INF3170 – Logikk

Forelesning 5: Førsteordens logikk – syntaks og semantikk

Christian Mahesh Hansen

Institutt for informatikk, Universitetet i Oslo

19. februar 2007

Dagens plan

Repetisjon

Et førsteordens språk $\mathcal{L}$ består av:

1. Logiske symboler
   - konnektiver: $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$ og $\neg$
   - hjelpesymboler: '(' og ')' og ','
   - kvantorer: $\exists$ og $\forall$
   - variable: $\mathcal{V} = \{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$
2. Ikke-logiske symboler:
   - en tellbar mengde konstantsymboler
   - en tellbar mengde funksjonssymboler (med aritet)
   - en tellbar mengde relasjonssymboler (med aritet)

- De ikke-logiske symbolene utgjør en signatur

$$\langle \underbrace{c_1, c_2, c_3, \ldots}_{\textit{konstantsymboler}} ; \underbrace{f_1, f_2, f_3, \ldots}_{\textit{funksjonssymboler}} ; \underbrace{R_1, R_2, R_3, \ldots}_{\textit{relasjonssymboler}} \rangle.$$

Repetisjon

Vi så følgende signaturer sist:

enkelt språk:	$\langle$ a	; f, g	; P, R	$\rangle$
aritmetikk 1:	$\langle$ 0	; $s, +$	; $=$	$\rangle$
aritmetikk 2:	$\langle$ $0, 1$	; $+, \times$	; $=, <$	$\rangle$
mengdelære:	$\langle$ $\emptyset$	; $\cap, \cup$	; $=, \in$	$\rangle$
familierelasjoner:	$\langle$ Ola, Kari	; mor, far	; Mor, Far, Slektning	$\rangle$
beundring:	$\langle$ a, b	;	; Idol, Liker	$\rangle$

Repetisjon

Hvis et førsteordens språk $\mathcal{L}$ er gitt, så får vi (definert induktivt):

1. Mengden $\mathcal{T}$ av termer i $\mathcal{L}$:
   - Enhver variabel og konstant er en term.
   - Hvis f er et funksjonssymbol med aritet n og $t_1, \ldots, t_n$ er termer,så er $f(t_1, \ldots, t_n)$ en term.
2. Mengden $\mathcal{F}$ av formler i $\mathcal{L}$:
   - Hvis R er et relasjonssymbol med aritet n og $t_1, \ldots, t_n$ er termer,så er $R(t_1, \ldots, t_n)$ en (atomær) formel.
   - Hvis φ og ψ er formler,så er $\neg\varphi$, $(\varphi \wedge \psi)$, $(\varphi \vee \psi)$ og $(\varphi \rightarrow \psi)$ formler.
   - Hvis φ er en formel og x er en variabel,så er $\forall x\varphi$ og $\exists x\varphi$ formler.

   Alle forekomster av en variabel x i φ sies å være bundet i formlene $\forall x\varphi$ og $\exists x\varphi$ og innenfor skopet til den gjeldende kvantoren.

Repetisjon

I språket for beundring $\langle a, b; -; \text{Idol}, \text{Liker}\rangle$ kan vi uttrykke:

1:	Alice liker Bob:	$\text{Liker}(a, b)$
2:	Alice liker alle:	$\forall x \text{Liker}(a, x)$
3:	Alice liker alle som Bob liker:	$\forall x(\text{Liker}(b, x) \rightarrow \text{Liker}(a, x))$
4:	Noen liker seg selv:	$\exists x \text{Liker}(x, x)$
5:	Bob liker alle som liker seg selv:	$\forall x(\text{Liker}(x, x) \rightarrow \text{Liker}(b, x))$
6:	Ingen liker både Alice og Bob:	$\neg\exists x(\text{Liker}(x, a) \wedge \text{Liker}(x, b))$
		$\forall x(\text{Liker}(x, a) \rightarrow \neg\text{Liker}(x, b))$
7:	Noen liker ikke seg selv:	$\exists x \neg\text{Liker}(x, x)$
8:	Bob liker noen som liker Alice:	$\exists x(\text{Liker}(b, x) \wedge \text{Liker}(x, a))$
9:	En som blir likt av alle er et idol:	$\forall x(\forall y \text{Liker}(y, x) \rightarrow \text{Idol}(x))$
10:	Et idol blir likt av alle:	$\forall x(\text{Idol}(x) \rightarrow \forall y \text{Liker}(y, x))$

Frie variable i termer

Definisjon (Frie variable i en term)

$\text{FV}(t)$ *betegner mengden av frie variable i termen* t.

