$^{\mathcal{M}} =$

$b^{\mathcal{M}} =$  Firkant$^{\mathcal{M}} =$

$c^{\mathcal{M}} =$  Trekant$^{\mathcal{M}} =$

$d^{\mathcal{M}} =$  Stor$^{\mathcal{M}} =$

$e^{\mathcal{M}} =$  Liten$^{\mathcal{M}} =$

$f^{\mathcal{M}} =$  Mindre$^{\mathcal{M}} =$

Hovedeksempel - et figurspråk

En tolkning av figurspråket

La $\mathcal{M}$ være en modell med domene $D = \{$ , , , , ,  $\}$.

$a^{\mathcal{M}} =$  Sirkel$^{\mathcal{M}} = \{$ ,  $\}$

$b^{\mathcal{M}} =$  Firkant$^{\mathcal{M}} =$

$c^{\mathcal{M}} =$  Trekant$^{\mathcal{M}} =$

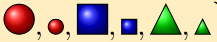
$d^{\mathcal{M}} =$  Stor$^{\mathcal{M}} =$

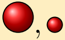
$e^{\mathcal{M}} =$  Liten$^{\mathcal{M}} =$

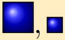
$f^{\mathcal{M}} =$  Mindre$^{\mathcal{M}} =$

Hovedeksempel - et figurspråk

En tolkning av figurspråket

La $\mathcal{M}$ være en modell med domene $D = \{$  $\}$.

$a^{\mathcal{M}} =$  Sirkel$^{\mathcal{M}} = \{$  $\}$

$b^{\mathcal{M}} =$  Firkant$^{\mathcal{M}} = \{$  $\}$

$c^{\mathcal{M}} =$  Trekant$^{\mathcal{M}} =$

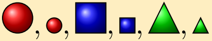
$d^{\mathcal{M}} =$  Stor$^{\mathcal{M}} =$

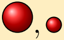
$e^{\mathcal{M}} =$  Liten$^{\mathcal{M}} =$

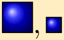
$f^{\mathcal{M}} =$  Mindre$^{\mathcal{M}} =$

Hovedeksempel - et figurspråk

En tolkning av figurspråket

La $\mathcal{M}$ være en modell med domene $D = \{$  $\}$.

$a^{\mathcal{M}} =$  Sirkel$^{\mathcal{M}} = \{$  $\}$

$b^{\mathcal{M}} =$  Firkant$^{\mathcal{M}} = \{$  $\}$

$c^{\mathcal{M}} =$  Trekant$^{\mathcal{M}} = \{$  $\}$

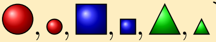
$d^{\mathcal{M}} =$  Stor$^{\mathcal{M}} =$

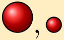
$e^{\mathcal{M}} =$  Liten$^{\mathcal{M}} =$

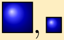
$f^{\mathcal{M}} =$  Mindre$^{\mathcal{M}} =$

Hovedeksempel - et figurspråk

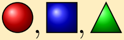
En tolkning av figurspråket

La $\mathcal{M}$ være en modell med domene $D = \{$  $\}$.

$a^{\mathcal{M}} =$  Sirkel$^{\mathcal{M}} = \{$  $\}$

$b^{\mathcal{M}} =$  Firkant$^{\mathcal{M}} = \{$  $\}$

$c^{\mathcal{M}} =$  Trekant$^{\mathcal{M}} = \{$  $\}$

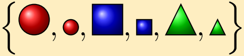
$d^{\mathcal{M}} =$  Stor$^{\mathcal{M}} = \{$  $\}$

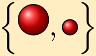
$e^{\mathcal{M}} =$  Liten$^{\mathcal{M}} =$

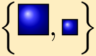
$f^{\mathcal{M}} =$  Mindre$^{\mathcal{M}} =$

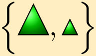
Hovedeksempel - et figurspråk

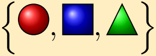
En tolkning av figurspråket

La $\mathcal{M}$ være en modell med domene $D =$ .

$a^{\mathcal{M}} =$    Sirkel$^{\mathcal{M}}$ $=$ 

$b^{\mathcal{M}} =$    Firkant$^{\mathcal{M}}$ $=$ 

$c^{\mathcal{M}} =$    Trekant$^{\mathcal{M}}$ $=$ 

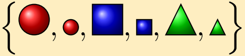
$d^{\mathcal{M}} =$    Stor$^{\mathcal{M}}$ $=$ 

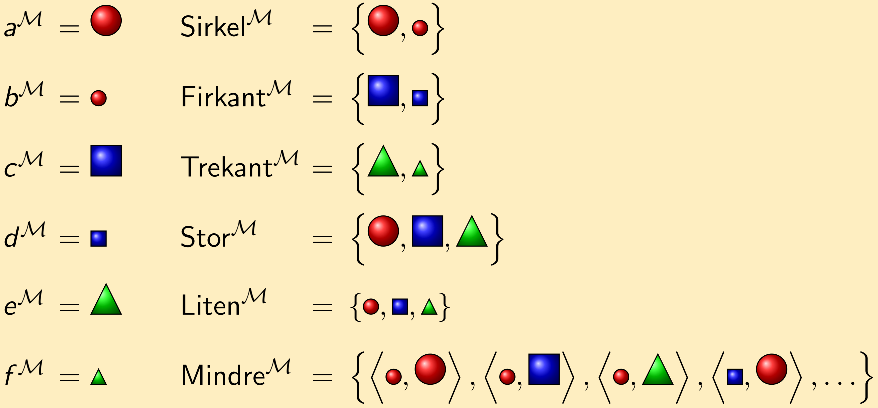
$e^{\mathcal{M}} =$    Liten$^{\mathcal{M}}$ $=$ 

$f^{\mathcal{M}} =$    Mindre$^{\mathcal{M}}$ $=$

Hovedeksempel - et figurspråk

En tolkning av figurspråket

La $\mathcal{M}$ være en modell med domene $D =$ .

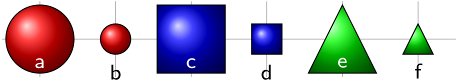


Hovedeksempel - et figurspråk

Vi foregriper begivenhetene og ser på hvilke atomære formler som er sanne og usanne i modellen $\mathcal{M}$.

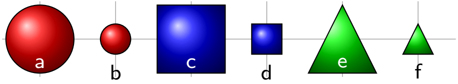
Hovedeksempel - et figurspråk

Vi foregriper begivenhetene og ser på hvilke atomære formler som er sanne og usanne i modellen $\mathcal{M}$.



Hovedeksempel - et figurspråk

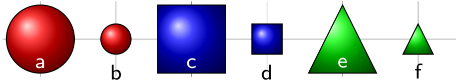
Vi foregriper begivenhetene og ser på hvilke atomære formler som er sanne og usanne i modellen $\mathcal{M}$.



Sant

Hovedeksempel - et figurspråk

Vi foregriper begivenhetene og ser på hvilke atomære formler som er sanne og usanne i modellen $\mathcal{M}$.

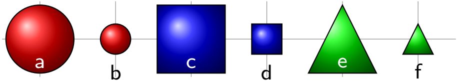


Sant

- Sirkel(a)

Hovedeksempel - et figurspråk

Vi foregriper begivenhetene og ser på hvilke atomære formler som er sanne og usanne i modellen $\mathcal{M}$.

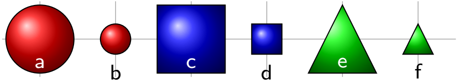


Sant

- Sirkel(a)
- Firkant(c)

Hovedeksempel - et figurspråk

Vi foregriper begivenhetene og ser på hvilke atomære formler som er sanne og usanne i modellen $\mathcal{M}$.

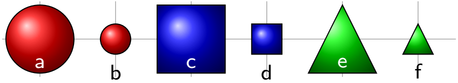


Sant

- Sirkel(a)
- Firkant(c)
- Liten(b)

Hovedeksempel - et figurspråk

Vi foregriper begivenhetene og ser på hvilke atomære formler som er sanne og usanne i modellen $\mathcal{M}$.

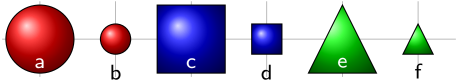


Sant

- Sirkel(a)
- Firkant(c)
- Liten(b)
- Mindre(b, e)

Hovedeksempel - et figurspråk

Vi foregriper begivenhetene og ser på hvilke atomære formler som er sanne og usanne i modellen $\mathcal{M}$.



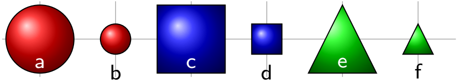
Sant

- Sirkel(a)
- Firkant(c)
- Liten(b)
- Mindre(b, e)

Usant

Hovedeksempel - et figurspråk

Vi foregriper begivenhetene og ser på hvilke atomære formler som er sanne og usanne i modellen $\mathcal{M}$.



Sant

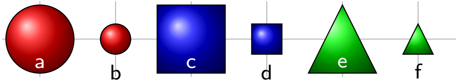
- Sirkel(a)
- Firkant(c)
- Liten(b)
- Mindre(b, e)

Usant

- Trekant(a)

Hovedeksempel - et figurspråk

Vi foregriper begivenhetene og ser på hvilke atomære formler som er sanne og usanne i modellen $\mathcal{M}$.



Sant

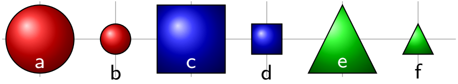
- Sirkel(a)
- Firkant(c)
- Liten(b)
- Mindre(b, e)

Usant

- Trekant(a)
- Stor(b)

Hovedeksempel - et figurspråk

Vi foregriper begivenhetene og ser på hvilke atomære formler som er sanne og usanne i modellen $\mathcal{M}$.



Sant

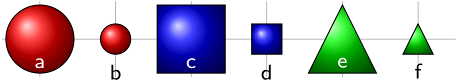
- Sirkel(a)
- Firkant(c)
- Liten(b)
- Mindre(b, e)

Usant

- Trekant(a)
- Stor(b)
- Mindre(a, b)

Hovedeksempel - et figurspråk

Vi foregriper begivenhetene og ser på hvilke atomære formler som er sanne og usanne i modellen $\mathcal{M}$.