Definisjon (Lukket term)

En term t *er lukket hvis* $\text{FV}(t) = \emptyset$, *dvs.* t *inneholder ingen frie variable.*

Eksempel

I språket $\langle a, b; f; -\rangle$ *har vi:*

- *Termen* $f(x, a)$ *har en fri variabel* x.
- *Termen* $f(a, b)$ *har ingen frie variable og er en lukket term.*

Rekursive definisjoner

Når mengder er definert *induktivt*, så kan vi definere funksjoner over denne mengden rekursivt ved å

1. gi verdi til de "atomære" elementene (i basismengden), og
2. gi verdi til "sammensatte" elementene (fra induksjonssteget) ved å bruke verdiene som ble gitt til komponentene.

Den presise, rekursive definisjonen av FV er følgende.

Definisjon (Frie variable - definert rekursivt)

Gitt en term t, la mengden $\mathrm{FV}(t)$ av frie variable i t være definert rekursivt ved:

- $\mathrm{FV}(x_i) = \{x_i\}$, *for en variabel* x_i, *og*
- $\mathrm{FV}(c_i) = \emptyset$, *for en konstant* c_i, *og*
- $\mathrm{FV}(f(t_1, \ldots, t_n)) = \mathrm{FV}(t_1) \cup \cdots \cup \mathrm{FV}(t_n)$, *for et funksjonssymbol* f *med aritet* n.

Frie variable i formler

Definisjon (Frie variable i en formel)

En variabelforekomst i en førsteordens formel er fri hvis den ikke er bundet, dvs. hvis den ikke er innenfor skopet til en kvantor. Vi skriver $\mathrm{FV}(\varphi)$ *for mengden av frie variable i* φ.

Eksempel ($\forall xRxy \land Pz$)

- x *er bundet*
- y *er fri*
- z *er fri*

Eksempel ($\forall xPxy \to \forall zPzx$)

- x *er bundet*
- x *er fri*
- y *er fri*
- z *er bundet*

Oppgave

Gi den presise, rekursive, definisjonen av frie variable i en formel.

Substitusjoner

Definisjon (Substitusjon for termer)

La s og t være termer og x en variabel. Da er $s[t/x]$, det vi får ved å erstatte alle forekomster av x i s med t, definert rekursivt ved:

1. $y[t/x] = \begin{cases} t & \text{hvis } x = y \\ y & \text{ellers} \end{cases}$ *(når s er en variabel y).*
2. $c[t/x] = c$ *(når s er en konstant c).*
3. $f(t_1[t/x], \ldots, t_n[t/x])$ *(når s er en funksjonsterm $f(t_1, \ldots, t_n)$).*

Eksempel

- $f(x, y, a)[y/x] = f(x[y/x], y[y/x], a[y/x]) = f(y, y, a)$
- $f(y, y, a)[b/y] = f(y[b/y], y[b/y], a[b/y]) = f(b, b, a)$

Substitusjoner

Definisjon (Substitusjon for formler)

$\varphi[t/x]$ er definert rekursivt ved:

1. $R(t_1, \ldots, t_n)[t/x] = R(t_1[t/x], \ldots, t_n[t/x])$
2. $\neg\psi[t/x] = \neg(\psi[t/x])$
3. $(\varphi_1 \circ \varphi_2)[t/x] = (\varphi_1[t/x] \circ \varphi_2[t/x])$, *hvor* $\circ \in \{\land, \lor, \to\}$
4. $\mathsf{Q}y\psi[t/x] = \begin{cases} \mathsf{Q}y(\psi[t/x]) & \text{hvis } x \neq y \\ \mathsf{Q}y\psi & \text{ellers} \end{cases}$, *hvor* $\mathsf{Q} \in \{\forall, \exists\}$

Eksempel

- $(Pxy \land \forall xPxy)[a/x] = (Pay \land \forall xPxy)$
- $(Pxy \land \forall xPxy)[a/y] = (Pxa \land \forall xPxa)$

Substitusjoner

- Vi ser at substitusjon ikke blir gjort for bundne variable.
- Vi har enda et tilfelle hvor vi ønsker å forhindre substitusjon.

Eksempel

- $\exists x \text{Liker}(x, y)[f(x)/y] = \exists x \text{Liker}(x, f(x))$

- Her blir en variabel bundet *etter* substitusjon.
- Dette kan endre meningen til en formel på en måte som vi ikke ønsker.

Substitusjoner

Definisjon

Vi sier at t er fri for x i φ hvis ingen variabel i t blir bundet som følge av å substituere t for x i φ.

Eksempel

Termen $f(x)$ er ikke fri for y i formelen $\exists x \text{Liker}(x, y)$.

- En måte å unngå dette på er å omdøpe bundne variable først.
- F.eks. se på $\exists z \text{Liker}(z, y)$ i stedet for $\exists x \text{Liker}(x, y)$.
- Fra nå av antar vi at alle substitusjoner er "fri for", dvs. at ingen variable blir bundet som følge av en substitusjon.

Lukkede og åpne formler

Definisjon (Lukket/åpen formel)

En formel φ er lukket hvis $\text{FV}(\varphi) = \emptyset$, dvs. φ inneholder ingen frie variable. En formel er åpen hvis den ikke inneholder noen kvantorer.

Eksempel

- $\forall x Pxa$ *er lukket*
- $\forall x Pxy$ *er ikke lukket*
- Pxy *er ikke lukket, men åpen*
- Pab *er åpen og lukket*

Introduksjon

- Hvordan skal vi tolke førsteordens formler?
- Hva skal $\forall x \varphi$ og $\exists x \varphi$ bety?
- Hva kan vi bruke førsteordens formler til å uttrykke?
  (Hva er det førsteordens formler *ikke* kan uttrykke?)
- Hva gjør en formel sann / gyldig / oppfyllbar?
- Å gi en semantikk er å si noe om forholdet mellom språk og virkelighet.
  - Valuasjoner gir en semantikk for klassisk utsagnslogikk.
- I førsteordens logikk vil modeller gi oss en semantikk.

Introduksjon

En modell består intuitivt av

1. en mengde, og
2. en tolkning av alle ikke-logiske symboler slik at
   - et konstantsymbol tolkes som et element i mengden,
   - et funksjonssymbol tolkes som en funksjon på mengden, og
   - et relasjonssymbol tolkes som en relasjon på mengden.

Vi skal først definere modeller helt presist, også skal vi definere hva det vil si at en formel er sann i en modell.

Husk

Hvis D en mengde, så består D^n av alle n-tupler av elementer fra D, for $n \geq 0$.

$$D^n = \{\langle d_1, \ldots, d_n \rangle \mid d_1, \ldots, d_n \in D\}$$

Modeller

La et førsteordens språk $\mathcal{L}$ være gitt.

Definisjon (Modell)

En modell $\mathcal{M}$ for $\mathcal{L}$ består av en ikke-tom mengde D, kalt domenet til $\mathcal{M}$, og en funksjon $(\cdot)^{\mathcal{M}}$ som tolker alle ikke-logiske symboler på følgende måte:

- *Hvis c er et konstantsymbol, så er $c^{\mathcal{M}} \in D$.*
- *Hvis f er et funksjonsymbol med aritet n,så er $f^{\mathcal{M}}$ en funksjon fra $D^n = \underbrace{D \times \cdots \times D}_{n}$ til D.*
- *Hvis R er et relasjonssymbol med aritet n,så er $R^{\mathcal{M}}$ en relasjon på $D^n = \underbrace{D \times \cdots \times D}_{n}$.*

Vi skriver $|\mathcal{M}|$ for domenet D til modellen $\mathcal{M}$.