Sant

- Sirkel(a)
- Firkant(c)
- Liten(b)
- Mindre(b, e)

Usant

- Trekant(a)
- Stor(b)
- Mindre(a, b)
- Mindre(a, a)

Tolkning av termer og formler

Tolkning av termer og formler

- Vi så i eksempelet over at vi hadde et konstantsymbol for hvert element i domenet, men det er ikke alltid slik.

Tolkning av termer og formler

- Vi så i eksempelet over at vi hadde et konstantsymbol for hvert element i domenet, men det er ikke alltid slik.
- Når vi skal tolke formler er det nyttig å ha en konstant for hvert element.

Tolkning av termer og formler

- Vi så i eksempelet over at vi hadde et konstantsymbol for hvert element i domenet, men det er ikke alltid slik.
- Når vi skal tolke formler er det nyttig å ha en konstant for hvert element.

Definisjon (Utvidet språk $\mathcal{L}(\mathcal{M})$)

Tolkning av termer og formler

- Vi så i eksempelet over at vi hadde et konstantsymbol for hvert element i domenet, men det er ikke alltid slik.
- Når vi skal tolke formler er det nyttig å ha en konstant for hvert element.

Definisjon (Utvidet språk $\mathcal{L}(\mathcal{M})$)

La $\mathcal{L}$ være et førsteordens språk og $\mathcal{M}$ en modell for $\mathcal{L}$.

Tolkning av termer og formler

- Vi så i eksempelet over at vi hadde et konstantsymbol for hvert element i domenet, men det er ikke alltid slik.
- Når vi skal tolke formler er det nyttig å ha en konstant for hvert element.

Definisjon (Utvidet språk $\mathcal{L}(\mathcal{M})$)

La $\mathcal{L}$ være et førsteordens språk og $\mathcal{M}$ en modell for $\mathcal{L}$. Da er $\mathcal{L}(\mathcal{M})$ det førsteordens språket man får fra $\mathcal{L}$ ved å legge til nye konstantsymboler for hvert element i $|\mathcal{M}|$.

Tolkning av termer og formler

- Vi så i eksempelet over at vi hadde et konstantsymbol for hvert element i domenet, men det er ikke alltid slik.
- Når vi skal tolke formler er det nyttig å ha en konstant for hvert element.

Definisjon (Utvidet språk $\mathcal{L}(\mathcal{M})$)

La $\mathcal{L}$ være et førsteordens språk og $\mathcal{M}$ en modell for $\mathcal{L}$. Da er $\mathcal{L}(\mathcal{M})$ det førsteordens språket man får fra $\mathcal{L}$ ved å legge til nye konstantsymboler for hvert element i $|\mathcal{M}|$. Hvis a er i $|\mathcal{M}|$, så skriver vi $\bar{a}$ for den nye konstanten.

Tolkning av termer og formler

- Vi så i eksempelet over at vi hadde et konstantsymbol for hvert element i domenet, men det er ikke alltid slik.
- Når vi skal tolke formler er det nyttig å ha en konstant for hvert element.

Definisjon (Utvidet språk $\mathcal{L}(\mathcal{M})$)

La $\mathcal{L}$ være et førsteordens språk og $\mathcal{M}$ en modell for $\mathcal{L}$. Da er $\mathcal{L}(\mathcal{M})$ det førsteordens språket man får fra $\mathcal{L}$ ved å legge til nye konstantsymboler for hvert element i $|\mathcal{M}|$. Hvis a er i $|\mathcal{M}|$, så skriver vi $\bar{a}$ for den nye konstanten. Hvis $\mathcal{N}$ er en modell for $\mathcal{L}(\mathcal{M})$, så krever vi at $\bar{a}^{\mathcal{N}} = a$.

Tolkning av termer og formler

- Vi så i eksempelet over at vi hadde et konstantsymbol for hvert element i domenet, men det er ikke alltid slik.
- Når vi skal tolke formler er det nyttig å ha en konstant for hvert element.

Definisjon (Utvidet språk $\mathcal{L}(\mathcal{M})$)

La $\mathcal{L}$ være et førsteordens språk og $\mathcal{M}$ en modell for $\mathcal{L}$. Da er $\mathcal{L}(\mathcal{M})$ det førsteordens språket man får fra $\mathcal{L}$ ved å legge til nye konstantsymboler for hvert element i $|\mathcal{M}|$. Hvis a er i $|\mathcal{M}|$, så skriver vi $\bar{a}$ for den nye konstanten. Hvis $\mathcal{N}$ er en modell for $\mathcal{L}(\mathcal{M})$, så krever vi at $\bar{a}^{\mathcal{N}} = a$.

- Når vi tolker termer og formler fra språket $\mathcal{L}$ i en modell $\mathcal{M}$, så bruker vi det utvidete språket $\mathcal{L}(\mathcal{M})$ og antar at $\mathcal{M}$ er en $\mathcal{L}(\mathcal{M})$-modell.

Tolkning av termer og formler

Definisjon (Tolkning av lukkede termer)

Tolkning av termer og formler

Definisjon (Tolkning av lukkede termer)

La $\mathcal{L}$ være et førsteordens språk og $\mathcal{M}$ en modell for $\mathcal{L}$. Anta at $\mathcal{M}$ er en $\mathcal{L}(\mathcal{M})$-modell.

Tolkning av termer og formler

Definisjon (Tolkning av lukkede termer)

La $\mathcal{L}$ være et førsteordens språk og $\mathcal{M}$ en modell for $\mathcal{L}$. Anta at $\mathcal{M}$ er en $\mathcal{L}(\mathcal{M})$-modell. Da tolker vi en lukket term $f(t_1, \ldots, t_n)$ på følgende måte:

Tolkning av termer og formler

Definisjon (Tolkning av lukkede termer)

La $\mathcal{L}$ være et førsteordens språk og $\mathcal{M}$ en modell for $\mathcal{L}$. Anta at $\mathcal{M}$ er en $\mathcal{L}(\mathcal{M})$-modell. Da tolker vi en lukket term $f(t_1, \ldots, t_n)$ på følgende måte:

$$f(t_1, \ldots, t_n)^{\mathcal{M}} = f^{\mathcal{M}}(t_1^{\mathcal{M}}, \ldots, t_n^{\mathcal{M}}).$$

Tolkning av termer og formler

Definisjon (Tolkning av lukkede termer)

La $\mathcal{L}$ være et førsteordens språk og $\mathcal{M}$ en modell for $\mathcal{L}$. Anta at $\mathcal{M}$ er en $\mathcal{L}(\mathcal{M})$-modell. Da tolker vi en lukket term $f(t_1, \ldots, t_n)$ på følgende måte:

$$f(t_1, \ldots, t_n)^{\mathcal{M}} = f^{\mathcal{M}}(t_1^{\mathcal{M}}, \ldots, t_n^{\mathcal{M}}).$$

Oppgave

Dette er en rekursiv definisjon. Skriv ut hele definisjonen.

Tolkning av termer og formler

Definisjon (Tolkning av lukkede formler)

Tolkning av termer og formler

Definisjon (Tolkning av lukkede formler)

La $\mathcal{L}$ være et førsteordens språk og $\mathcal{M}$ en modell for $\mathcal{L}$. Anta a $\mathcal{M}$ er en $\mathcal{L}(\mathcal{M})$-modell.

Tolkning av termer og formler

Definisjon (Tolkning av lukkede formler)

La $\mathcal{L}$ være et førsteordens språk og $\mathcal{M}$ en modell for $\mathcal{L}$. Anta a $\mathcal{M}$ er en $\mathcal{L}(\mathcal{M})$-modell. Vi definerer ved rekursjon hva det vil si at en lukket formel φ er sann i $\mathcal{M}$;

Tolkning av termer og formler

Definisjon (Tolkning av lukkede formler)

La $\mathcal{L}$ være et førsteordens språk og $\mathcal{M}$ en modell for $\mathcal{L}$. Anta a $\mathcal{M}$ er en $\mathcal{L}(\mathcal{M})$-modell. Vi definerer ved rekursjon hva det vil si at en lukket formel φ er sann i $\mathcal{M}$; vi skriver $\mathcal{M} \models \varphi$ når φ er sann i $\mathcal{M}$ / $\mathcal{M}$ gjør φ sann.

Tolkning av termer og formler

Definisjon (Tolkning av lukkede formler)

La $\mathcal{L}$ være et førsteordens språk og $\mathcal{M}$ en modell for $\mathcal{L}$. Anta a $\mathcal{M}$ er en $\mathcal{L}(\mathcal{M})$-modell. Vi definerer ved rekursjon hva det vil si at en lukket formel φ er sann i $\mathcal{M}$; vi skriver $\mathcal{M} \models \varphi$ når φ er sann i $\mathcal{M}$ / $\mathcal{M}$ gjør φ sann.

- *For atomære formler: $\mathcal{M} \models R(t_1, \ldots, t_n)$ hvis $\langle t_1^{\mathcal{M}}, \ldots, t_n^{\mathcal{M}} \rangle \in R^{\mathcal{M}}$.*

Tolkning av termer og formler

Definisjon (Tolkning av lukkede formler)

La $\mathcal{L}$ være et førsteordens språk og $\mathcal{M}$ en modell for $\mathcal{L}$. Anta a $\mathcal{M}$ er en $\mathcal{L}(\mathcal{M})$-modell. Vi definerer ved rekursjon hva det vil si at en lukket formel φ er sann i $\mathcal{M}$; vi skriver $\mathcal{M} \models \varphi$ når φ er sann i $\mathcal{M}$ / $\mathcal{M}$ gjør φ sann.

- *For atomære formler: $\mathcal{M} \models R(t_1, \ldots, t_n)$ hvis $\langle t_1^{\mathcal{M}}, \ldots, t_n^{\mathcal{M}} \rangle \in R^{\mathcal{M}}$.*
- *$\mathcal{M} \models \neg\varphi$ hvis det ikke er tilfelle at $\mathcal{M} \models \varphi$.*

Tolkning av termer og formler

Definisjon (Tolkning av lukkede formler)

La $\mathcal{L}$ være et førsteordens språk og $\mathcal{M}$ en modell for $\mathcal{L}$. Anta a $\mathcal{M}$ er en $\mathcal{L}(\mathcal{M})$-modell. Vi definerer ved rekursjon hva det vil si at en lukket formel φ er sann i $\mathcal{M}$; vi skriver $\mathcal{M} \models \varphi$ når φ er sann i $\mathcal{M}$ / $\mathcal{M}$ gjør φ sann.