Noen kommentarer

1. Et funksjonssymbol f med aritet 0 kan betraktes som en konstant.
   - Da er $f^{\mathcal{M}}$ en funksjon fra D^0 til D.
   - Siden D^0 består av kun ett element $\langle\rangle$ - det tomme tuppelet - så består $f^{\mathcal{M}}$ også av kun ett element $\langle\langle\rangle, e\rangle$, hvor $e \in D$.
   - Vi kan derfor identifisere $f^{\mathcal{M}}$ med e.
2. Et relasjonssymbol R med aritet 0 kan betraktes som en utsagnsvariabel.
   - Da er $R^{\mathcal{M}}$ en delmengde av D^0.
   - Siden D^0 består av kun ett element $\langle\rangle$ - det tomme tuppelet -så fins det nøyaktig to muligheter for $R^{\mathcal{M}}$.
   - Enten så er $R^{\mathcal{M}}$ tom eller så er $\langle\rangle \in R^{\mathcal{M}}$.
   - Vi kan derfor tenke på D^0 som **Bool**.
3. Et tuppel $\langle e \rangle$, hvor $e \in D$, kan vi identifisere med elementet e.
   - Når et relasjonssymbol R har aritet 1,så skriver vi derfor $\{e_1, \ldots, e_n\}$ i stedet for $\{\langle e_1 \rangle, \ldots, \langle e_n \rangle\}$.
   - Vi antar derfor også at $R^{\mathcal{M}} \subseteq D$.

Hovedeksempel - et figurspråk

Relasjonssymbol	aritet
Sirkel	1
Firkant	1
Trekant	1
Stor	1
Liten	1
Mindre	2

- Konstantsymboler: a, b, c, d, e, f.
- Funksjonssymboler: ingen.
- Vi leser på denne måten:

  Sirkel(x): "x er en sirkel"

  Firkant(x): "x er en firkant"

  Trekant(x): "x er en trekant"

  Stor(x): "x er stor"

  Liten(x): "x er liten"

  Mindre(x, y): "x er mindre enn y"

La oss nå lage en modell for dette språket!

Hovedeksempel - et figurspråk

En tolkning av figurspråket

La $\mathcal{M}$ være en modell med domene $D = \{\ ,\ ,\ ,\ ,\ ,\ \}$.

$a^{\mathcal{M}} =$ Sirkel$^{\mathcal{M}} = \{\ ,\ \}$

$b^{\mathcal{M}} =$ Firkant$^{\mathcal{M}} = \{\ ,\ \}$

$c^{\mathcal{M}} =$ Trekant$^{\mathcal{M}} = \{\ ,\ \}$

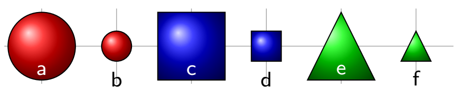
$d^{\mathcal{M}} =$ Stor$^{\mathcal{M}} = \{\ ,\ ,\ \}$

$e^{\mathcal{M}} =$ Liten$^{\mathcal{M}} = \{\ ,\ ,\ \}$

$f^{\mathcal{M}} =$ Mindre$^{\mathcal{M}} = \{\langle\ ,\ \rangle, \langle\ ,\ \rangle, \langle\ ,\ \rangle, \langle\ ,\ \rangle, \ldots\}$

Hovedeksempel - et figurspråk

Vi foregriper begivenhetene og ser på hvilke atomære formler som er sanne og usanne i modellen $\mathcal{M}$.



Sant

- Sirkel(a)
- Firkant(c)
- Liten(b)
- Mindre(b, e)

Usant

- Trekant(a)
- Stor(b)
- Mindre(a, b)
- Mindre(a, a)

Tolkning av termer og formler

- Vi så i eksempelet over at vi hadde et konstantsymbol for hvert element i domenet, men det er ikke alltid slik.
- Når vi skal tolke formler er det nyttig å ha en konstant for hvert element.

Definisjon (Utvidet språk $\mathcal{L}(\mathcal{M})$)

La $\mathcal{L}$ være et førsteordens språk og $\mathcal{M}$ en modell for $\mathcal{L}$. Da er $\mathcal{L}(\mathcal{M})$ det førsteordens språket man får fra $\mathcal{L}$ ved å legge til nye konstantsymboler for hvert element i $|\mathcal{M}|$. Hvis a er i $|\mathcal{M}|$, så skriver vi $\bar{a}$ for den nye konstanten. Hvis $\mathcal{N}$ er en modell for $\mathcal{L}(\mathcal{M})$, så krever vi at $\bar{a}^{\mathcal{N}} = a$.