- *For atomære formler: $\mathcal{M} \models R(t_1, \ldots, t_n)$ hvis $\langle t_1^{\mathcal{M}}, \ldots, t_n^{\mathcal{M}} \rangle \in R^{\mathcal{M}}$.*
- *$\mathcal{M} \models \neg\varphi$ hvis det ikke er tilfelle at $\mathcal{M} \models \varphi$.*
- *$\mathcal{M} \models \varphi \land \psi$ hvis $\mathcal{M} \models \varphi$ og $\mathcal{M} \models \psi$.*

Tolkning av termer og formler

Definisjon (Tolkning av lukkede formler)

La $\mathcal{L}$ være et førsteordens språk og $\mathcal{M}$ en modell for $\mathcal{L}$. Anta a $\mathcal{M}$ er en $\mathcal{L}(\mathcal{M})$-modell. Vi definerer ved rekursjon hva det vil si at en lukket formel φ er sann i $\mathcal{M}$; vi skriver $\mathcal{M} \models \varphi$ når φ er sann i $\mathcal{M}$ / $\mathcal{M}$ gjør φ sann.

- *For atomære formler: $\mathcal{M} \models R(t_1, \ldots, t_n)$ hvis $\langle t_1^{\mathcal{M}}, \ldots, t_n^{\mathcal{M}} \rangle \in R^{\mathcal{M}}$.*
- *$\mathcal{M} \models \neg\varphi$ hvis det ikke er tilfelle at $\mathcal{M} \models \varphi$.*
- *$\mathcal{M} \models \varphi \wedge \psi$ hvis $\mathcal{M} \models \varphi$ og $\mathcal{M} \models \psi$.*
- *$\mathcal{M} \models \varphi \vee \psi$ hvis $\mathcal{M} \models \varphi$ eller $\mathcal{M} \models \psi$.*

Tolkning av termer og formler

Definisjon (Tolkning av lukkede formler)

La $\mathcal{L}$ være et førsteordens språk og $\mathcal{M}$ en modell for $\mathcal{L}$. Anta a $\mathcal{M}$ er en $\mathcal{L}(\mathcal{M})$-modell. Vi definerer ved rekursjon hva det vil si at en lukket formel φ er sann i $\mathcal{M}$; vi skriver $\mathcal{M} \models \varphi$ når φ er sann i $\mathcal{M}$ / $\mathcal{M}$ gjør φ sann.

- *For atomære formler: $\mathcal{M} \models R(t_1, \ldots, t_n)$ hvis $\langle t_1^{\mathcal{M}}, \ldots, t_n^{\mathcal{M}} \rangle \in R^{\mathcal{M}}$.*
- *$\mathcal{M} \models \neg\varphi$ hvis det ikke er tilfelle at $\mathcal{M} \models \varphi$.*
- *$\mathcal{M} \models \varphi \land \psi$ hvis $\mathcal{M} \models \varphi$ og $\mathcal{M} \models \psi$.*
- *$\mathcal{M} \models \varphi \lor \psi$ hvis $\mathcal{M} \models \varphi$ eller $\mathcal{M} \models \psi$.*
- *$\mathcal{M} \models \varphi \to \psi$ hvis $\mathcal{M} \models \varphi$ impliserer $\mathcal{M} \models \psi$.*

Tolkning av termer og formler

Definisjon (Tolkning av lukkede formler)

La $\mathcal{L}$ være et førsteordens språk og $\mathcal{M}$ en modell for $\mathcal{L}$. Anta a $\mathcal{M}$ er en $\mathcal{L}(\mathcal{M})$-modell. Vi definerer ved rekursjon hva det vil si at en lukket formel φ er sann i $\mathcal{M}$; vi skriver $\mathcal{M} \models \varphi$ når φ er sann i $\mathcal{M}$ / $\mathcal{M}$ gjør φ sann.

- *For atomære formler: $\mathcal{M} \models R(t_1, \ldots, t_n)$ hvis $\langle t_1^{\mathcal{M}}, \ldots, t_n^{\mathcal{M}} \rangle \in R^{\mathcal{M}}$.*
- *$\mathcal{M} \models \neg\varphi$ hvis det ikke er tilfelle at $\mathcal{M} \models \varphi$.*
- *$\mathcal{M} \models \varphi \land \psi$ hvis $\mathcal{M} \models \varphi$ og $\mathcal{M} \models \psi$.*
- *$\mathcal{M} \models \varphi \lor \psi$ hvis $\mathcal{M} \models \varphi$ eller $\mathcal{M} \models \psi$.*
- *$\mathcal{M} \models \varphi \to \psi$ hvis $\mathcal{M} \models \varphi$ impliserer $\mathcal{M} \models \psi$.*
- *$\mathcal{M} \models \forall x\varphi$ hvis $\mathcal{M} \models \varphi[\bar{a}/x]$ for alle a i $|\mathcal{M}|$.*

Tolkning av termer og formler

Definisjon (Tolkning av lukkede formler)

La $\mathcal{L}$ være et førsteordens språk og $\mathcal{M}$ en modell for $\mathcal{L}$. Anta a $\mathcal{M}$ er en $\mathcal{L}(\mathcal{M})$-modell. Vi definerer ved rekursjon hva det vil si at en lukket formel φ er sann i $\mathcal{M}$; vi skriver $\mathcal{M} \models \varphi$ når φ er sann i $\mathcal{M}$ / $\mathcal{M}$ gjør φ sann.

- *For atomære formler:* $\mathcal{M} \models R(t_1, \ldots, t_n)$ *hvis* $\langle t_1^{\mathcal{M}}, \ldots, t_n^{\mathcal{M}} \rangle \in R^{\mathcal{M}}$.
- $\mathcal{M} \models \neg\varphi$ *hvis det ikke er tilfelle at* $\mathcal{M} \models \varphi$.
- $\mathcal{M} \models \varphi \land \psi$ *hvis* $\mathcal{M} \models \varphi$ *og* $\mathcal{M} \models \psi$.
- $\mathcal{M} \models \varphi \lor \psi$ *hvis* $\mathcal{M} \models \varphi$ *eller* $\mathcal{M} \models \psi$.
- $\mathcal{M} \models \varphi \to \psi$ *hvis* $\mathcal{M} \models \varphi$ *impliserer* $\mathcal{M} \models \psi$.
- $\mathcal{M} \models \forall x\varphi$ *hvis* $\mathcal{M} \models \varphi[\bar{a}/x]$ *for alle* a *i* $|\mathcal{M}|$.
- $\mathcal{M} \models \exists x\varphi$ *hvis* $\mathcal{M} \models \varphi[\bar{a}/x]$ *for minst en* a *i* $|\mathcal{M}|$.

Tolkning av termer og formler

Tolkning av termer og formler

Definisjon (Oppfyllbarhet)

Tolkning av termer og formler

Definisjon (Oppfyllbarhet)

En lukket formel φ *er* *oppfyllbar* *hvis det fins en modell* $\mathcal{M}$ *som gjør* φ *sann.*

Tolkning av termer og formler

Definisjon (Oppfyllbarhet)

En lukket formel φ er oppfyllbar hvis det fins en modell $\mathcal{M}$ som gjør φ sann. Vi sier også at $\mathcal{M}$ oppfyller φ og at $\mathcal{M}$ en en modell for φ.

Tolkning av termer og formler

Definisjon (Oppfyllbarhet)

En lukket formel φ er oppfyllbar hvis det fins en modell $\mathcal{M}$ som gjør φ sann. Vi sier også at $\mathcal{M}$ oppfyller φ og at $\mathcal{M}$ en en modell for φ.

Oppfyllbar

Tolkning av termer og formler

Definisjon (Oppfyllbarhet)

En lukket formel φ er oppfyllbar hvis det fins en modell $\mathcal{M}$ som gjør φ sann. Vi sier også at $\mathcal{M}$ oppfyller φ og at $\mathcal{M}$ en en modell for φ.

Oppfyllbar

- $\exists x \mathrm{Liten}(x)$

Tolkning av termer og formler

Definisjon (Oppfyllbarhet)

En lukket formel φ er oppfyllbar hvis det fins en modell $\mathcal{M}$ som gjør φ sann. Vi sier også at $\mathcal{M}$ oppfyller φ og at $\mathcal{M}$ en en modell for φ.

Oppfyllbar

- $\exists x \text{Liten}(x)$
- $\exists x(\text{Liten}(x) \land \text{Stor}(x))$

Tolkning av termer og formler

Definisjon (Oppfyllbarhet)

En lukket formel φ er oppfyllbar hvis det fins en modell $\mathcal{M}$ som gjør φ sann. Vi sier også at $\mathcal{M}$ oppfyller φ og at $\mathcal{M}$ en en modell for φ.

Oppfyllbar

- $\exists x \mathrm{Liten}(x)$
- $\exists x(\mathrm{Liten}(x) \land \mathrm{Stor}(x))$
- $\exists x Px \rightarrow \forall x Px$

Tolkning av termer og formler

Definisjon (Oppfyllbarhet)

En lukket formel φ er oppfyllbar hvis det fins en modell $\mathcal{M}$ som gjør φ sann. Vi sier også at $\mathcal{M}$ oppfyller φ og at $\mathcal{M}$ en en modell for φ.

Oppfyllbar

- $\exists x \text{Liten}(x)$
- $\exists x (\text{Liten}(x) \wedge \text{Stor}(x))$
- $\exists x Px \rightarrow \forall x Px$

Ikke oppfyllbar

Tolkning av termer og formler

Definisjon (Oppfyllbarhet)

En lukket formel φ er oppfyllbar hvis det fins en modell $\mathcal{M}$ som gjør φ sann. Vi sier også at $\mathcal{M}$ oppfyller φ og at $\mathcal{M}$ en en modell for φ.

Oppfyllbar

- $\exists x \mathrm{Liten}(x)$
- $\exists x(\mathrm{Liten}(x) \land \mathrm{Stor}(x))$
- $\exists x Px \rightarrow \forall x Px$

Ikke oppfyllbar

- $Pa \land \neg Pa$

Tolkning av termer og formler

Definisjon (Oppfyllbarhet)

En lukket formel φ er oppfyllbar hvis det fins en modell $\mathcal{M}$ som gjør φ sann. Vi sier også at $\mathcal{M}$ oppfyller φ og at $\mathcal{M}$ en en modell for φ.

Oppfyllbar

- $\exists x \mathrm{Liten}(x)$
- $\exists x(\mathrm{Liten}(x) \land \mathrm{Stor}(x))$
- $\exists x Px \rightarrow \forall x Px$

Ikke oppfyllbar

- $Pa \land \neg Pa$
- $\exists x(\mathrm{Liten}(x) \land \neg \mathrm{Liten}(x))$

Tolkning av termer og formler

Definisjon (Oppfyllbarhet)

En lukket formel φ er oppfyllbar hvis det fins en modell $\mathcal{M}$ som gjør φ sann. Vi sier også at $\mathcal{M}$ oppfyller φ og at $\mathcal{M}$ en en modell for φ.

Oppfyllbar

- $\exists x \text{Liten}(x)$
- $\exists x(\text{Liten}(x) \land \text{Stor}(x))$
- $\exists x Px \to \forall x Px$

Ikke oppfyllbar

- $Pa \land \neg Pa$
- $\exists x(\text{Liten}(x) \land \neg\text{Liten}(x))$
- $\neg\text{Stor}(a) \land \forall x \text{Stor}(x)$

Tolkning av termer og formler

Tolkning av termer og formler

Definisjon (Gyldighet)

Tolkning av termer og formler

Definisjon (Gyldighet)

En lukket formel φ er gyldig hvis den er sann i alle modeller $\mathcal{M}$

Tolkning av termer og formler

Definisjon (Gyldighet)

En lukket formel φ er gyldig hvis den er sann i alle modeller $\mathcal{M}$, ellers så er den falsifiserbar.

Tolkning av termer og formler

Definisjon (Gyldighet)

En lukket formel φ er gyldig hvis den er sann i alle modeller $\mathcal{M}$, ellers så er den falsifiserbar.

Gyldig

Tolkning av termer og formler

Definisjon (Gyldighet)

En lukket formel φ er gyldig hvis den er sann i alle modeller $\mathcal{M}$, ellers så er den falsifiserbar.

Gyldig

- $\forall xPxa \to \forall zPza$

Tolkning av termer og formler

Definisjon (Gyldighet)

En lukket formel φ er gyldig hvis den er sann i alle modeller $\mathcal{M}$, ellers så er den falsifiserbar.

Gyldig

- $\forall x P x a \rightarrow \forall z P z a$
- $(\forall x P x \wedge \forall y Q y) \rightarrow \forall x P x$

Tolkning av termer og formler

Definisjon (Gyldighet)

En lukket formel φ er gyldig hvis den er sann i alle modeller $\mathcal{M}$, ellers så er den falsifiserbar.

Gyldig

- $\forall x Pxa \rightarrow \forall z Pza$
- $(\forall x Px \land \forall y Qy) \rightarrow \forall x Px$
- $\exists x \mathrm{Liten}(x) \lor \exists x \neg \mathrm{Liten}(x)$

Tolkning av termer og formler

Definisjon (Gyldighet)

En lukket formel φ er gyldig hvis den er sann i alle modeller $\mathcal{M}$, ellers så er den falsifiserbar.

Gyldig

- $\forall x Pxa \rightarrow \forall z Pza$
- $(\forall x Px \land \forall y Qy) \rightarrow \forall x Px$
- $\exists x \mathrm{Liten}(x) \lor \exists x \neg \mathrm{Liten}(x)$

Ikke gyldig (falsfiserbar)

Tolkning av termer og formler

Definisjon (Gyldighet)

En lukket formel φ er gyldig hvis den er sann i alle modeller $\mathcal{M}$, ellers så er den falsifiserbar.

Gyldig

- $\forall x Pxa \rightarrow \forall z Pza$
- $(\forall x Px \wedge \forall y Qy) \rightarrow \forall x Px$
- $\exists x \mathrm{Liten}(x) \vee \exists x \neg \mathrm{Liten}(x)$

Ikke gyldig (falsfiserbar)

- $\forall x Px$

Tolkning av termer og formler

Definisjon (Gyldighet)

En lukket formel φ er gyldig hvis den er sann i alle modeller $\mathcal{M}$, ellers så er den falsifiserbar.

Gyldig

- $\forall x Pxa \rightarrow \forall z Pza$
- $(\forall x Px \land \forall y Qy) \rightarrow \forall x Px$
- $\exists x \mathrm{Liten}(x) \lor \exists x \neg \mathrm{Liten}(x)$

Ikke gyldig (falsfiserbar)

- $\forall x Px$
- $\exists x \mathrm{Stor}(x) \rightarrow \forall x \mathrm{Stor}(x)$

Tolkning av termer og formler

Definisjon (Gyldighet)

En lukket formel φ er gyldig hvis den er sann i alle modeller $\mathcal{M}$, ellers så er den falsifiserbar.

Gyldig

- $\forall x Pxa \rightarrow \forall z Pza$
- $(\forall x Px \wedge \forall y Qy) \rightarrow \forall x Px$
- $\exists x \mathrm{Liten}(x) \vee \exists x \neg \mathrm{Liten}(x)$

Ikke gyldig (falsfiserbar)

- $\forall x Px$
- $\exists x \mathrm{Stor}(x) \rightarrow \forall x \mathrm{Stor}(x)$
- $\exists x Px \rightarrow \exists x (Px \wedge Qx)$

Oppsummering

Oppsummering

En modell $\mathcal{M}$ for et språk $\mathcal{L}$ består av

Oppsummering

En modell $\mathcal{M}$ for et språk $\mathcal{L}$ består av

1. en ikke-tom mengde $|\mathcal{M}|$, kalt domenet til $\mathcal{M}$, og

Oppsummering

En modell $\mathcal{M}$ for et språk $\mathcal{L}$ består av

1. en ikke-tom mengde $|\mathcal{M}|$, kalt domenet til $\mathcal{M}$, og
2. en tolkning av alle ikke-logiske symboler i språket.

Oppsummering

En modell $\mathcal{M}$ for et språk $\mathcal{L}$ består av

1. en ikke-tom mengde $|\mathcal{M}|$, kalt domenet til $\mathcal{M}$, og
2. en tolkning av alle ikke-logiske symboler i språket.

For eksempel, hvis $\mathcal{L}$ er språket $\langle$ 🚺 , 🚹 , ☕ ; 🏭 ; ♀ , ♂ $\rangle$, så må en modell $\mathcal{M}$ gi et domene og en tolkning til alle symbolene.

Oppsummering

En modell $\mathcal{M}$ for et språk $\mathcal{L}$ består av

1. en ikke-tom mengde $|\mathcal{M}|$, kalt domenet til $\mathcal{M}$, og
2. en tolkning av alle ikke-logiske symboler i språket.

For eksempel, hvis $\mathcal{L}$ er språket $\langle$ 🚺 , 🚹 , ☕ ; 🏭 ; ♀ , ♂ $\rangle$, så må en modell $\mathcal{M}$ gi et domene og en tolkning til alle symbolene.

- 🚺$^{\mathcal{M}}$, 🚹$^{\mathcal{M}}$ og ☕$^{\mathcal{M}}$ må være elementer i domenet.

Oppsummering

En modell $\mathcal{M}$ for et språk $\mathcal{L}$ består av

1. en ikke-tom mengde $|\mathcal{M}|$, kalt domenet til $\mathcal{M}$, og
2. en tolkning av alle ikke-logiske symboler i språket.

For eksempel, hvis $\mathcal{L}$ er språket $\langle \Woman, \Man, \Coffeecup \,;\, \Factory \,;\, \Female, \Male \rangle$, så må en modell $\mathcal{M}$ gi et domene og en tolkning til alle symbolene.

- $\Woman^{\mathcal{M}}$, $\Man^{\mathcal{M}}$ og $\Coffeecup^{\mathcal{M}}$ må være elementer i domenet.
- $\Factory^{\mathcal{M}}$ må være en funksjon på domenet

Oppsummering

En modell $\mathcal{M}$ for et språk $\mathcal{L}$ består av

1. en ikke-tom mengde $|\mathcal{M}|$, kalt domenet til $\mathcal{M}$, og
2. en tolkning av alle ikke-logiske symboler i språket.

For eksempel, hvis $\mathcal{L}$ er språket $\langle \text{\Woman}, \text{\Man}, \text{\Coffeecup} ; \text{\Industry} ; \text{\Female}, \text{\Male} \rangle$, så må en modell $\mathcal{M}$ gi et domene og en tolkning til alle symbolene.

- $\text{\Woman}^{\mathcal{M}}$, $\text{\Man}^{\mathcal{M}}$ og $\text{\Coffeecup}^{\mathcal{M}}$ må være elementer i domenet.
- $\text{\Industry}^{\mathcal{M}}$ må være en funksjon på domenet
- $\text{\Female}^{\mathcal{M}}$ og $\text{\Male}^{\mathcal{M}}$ må være relasjoner på domenet.

Oppsummering

En modell $\mathcal{M}$ for et språk $\mathcal{L}$ består av

1. en ikke-tom mengde $|\mathcal{M}|$, kalt domenet til $\mathcal{M}$, og
2. en tolkning av alle ikke-logiske symboler i språket.

For eksempel, hvis $\mathcal{L}$ er språket ⟨ 🚺 , 🚹 , ☕ ; 👑 ; ♀ , ♂ ⟩, så må en modell $\mathcal{M}$ gi et domene og en tolkning til alle symbolene.