- Når vi tolker termer og formler fra språket $\mathcal{L}$ i en modell $\mathcal{M}$, så bruker vi det utvidete språket $\mathcal{L}(\mathcal{M})$ og antar at $\mathcal{M}$ er en $\mathcal{L}(\mathcal{M})$-modell.

Tolkning av termer og formler

Definisjon (Tolkning av lukkede termer)

La $\mathcal{L}$ være et førsteordens språk og $\mathcal{M}$ en modell for $\mathcal{L}$. Anta at $\mathcal{M}$ er en $\mathcal{L}(\mathcal{M})$-modell. Da tolker vi en lukket term $f(t_1, \ldots, t_n)$ på følgende måte:

$$f(t_1, \ldots, t_n)^{\mathcal{M}} = f^{\mathcal{M}}(t_1^{\mathcal{M}}, \ldots, t_n^{\mathcal{M}}).$$

Oppgave

Dette er en rekursiv definisjon. Skriv ut hele definisjonen.

Tolkning av termer og formler

Definisjon (Tolkning av lukkede formler)

La $\mathcal{L}$ være et førsteordens språk og $\mathcal{M}$ en modell for $\mathcal{L}$. Anta a $\mathcal{M}$ er en $\mathcal{L}(\mathcal{M})$-modell. Vi definerer ved rekursjon hva det vil si at en lukket formel φ er sann i $\mathcal{M}$; vi skriver $\mathcal{M} \models \varphi$ når φ er sann i $\mathcal{M}$ / $\mathcal{M}$ gjør φ sann.

- *For atomære formler: $\mathcal{M} \models R(t_1, \ldots, t_n)$ hvis $\langle t_1^{\mathcal{M}}, \ldots, t_n^{\mathcal{M}} \rangle \in R^{\mathcal{M}}$.*
- *$\mathcal{M} \models \neg\varphi$ hvis det ikke er tilfelle at $\mathcal{M} \models \varphi$.*
- *$\mathcal{M} \models \varphi \land \psi$ hvis $\mathcal{M} \models \varphi$ og $\mathcal{M} \models \psi$.*
- *$\mathcal{M} \models \varphi \lor \psi$ hvis $\mathcal{M} \models \varphi$ eller $\mathcal{M} \models \psi$.*
- *$\mathcal{M} \models \varphi \rightarrow \psi$ hvis $\mathcal{M} \models \varphi$ impliserer $\mathcal{M} \models \psi$.*
- *$\mathcal{M} \models \forall x\varphi$ hvis $\mathcal{M} \models \varphi[\bar{a}/x]$ for alle a i $|\mathcal{M}|$.*
- *$\mathcal{M} \models \exists x\varphi$ hvis $\mathcal{M} \models \varphi[\bar{a}/x]$ for minst en a i $|\mathcal{M}|$.*

Tolkning av termer og formler

Definisjon (Oppfyllbarhet)

En lukket formel φ er oppfyllbar hvis det fins en modell $\mathcal{M}$ som gjør φ sann. Vi sier også at $\mathcal{M}$ oppfyller φ og at $\mathcal{M}$ en en modell for φ.

Oppfyllbar

- $\exists x \mathrm{Liten}(x)$
- $\exists x(\mathrm{Liten}(x) \land \mathrm{Stor}(x))$
- $\exists x Px \rightarrow \forall x Px$

Ikke oppfyllbar

- $Pa \land \neg Pa$
- $\exists x(\mathrm{Liten}(x) \land \neg\mathrm{Liten}(x))$
- $\neg\mathrm{Stor}(a) \land \forall x \mathrm{Stor}(x)$

Tolkning av termer og formler

Definisjon (Gyldighet)

En lukket formel φ er gyldig hvis den er sann i alle modeller $\mathcal{M}$, ellers så er den falsifiserbar.

Gyldig

- $\forall x Pxa \rightarrow \forall z Pza$
- $(\forall x Px \land \forall y Qy) \rightarrow \forall x Px$
- $\exists x \mathrm{Liten}(x) \lor \exists x \neg\mathrm{Liten}(x)$

Ikke gyldig (falsfiserbar)

- $\forall x Px$
- $\exists x \mathrm{Stor}(x) \rightarrow \forall x \mathrm{Stor}(x)$
- $\exists x Px \rightarrow \exists x(Px \land Qx)$

Oppsummering

En modell $\mathcal{M}$ for et språk $\mathcal{L}$ består av

1. en ikke-tom mengde $|\mathcal{M}|$, kalt domenet til $\mathcal{M}$, og
2. en tolkning av alle ikke-logiske symboler i språket.

For eksempel, hvis $\mathcal{L}$ er språket ⟨ 🚺 , 🚹 , ☕ ; 🏭 ; ♀ , ♂ ⟩, så må en modell $\mathcal{M}$ gi et domene og en tolkning til alle symbolene.

- 🚺$^{\mathcal{M}}$, 🚹$^{\mathcal{M}}$ og ☕$^{\mathcal{M}}$ må være elementer i domenet.
- 🏭$^{\mathcal{M}}$ må være en funksjon på domenet
- ♀$^{\mathcal{M}}$ og ♂$^{\mathcal{M}}$ må være relasjoner på domenet.
- Husk på ariteten til symbolene. (🏭 har aritet 2; ♀ og ♂ har aritet 1.)

Oppsummering

Hvis $\mathcal{M}$ er en modell og φ er en lukket formel, så definerte vi $\mathcal{M} \models \varphi$. Vi brukte det utvidete språket - med konstanter for hvert element i domenet - for å gjøre dette.

- For atomære formler: $\mathcal{M} \models R(t_1, \ldots, t_n)$ hvis $\langle t_1^{\mathcal{M}}, \ldots, t_n^{\mathcal{M}} \rangle \in R^{\mathcal{M}}$.
- $\mathcal{M} \models \neg\varphi$ hvis det ikke er tilfelle at $\mathcal{M} \models \varphi$.
- $\mathcal{M} \models \varphi \land \psi$ hvis $\mathcal{M} \models \varphi$ og $\mathcal{M} \models \psi$.
- $\mathcal{M} \models \varphi \lor \psi$ hvis $\mathcal{M} \models \varphi$ eller $\mathcal{M} \models \psi$.
- $\mathcal{M} \models \varphi \to \psi$ hvis $\mathcal{M} \models \varphi$ impliserer $\mathcal{M} \models \psi$.
- $\mathcal{M} \models \forall x\varphi$ hvis $\mathcal{M} \models \varphi[\bar{a}/x]$ for alle a i $|\mathcal{M}|$.
- $\mathcal{M} \models \exists x\varphi$ hvis $\mathcal{M} \models \varphi[\bar{a}/x]$ for minst en a i $|\mathcal{M}|$.

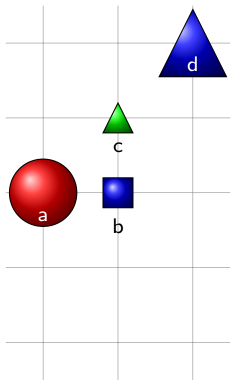
Språk og modeller - et komplekst forhold

- Ved førsteordens språk har vi fått betydelig større uttrykkskraft.
- Modeller kan være rike på struktur.
- Det er et ikke-trivielt forhold mellom språk og modeller.
- Noe av det vi er interessert i:
  - Sjekke om en formel er sann i en modell. (Modellsjekking)
  - Sjekke om en formel er oppfyllbar eller falsifiserbar.
  - Sjekke om en formel er gyldig.
  - Sjekke om formler er uavhengige av hverandre.
  - Bruke språket til å beskrive modeller, forsøke å "fange inn" og beskrive virkeligheten.