- 🚺$^{\mathcal{M}}$, 🚹$^{\mathcal{M}}$ og ☕$^{\mathcal{M}}$ må være elementer i domenet.
- 👑$^{\mathcal{M}}$ må være en funksjon på domenet
- ♀$^{\mathcal{M}}$ og ♂$^{\mathcal{M}}$ må være relasjoner på domenet.
- Husk på ariteten til symbolene. (👑 har aritet 2; ♀ og ♂ har aritet 1.)

Oppsummering

Oppsummering

Hvis $\mathcal{M}$ er en modell og φ er en lukket formel, så definerte vi $\mathcal{M} \models \varphi$.

Oppsummering

Hvis $\mathcal{M}$ er en modell og φ er en lukket formel, så definerte vi $\mathcal{M} \models \varphi$. Vi brukte det utvidete språket - med konstanter for hvert element i domenet - for å gjøre dette.

Oppsummering

Hvis $\mathcal{M}$ er en modell og φ er en lukket formel, så definerte vi $\mathcal{M} \models \varphi$.
Vi brukte det utvidete språket - med konstanter for hvert element i domenet - for å gjøre dette.

- For atomære formler: $\mathcal{M} \models R(t_1, \ldots, t_n)$ hvis $\langle t_1^{\mathcal{M}}, \ldots, t_n^{\mathcal{M}} \rangle \in R^{\mathcal{M}}$.

Oppsummering

Hvis $\mathcal{M}$ er en modell og φ er en lukket formel, så definerte vi $\mathcal{M} \models \varphi$. Vi brukte det utvidete språket - med konstanter for hvert element i domenet - for å gjøre dette.

- For atomære formler: $\mathcal{M} \models R(t_1, \ldots, t_n)$ hvis $\langle t_1^{\mathcal{M}}, \ldots, t_n^{\mathcal{M}} \rangle \in R^{\mathcal{M}}$.
- $\mathcal{M} \models \neg\varphi$ hvis det ikke er tilfelle at $\mathcal{M} \models \varphi$.

Oppsummering

Hvis $\mathcal{M}$ er en modell og φ er en lukket formel, så definerte vi $\mathcal{M} \models \varphi$. Vi brukte det utvidete språket - med konstanter for hvert element i domenet - for å gjøre dette.

- For atomære formler: $\mathcal{M} \models R(t_1, \ldots, t_n)$ hvis $\langle t_1^{\mathcal{M}}, \ldots, t_n^{\mathcal{M}} \rangle \in R^{\mathcal{M}}$.
- $\mathcal{M} \models \neg\varphi$ hvis det ikke er tilfelle at $\mathcal{M} \models \varphi$.
- $\mathcal{M} \models \varphi \land \psi$ hvis $\mathcal{M} \models \varphi$ og $\mathcal{M} \models \psi$.

Oppsummering

Hvis $\mathcal{M}$ er en modell og φ er en lukket formel, så definerte vi $\mathcal{M} \models \varphi$. Vi brukte det utvidete språket - med konstanter for hvert element i domenet - for å gjøre dette.

- For atomære formler: $\mathcal{M} \models R(t_1, \ldots, t_n)$ hvis $\langle t_1^{\mathcal{M}}, \ldots, t_n^{\mathcal{M}} \rangle \in R^{\mathcal{M}}$.
- $\mathcal{M} \models \neg\varphi$ hvis det ikke er tilfelle at $\mathcal{M} \models \varphi$.
- $\mathcal{M} \models \varphi \land \psi$ hvis $\mathcal{M} \models \varphi$ og $\mathcal{M} \models \psi$.
- $\mathcal{M} \models \varphi \lor \psi$ hvis $\mathcal{M} \models \varphi$ eller $\mathcal{M} \models \psi$.

Oppsummering

Hvis $\mathcal{M}$ er en modell og φ er en lukket formel, så definerte vi $\mathcal{M} \models \varphi$. Vi brukte det utvidete språket - med konstanter for hvert element i domenet - for å gjøre dette.

- For atomære formler: $\mathcal{M} \models R(t_1, \ldots, t_n)$ hvis $\langle t_1^{\mathcal{M}}, \ldots, t_n^{\mathcal{M}} \rangle \in R^{\mathcal{M}}$.
- $\mathcal{M} \models \neg\varphi$ hvis det ikke er tilfelle at $\mathcal{M} \models \varphi$.
- $\mathcal{M} \models \varphi \wedge \psi$ hvis $\mathcal{M} \models \varphi$ og $\mathcal{M} \models \psi$.
- $\mathcal{M} \models \varphi \vee \psi$ hvis $\mathcal{M} \models \varphi$ eller $\mathcal{M} \models \psi$.
- $\mathcal{M} \models \varphi \rightarrow \psi$ hvis $\mathcal{M} \models \varphi$ impliserer $\mathcal{M} \models \psi$.

Oppsummering

Hvis $\mathcal{M}$ er en modell og φ er en lukket formel, så definerte vi $\mathcal{M} \models \varphi$. Vi brukte det utvidete språket - med konstanter for hvert element i domenet - for å gjøre dette.

- For atomære formler: $\mathcal{M} \models R(t_1, \ldots, t_n)$ hvis $\langle t_1^{\mathcal{M}}, \ldots, t_n^{\mathcal{M}} \rangle \in R^{\mathcal{M}}$.
- $\mathcal{M} \models \neg\varphi$ hvis det ikke er tilfelle at $\mathcal{M} \models \varphi$.
- $\mathcal{M} \models \varphi \land \psi$ hvis $\mathcal{M} \models \varphi$ og $\mathcal{M} \models \psi$.
- $\mathcal{M} \models \varphi \lor \psi$ hvis $\mathcal{M} \models \varphi$ eller $\mathcal{M} \models \psi$.
- $\mathcal{M} \models \varphi \rightarrow \psi$ hvis $\mathcal{M} \models \varphi$ impliserer $\mathcal{M} \models \psi$.
- $\mathcal{M} \models \forall x\varphi$ hvis $\mathcal{M} \models \varphi[\bar{a}/x]$ for alle a i $|\mathcal{M}|$.

Oppsummering

Hvis $\mathcal{M}$ er en modell og φ er en lukket formel, så definerte vi $\mathcal{M} \models \varphi$. Vi brukte det utvidete språket - med konstanter for hvert element i domenet - for å gjøre dette.

- For atomære formler: $\mathcal{M} \models R(t_1, \ldots, t_n)$ hvis $\langle t_1^{\mathcal{M}}, \ldots, t_n^{\mathcal{M}} \rangle \in R^{\mathcal{M}}$.
- $\mathcal{M} \models \neg\varphi$ hvis det ikke er tilfelle at $\mathcal{M} \models \varphi$.
- $\mathcal{M} \models \varphi \wedge \psi$ hvis $\mathcal{M} \models \varphi$ og $\mathcal{M} \models \psi$.
- $\mathcal{M} \models \varphi \vee \psi$ hvis $\mathcal{M} \models \varphi$ eller $\mathcal{M} \models \psi$.
- $\mathcal{M} \models \varphi \to \psi$ hvis $\mathcal{M} \models \varphi$ impliserer $\mathcal{M} \models \psi$.
- $\mathcal{M} \models \forall x\varphi$ hvis $\mathcal{M} \models \varphi[\bar{a}/x]$ for alle a i $|\mathcal{M}|$.
- $\mathcal{M} \models \exists x\varphi$ hvis $\mathcal{M} \models \varphi[\bar{a}/x]$ for minst en a i $|\mathcal{M}|$.

Språk og modeller - et komplekst forhold

Språk og modeller - et komplekst forhold

- Ved førsteordens språk har vi fått betydelig større uttrykkskraft.

Språk og modeller - et komplekst forhold

- Ved førsteordens språk har vi fått betydelig større uttrykkskraft.
- Modeller kan være rike på struktur.

Språk og modeller - et komplekst forhold

- Ved førsteordens språk har vi fått betydelig større uttrykkskraft.
- Modeller kan være rike på struktur.
- Det er et ikke-trivielt forhold mellom språk og modeller.

Språk og modeller - et komplekst forhold

- Ved førsteordens språk har vi fått betydelig større uttrykkskraft.
- Modeller kan være rike på struktur.
- Det er et ikke-trivielt forhold mellom språk og modeller.
- Noe av det vi er interessert i:

Språk og modeller - et komplekst forhold

- Ved førsteordens språk har vi fått betydelig større uttrykkskraft.
- Modeller kan være rike på struktur.
- Det er et ikke-trivielt forhold mellom språk og modeller.
- Noe av det vi er interessert i:
  - Sjekke om en formel er sann i en modell. (Modellsjekking)

Språk og modeller - et komplekst forhold

- Ved førsteordens språk har vi fått betydelig større uttrykkskraft.
- Modeller kan være rike på struktur.
- Det er et ikke-trivielt forhold mellom språk og modeller.
- Noe av det vi er interessert i:
  - Sjekke om en formel er sann i en modell. (Modellsjekking)
  - Sjekke om en formel er oppfyllbar eller falsifiserbar.

Språk og modeller - et komplekst forhold

- Ved førsteordens språk har vi fått betydelig større uttrykkskraft.
- Modeller kan være rike på struktur.
- Det er et ikke-trivielt forhold mellom språk og modeller.
- Noe av det vi er interessert i:
  - Sjekke om en formel er sann i en modell. (Modellsjekking)
  - Sjekke om en formel er oppfyllbar eller falsifiserbar.
  - Sjekke om en formel er gyldig.

Språk og modeller - et komplekst forhold

- Ved førsteordens språk har vi fått betydelig større uttrykkskraft.
- Modeller kan være rike på struktur.
- Det er et ikke-trivielt forhold mellom språk og modeller.
- Noe av det vi er interessert i:
  - Sjekke om en formel er sann i en modell. (Modellsjekking)
  - Sjekke om en formel er oppfyllbar eller falsifiserbar.
  - Sjekke om en formel er gyldig.
  - Sjekke om formler er uavhengige av hverandre.

Språk og modeller - et komplekst forhold

- Ved førsteordens språk har vi fått betydelig større uttrykkskraft.
- Modeller kan være rike på struktur.
- Det er et ikke-trivielt forhold mellom språk og modeller.
- Noe av det vi er interessert i:
  - Sjekke om en formel er sann i en modell. (Modellsjekking)
  - Sjekke om en formel er oppfyllbar eller falsifiserbar.
  - Sjekke om en formel er gyldig.
  - Sjekke om formler er uavhengige av hverandre.
  - Bruke språket til å beskrive modeller, forsøke å "fange inn" og beskrive virkeligheten.

En utvidelse av figurspråket

En utvidelse av figurspråket

Atomær formel	Intendert tolkning

En utvidelse av figurspråket

Atomær formel	Intendert tolkning
Sirkel(x)	x er en sirkel

En utvidelse av figurspråket

Atomær formel	Intendert tolkning
Sirkel(x)	x er en sirkel
Firkant(x)	x er en firkant

En utvidelse av figurspråket

Atomær formel	Intendert tolkning
Sirkel(x)	x er en sirkel
Firkant(x)	x er en firkant
Trekant(x)	x er en trekant

En utvidelse av figurspråket

Atomær formel	Intendert tolkning
Sirkel(x)	x er en sirkel
Firkant(x)	x er en firkant
Trekant(x)	x er en trekant
Stor(x)	x er stor

En utvidelse av figurspråket

Atomær formel	Intendert tolkning
Sirkel(x)	x er en sirkel
Firkant(x)	x er en firkant
Trekant(x)	x er en trekant
Stor(x)	x er stor
Liten(x)	x er liten

En utvidelse av figurspråket

Atomær formel	Intendert tolkning
Sirkel(x)	x er en sirkel
Firkant(x)	x er en firkant
Trekant(x)	x er en trekant
Stor(x)	x er stor
Liten(x)	x er liten
Mindre(x, y)	x er mindre enn y

En utvidelse av figurspråket

Atomær formel	Intendert tolkning
Sirkel(x)	x er en sirkel
Firkant(x)	x er en firkant
Trekant(x)	x er en trekant
Stor(x)	x er stor
Liten(x)	x er liten
Mindre(x, y)	x er mindre enn y
Over(x, y)	x er nærmere toppen enn y

En utvidelse av figurspråket

Atomær formel	Intendert tolkning
Sirkel(x)	x er en sirkel
Firkant(x)	x er en firkant
Trekant(x)	x er en trekant
Stor(x)	x er stor
Liten(x)	x er liten
Mindre(x, y)	x er mindre enn y
Over(x, y)	x er nærmere toppen enn y
Under(x, y)	x er nærmere bunnen enn y

En utvidelse av figurspråket

Atomær formel	Intendert tolkning
Sirkel(x)	x er en sirkel
Firkant(x)	x er en firkant
Trekant(x)	x er en trekant
Stor(x)	x er stor
Liten(x)	x er liten
Mindre(x, y)	x er mindre enn y
Over(x, y)	x er nærmere toppen enn y
Under(x, y)	x er nærmere bunnen enn y
VenstreFor(x, y)	x er lenger til venstre enn y

En utvidelse av figurspråket

Atomær formel	Intendert tolkning
Sirkel(x)	x er en sirkel
Firkant(x)	x er en firkant
Trekant(x)	x er en trekant
Stor(x)	x er stor
Liten(x)	x er liten
Mindre(x, y)	x er mindre enn y
Over(x, y)	x er nærmere toppen enn y
Under(x, y)	x er nærmere bunnen enn y
VenstreFor(x, y)	x er lenger til venstre enn y
HoyreFor(x, y)	x er lenger til høyre enn y

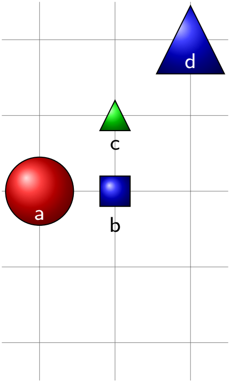
En utvidelse av figurspråket

Atomær formel	Intendert tolkning
Sirkel(x)	x er en sirkel
Firkant(x)	x er en firkant
Trekant(x)	x er en trekant
Stor(x)	x er stor
Liten(x)	x er liten
Mindre(x, y)	x er mindre enn y
Over(x, y)	x er nærmere toppen enn y
Under(x, y)	x er nærmere bunnen enn y
VenstreFor(x, y)	x er lenger til venstre enn y
HoyreFor(x, y)	x er lenger til høyre enn y
Inntil(x, y)	x er rett ved siden av, rett over eller rett under y

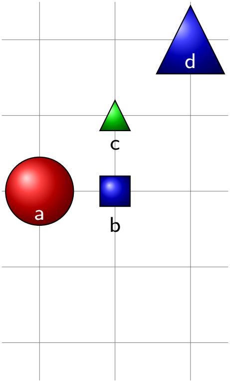
En utvidelse av figurspråket

Atomær formel	Intendert tolkning
Sirkel(x)	x er en sirkel
Firkant(x)	x er en firkant
Trekant(x)	x er en trekant
Stor(x)	x er stor
Liten(x)	x er liten
Mindre(x, y)	x er mindre enn y
Over(x, y)	x er nærmere toppen enn y
Under(x, y)	x er nærmere bunnen enn y
VenstreFor(x, y)	x er lenger til venstre enn y
HoyreFor(x, y)	x er lenger til høyre enn y
Inntil(x, y)	x er rett ved siden av, rett over eller rett under y
Mellom(x, y, z)	x, y og z er i samme kolonne, rad eller diagonal, og x er mellom y og z

En utvidelse av figurspråket

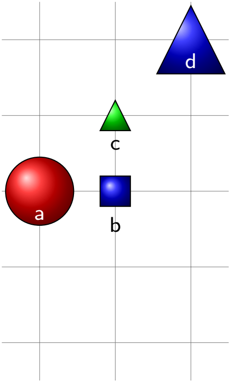


En utvidelse av figurspråket



Forklarende eksempler til semantikken:

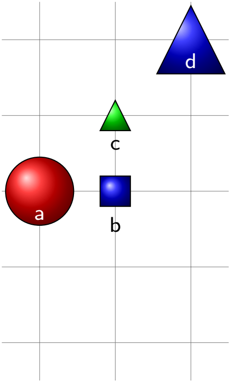
En utvidelse av figurspråket



Forklarende eksempler til semantikken:

- $a^{\mathcal{M}} =$ , $b^{\mathcal{M}} =$ , $c^{\mathcal{M}} =$ , $d^{\mathcal{M}} =$ 
  (vi antar at dette er alle konstantene)

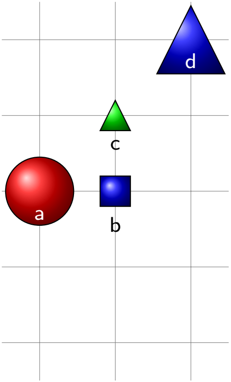
En utvidelse av figurspråket



Forklarende eksempler til semantikken:

- $a^{\mathcal{M}} =$ , $b^{\mathcal{M}} =$ , $c^{\mathcal{M}} =$ , $d^{\mathcal{M}} =$ 
  (vi antar at dette er alle konstantene)
- Trekant$^{\mathcal{M}} = \{$ ,  $\}$

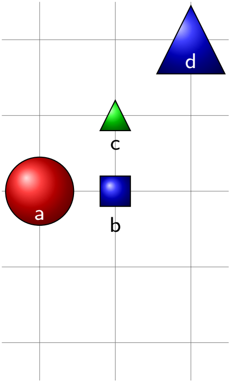
En utvidelse av figurspråket



Forklarende eksempler til semantikken:

- $a^{\mathcal{M}} =$, $b^{\mathcal{M}} =$, $c^{\mathcal{M}} =$, $d^{\mathcal{M}} =$
  (vi antar at dette er alle konstantene)
- $\text{Trekant}^{\mathcal{M}} = \{ , \}$
- $\text{Stor}^{\mathcal{M}} = \{ , \}$

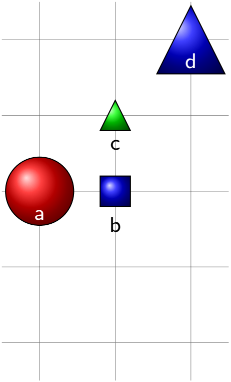
En utvidelse av figurspråket



Forklarende eksempler til semantikken:

- $a^{\mathcal{M}} =$ , $b^{\mathcal{M}} =$ , $c^{\mathcal{M}} =$ , $d^{\mathcal{M}} =$ 
  (vi antar at dette er alle konstantene)
- $\text{Trekant}^{\mathcal{M}} = \{$ ,  $\}$
- $\text{Stor}^{\mathcal{M}} = \{$ ,  $\}$
- $\text{Liten}^{\mathcal{M}} = \{$ ,  $\}$

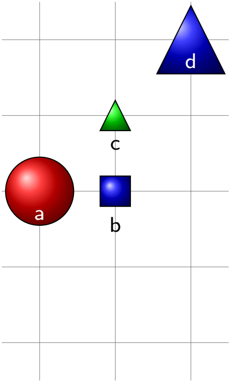
En utvidelse av figurspråket



Forklarende eksempler til semantikken:

- $a^{\mathcal{M}} =$ , $b^{\mathcal{M}} =$ , $c^{\mathcal{M}} =$ , $d^{\mathcal{M}} =$ 
  (vi antar at dette er alle konstantene)
- $\text{Trekant}^{\mathcal{M}} = \{$, $\}$
- $\text{Stor}^{\mathcal{M}} = \{$, $\}$
- $\text{Liten}^{\mathcal{M}} = \{$, $\}$
- $\mathcal{M} \models \text{Under}(a, c)$

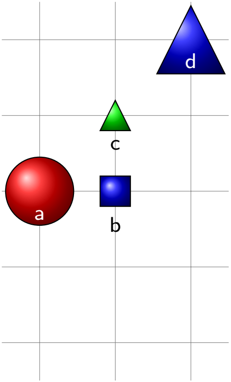
En utvidelse av figurspråket



Forklarende eksempler til semantikken:

- $a^{\mathcal{M}} =$ , $b^{\mathcal{M}} =$ , $c^{\mathcal{M}} =$ , $d^{\mathcal{M}} =$ 
  (vi antar at dette er alle konstantene)
- $\text{Trekant}^{\mathcal{M}} = \{$, $\}$
- $\text{Stor}^{\mathcal{M}} = \{$, $\}$
- $\text{Liten}^{\mathcal{M}} = \{$, $\}$
- $\mathcal{M} \models \text{Under}(a, c)$
  fordi $\langle a^{\mathcal{M}}, c^{\mathcal{M}} \rangle = \langle$, $\rangle \in \text{Under}^{\mathcal{M}}$

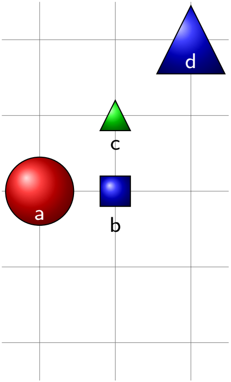
En utvidelse av figurspråket



Forklarende eksempler til semantikken:

- $a^{\mathcal{M}} =$ , $b^{\mathcal{M}} =$ , $c^{\mathcal{M}} =$ , $d^{\mathcal{M}} =$ 
  (vi antar at dette er alle konstantene)
- $\mathrm{Trekant}^{\mathcal{M}} = \{$, $\}$
- $\mathrm{Stor}^{\mathcal{M}} = \{$, $\}$
- $\mathrm{Liten}^{\mathcal{M}} = \{$, $\}$
- $\mathcal{M} \models \mathrm{Under}(a, c)$
  fordi $\langle a^{\mathcal{M}}, c^{\mathcal{M}} \rangle = \langle$, $\rangle \in \mathrm{Under}^{\mathcal{M}}$
- $\mathcal{M} \models \neg\mathrm{Under}(a, b)$

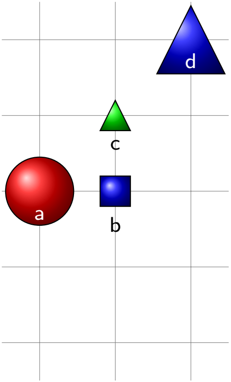
En utvidelse av figurspråket



Forklarende eksempler til semantikken:

- $a^{\mathcal{M}} =$ , $b^{\mathcal{M}} =$ , $c^{\mathcal{M}} =$ , $d^{\mathcal{M}} =$ 
  (vi antar at dette er alle konstantene)
- $\text{Trekant}^{\mathcal{M}} = \{$, $\}$
- $\text{Stor}^{\mathcal{M}} = \{$, $\}$
- $\text{Liten}^{\mathcal{M}} = \{$, $\}$
- $\mathcal{M} \models \text{Under}(a, c)$
  fordi $\langle a^{\mathcal{M}}, c^{\mathcal{M}} \rangle = \langle$, $\rangle \in \text{Under}^{\mathcal{M}}$
- $\mathcal{M} \models \neg\text{Under}(a, b)$
- $\mathcal{M} \models \text{VenstreFor}(a, c) \land \neg\text{VenstreFor}(b, c)$

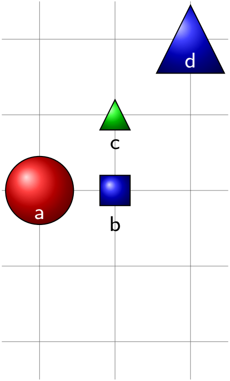
En utvidelse av figurspråket



Forklarende eksempler til semantikken:

- $a^{\mathcal{M}} =$ , $b^{\mathcal{M}} =$ , $c^{\mathcal{M}} =$ , $d^{\mathcal{M}} =$  (vi antar at dette er alle konstantene)
- $\text{Trekant}^{\mathcal{M}} = \{$, $\}$
- $\text{Stor}^{\mathcal{M}} = \{$, $\}$
- $\text{Liten}^{\mathcal{M}} = \{$, $\}$
- $\mathcal{M} \models \text{Under}(a, c)$ fordi $\langle a^{\mathcal{M}}, c^{\mathcal{M}} \rangle = \langle$, $\rangle \in \text{Under}^{\mathcal{M}}$
- $\mathcal{M} \models \neg\text{Under}(a, b)$
- $\mathcal{M} \models \text{VenstreFor}(a, c) \land \neg\text{VenstreFor}(b, c)$
- $\mathcal{M} \models \text{Inntil}(a, b) \land \neg\text{Inntil}(a, c)$

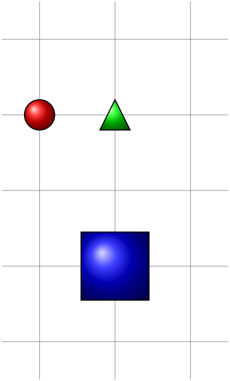
En utvidelse av figurspråket



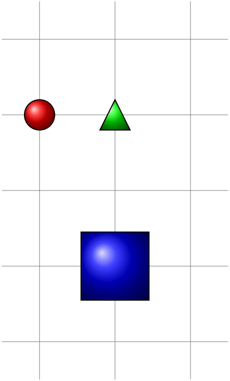
Forklarende eksempler til semantikken:

- $a^{\mathcal{M}} =$ , $b^{\mathcal{M}} =$ , $c^{\mathcal{M}} =$ , $d^{\mathcal{M}} =$ 
  (vi antar at dette er alle konstantene)
- $\text{Trekant}^{\mathcal{M}} = \{$, $\}$
- $\text{Stor}^{\mathcal{M}} = \{$, $\}$
- $\text{Liten}^{\mathcal{M}} = \{$, $\}$
- $\mathcal{M} \models \text{Under}(a, c)$
  fordi $\langle a^{\mathcal{M}}, c^{\mathcal{M}} \rangle = \langle$, $\rangle \in \text{Under}^{\mathcal{M}}$
- $\mathcal{M} \models \neg\text{Under}(a, b)$
- $\mathcal{M} \models \text{VenstreFor}(a, c) \wedge \neg\text{VenstreFor}(b, c)$
- $\mathcal{M} \models \text{Inntil}(a, b) \wedge \neg\text{Inntil}(a, c)$
- $\mathcal{M} \models \text{Mellom}(c, a, d) \wedge \neg\text{Mellom}(c, b, d)$

Oppfyllbarhet av førsteordens formler

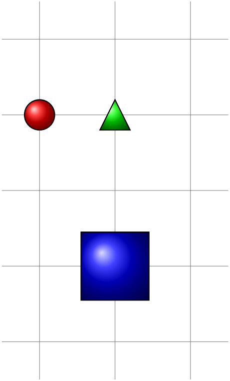


Oppfyllbarhet av førsteordens formler



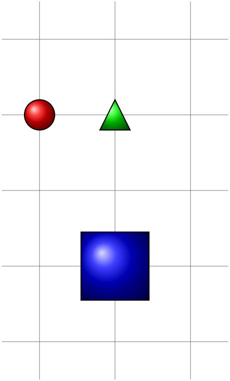
- Er det slik at $\mathcal{M} \models \exists x \mathsf{Liten}(x)$?

Oppfyllbarhet av førsteordens formler



- Er det slik at $\mathcal{M} \models \exists x \text{Liten}(x)$?
- For å svare, må vi se på definisjonen av $\models$.

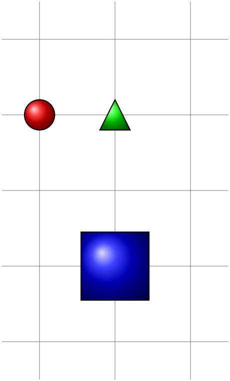
Oppfyllbarhet av førsteordens formler



- Er det slik at $\mathcal{M} \vDash \exists x \mathsf{Liten}(x)$?
- For å svare, må vi se på definisjonen av $\models$.

$$\mathcal{M} \models \exists x \mathsf{Liten}(x)$$

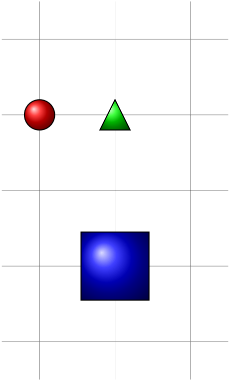
Oppfyllbarhet av førsteordens formler



- Er det slik at $\mathcal{M} \models \exists x \mathrm{Liten}(x)$?
- For å svare, må vi se på definisjonen av $\models$.

$$\mathcal{M} \models \exists x \mathrm{Liten}(x)$$
$$\Updownarrow$$
$$\text{det fins en } a \in |\mathcal{M}| \text{ slik at } \mathcal{M} \models \mathrm{Liten}(\bar{a})$$

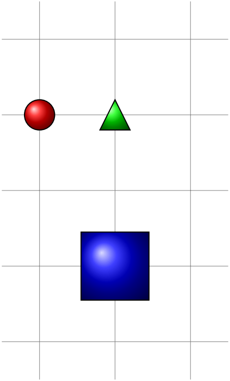
Oppfyllbarhet av førsteordens formler



- Er det slik at $\mathcal{M} \models \exists x \text{Liten}(x)$?
- For å svare, må vi se på definisjonen av $\models$.

$$\mathcal{M} \models \exists x \text{Liten}(x)$$
$$\Updownarrow$$
$$\text{det fins en } a \in |\mathcal{M}| \text{ slik at } \mathcal{M} \models \text{Liten}(\bar{a})$$
$$\Updownarrow$$
$$\text{det fins en } a \in |\mathcal{M}| \text{ slik at } \bar{a}^{\mathcal{M}} \in \text{Liten}^{\mathcal{M}}$$

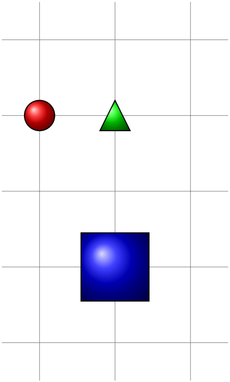
Oppfyllbarhet av førsteordens formler



- Er det slik at $\mathcal{M} \vDash \exists x \mathrm{Liten}(x)$?
- For å svare, må vi se på definisjonen av $\models$.

$$\mathcal{M} \models \exists x \mathrm{Liten}(x)$$
$$\Updownarrow$$
$$\text{det fins en } a \in |\mathcal{M}| \text{ slik at } \mathcal{M} \models \mathrm{Liten}(\bar{a})$$
$$\Updownarrow$$
$$\text{det fins en } a \in |\mathcal{M}| \text{ slik at } \bar{a}^{\mathcal{M}} \in \mathrm{Liten}^{\mathcal{M}}$$
$$\Updownarrow$$
$$\text{det fins en } a \in |\mathcal{M}| \text{ slik at } a \in \mathrm{Liten}^{\mathcal{M}}$$

Oppfyllbarhet av førsteordens formler

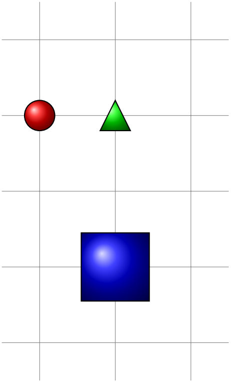


- Er det slik at $\mathcal{M} \vDash \exists x \text{Liten}(x)$?
- For å svare, må vi se på definisjonen av $\models$.

$$\begin{gathered}
\mathcal{M} \models \exists x \text{Liten}(x) \\
\Updownarrow \\
\text{det fins en } a \in |\mathcal{M}| \text{ slik at } \mathcal{M} \models \text{Liten}(\bar{a}) \\
\Updownarrow \\
\text{det fins en } a \in |\mathcal{M}| \text{ slik at } \bar{a}^{\mathcal{M}} \in \text{Liten}^{\mathcal{M}} \\
\Updownarrow \\
\text{det fins en } a \in |\mathcal{M}| \text{ slik at } a \in \text{Liten}^{\mathcal{M}}
\end{gathered}$$

- Siden $\text{Liten}^{\mathcal{M}} = \{●, ▲\}$, kan vi konkludere med

Oppfyllbarhet av førsteordens formler

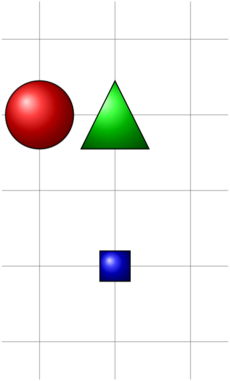


- Er det slik at $\mathcal{M} \vDash \exists x \mathrm{Liten}(x)$?
- For å svare, må vi se på definisjonen av $\models$.

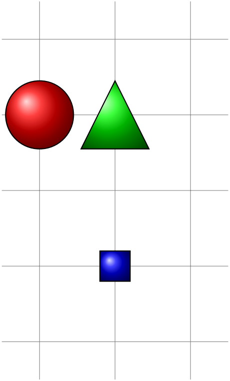
$$\mathcal{M} \models \exists x \mathrm{Liten}(x)$$
$$\Updownarrow$$
$$\text{det fins en } a \in |\mathcal{M}| \text{ slik at } \mathcal{M} \models \mathrm{Liten}(\bar{a})$$
$$\Updownarrow$$
$$\text{det fins en } a \in |\mathcal{M}| \text{ slik at } \bar{a}^{\mathcal{M}} \in \mathrm{Liten}^{\mathcal{M}}$$
$$\Updownarrow$$
$$\text{det fins en } a \in |\mathcal{M}| \text{ slik at } a \in \mathrm{Liten}^{\mathcal{M}}$$

- Siden $\mathrm{Liten}^{\mathcal{M}} = \{\bullet, \blacktriangle\}$, kan vi konkludere med **JA**.

Oppfyllbarhet av førsteordens formler

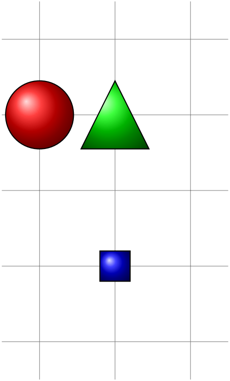


Oppfyllbarhet av førsteordens formler



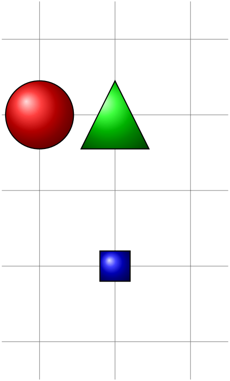
- Er det slik at $\mathcal{M} \models \forall x \mathsf{Stor}(x)$?

Oppfyllbarhet av førsteordens formler



- Er det slik at $\mathcal{M} \models \forall x \mathrm{Stor}(x)$?
- For å svare, må vi se på definisjonen av $\models$.

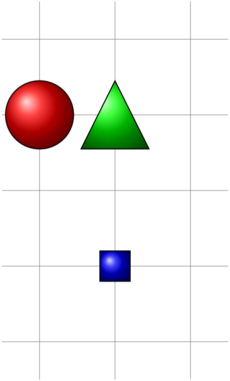
Oppfyllbarhet av førsteordens formler



- Er det slik at $\mathcal{M} \models \forall x \mathsf{Stor}(x)$?
- For å svare, må vi se på definisjonen av $\models$.

$$\mathcal{M} \models \forall x \mathsf{Stor}(x)$$

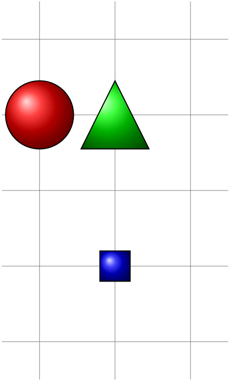
Oppfyllbarhet av førsteordens formler



- Er det slik at $\mathcal{M} \models \forall x \mathsf{Stor}(x)$?
- For å svare, må vi se på definisjonen av $\models$.

$$\mathcal{M} \models \forall x \mathsf{Stor}(x)$$
$$\Updownarrow$$
$$\text{for alle } a \in |\mathcal{M}| \text{ så } \mathcal{M} \models \mathsf{Stor}(\bar{a})$$

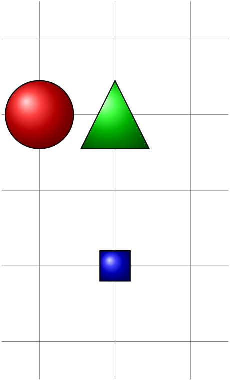
Oppfyllbarhet av førsteordens formler



- Er det slik at $\mathcal{M} \models \forall x \text{Stor}(x)$?
- For å svare, må vi se på definisjonen av $\models$.

$$\mathcal{M} \models \forall x \text{Stor}(x)$$
$$\Updownarrow$$
$$\text{for alle } a \in |\mathcal{M}| \text{ så } \mathcal{M} \models \text{Stor}(\bar{a})$$
$$\Updownarrow$$
$$\text{for alle } a \in |\mathcal{M}| \text{ så } \bar{a}^{\mathcal{M}} \in \text{Stor}^{\mathcal{M}}$$

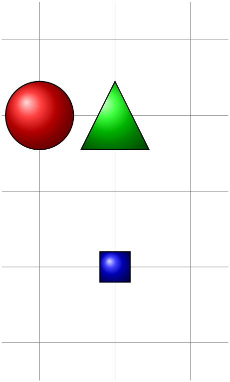
Oppfyllbarhet av førsteordens formler



- Er det slik at $\mathcal{M} \models \forall x \mathsf{Stor}(x)$?
- For å svare, må vi se på definisjonen av $\models$.

$$\mathcal{M} \models \forall x \mathsf{Stor}(x)$$
$$\Updownarrow$$
$$\text{for alle } a \in |\mathcal{M}| \text{ så } \mathcal{M} \models \mathsf{Stor}(\bar{a})$$
$$\Updownarrow$$
$$\text{for alle } a \in |\mathcal{M}| \text{ så } \bar{a}^{\mathcal{M}} \in \mathsf{Stor}^{\mathcal{M}}$$
$$\Updownarrow$$
$$\text{for alle } a \in |\mathcal{M}| \text{ så } a \in \mathsf{Stor}^{\mathcal{M}}$$

Oppfyllbarhet av førsteordens formler

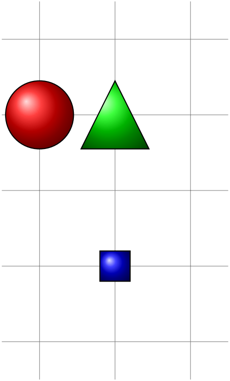


- Er det slik at $\mathcal{M} \models \forall x \mathsf{Stor}(x)$?
- For å svare, må vi se på definisjonen av $\models$.

$$\mathcal{M} \models \forall x \mathsf{Stor}(x)$$
$$\Updownarrow$$
$$\text{for alle } a \in |\mathcal{M}| \text{ så } \mathcal{M} \models \mathsf{Stor}(\bar{a})$$
$$\Updownarrow$$
$$\text{for alle } a \in |\mathcal{M}| \text{ så } \bar{a}^{\mathcal{M}} \in \mathsf{Stor}^{\mathcal{M}}$$
$$\Updownarrow$$
$$\text{for alle } a \in |\mathcal{M}| \text{ så } a \in \mathsf{Stor}^{\mathcal{M}}$$

- Siden $|\mathcal{M}| = \{$, , $\}$ og $\mathsf{Stor}^{\mathcal{M}} = \{$, $\}$, så kan vi konkludere med

Oppfyllbarhet av førsteordens formler



- Er det slik at $\mathcal{M} \models \forall x \mathrm{Stor}(x)$?
- For å svare, må vi se på definisjonen av $\models$.

$$\mathcal{M} \models \forall x \mathrm{Stor}(x)$$
$$\Updownarrow$$
$$\text{for alle } a \in |\mathcal{M}| \text{ så } \mathcal{M} \models \mathrm{Stor}(\bar{a})$$
$$\Updownarrow$$
$$\text{for alle } a \in |\mathcal{M}| \text{ så } \bar{a}^{\mathcal{M}} \in \mathrm{Stor}^{\mathcal{M}}$$
$$\Updownarrow$$
$$\text{for alle } a \in |\mathcal{M}| \text{ så } a \in \mathrm{Stor}^{\mathcal{M}}$$

- Siden $|\mathcal{M}| = \{$, , $\}$ og $\mathrm{Stor}^{\mathcal{M}} = \{$, $\}$, så kan vi konkludere med **NEI**.