En utvidelse av figurspråket

Atomær formel	Intendert tolkning
Sirkel(x)	x er en sirkel
Firkant(x)	x er en firkant
Trekant(x)	x er en trekant
Stor(x)	x er stor
Liten(x)	x er liten
Mindre(x, y)	x er mindre enn y
Over(x, y)	x er nærmere toppen enn y
Under(x, y)	x er nærmere bunnen enn y
VenstreFor(x, y)	x er lenger til venstre enn y
HoyreFor(x, y)	x er lenger til høyre enn y
Inntil(x, y)	x er rett ved siden av, rett over eller rett under y
Mellom(x, y, z)	x, y og z er i samme kolonne, rad eller diagonal, og x er mellom y og z

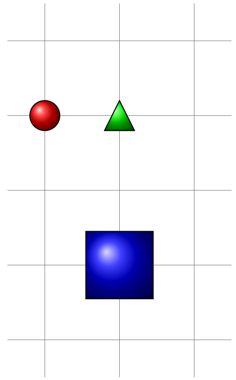
En utvidelse av figurspråket



Forklarende eksempler til semantikken:

- $a^{\mathcal{M}} =$, $b^{\mathcal{M}} =$, $c^{\mathcal{M}} =$, $d^{\mathcal{M}} =$
  (vi antar at dette er alle konstantene)
- $\text{Trekant}^{\mathcal{M}} = \{ , \}$
- $\text{Stor}^{\mathcal{M}} = \{ , \}$
- $\text{Liten}^{\mathcal{M}} = \{ , \}$
- $\mathcal{M} \models \text{Under}(a, c)$
  fordi $\langle a^{\mathcal{M}}, c^{\mathcal{M}} \rangle = \langle , \rangle \in \text{Under}^{\mathcal{M}}$
- $\mathcal{M} \models \neg\text{Under}(a, b)$
- $\mathcal{M} \models \text{VenstreFor}(a, c) \land \neg\text{VenstreFor}(b, c)$
- $\mathcal{M} \models \text{Inntil}(a, b) \land \neg\text{Inntil}(a, c)$
- $\mathcal{M} \models \text{Mellom}(c, a, d) \land \neg\text{Mellom}(c, b, d)$

Oppfyllbarhet av førsteordens formler

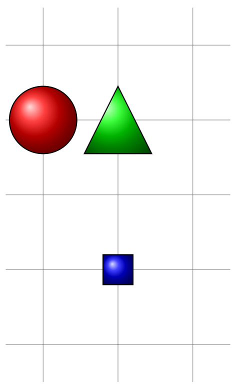


- Er det slik at $\mathcal{M} \models \exists x \text{Liten}(x)$?
- For å svare, må vi se på definisjonen av $\models$.

$$\begin{gathered}\mathcal{M} \models \exists x \text{Liten}(x)\\ \Updownarrow\\ \text{det fins en } a \in |\mathcal{M}| \text{ slik at } \mathcal{M} \models \text{Liten}(\bar{a})\\ \Updownarrow\\ \text{det fins en } a \in |\mathcal{M}| \text{ slik at } \bar{a}^{\mathcal{M}} \in \text{Liten}^{\mathcal{M}}\\ \Updownarrow\\ \text{det fins en } a \in |\mathcal{M}| \text{ slik at } a \in \text{Liten}^{\mathcal{M}}\end{gathered}$$

- Siden $\text{Liten}^{\mathcal{M}} = \{ , \}$, kan vi konkludere med **JA**.

Oppfyllbarhet av førsteordens formler



- Er det slik at $\mathcal{M} \models \forall x \text{Stor}(x)$?
- For å svare, må vi se på definisjonen av $\models$.

$$\begin{gathered}\mathcal{M} \models \forall x \text{Stor}(x)\\ \Updownarrow\\ \text{for alle } a \in |\mathcal{M}| \text{ så } \mathcal{M} \models \text{Stor}(\bar{a})\\ \Updownarrow\\ \text{for alle } a \in |\mathcal{M}| \text{ så } \bar{a}^{\mathcal{M}} \in \text{Stor}^{\mathcal{M}}\\ \Updownarrow\\ \text{for alle } a \in |\mathcal{M}| \text{ så } a \in \text{Stor}^{\mathcal{M}}\end{gathered}$$

- Siden $|\mathcal{M}| = \{ , , \}$ og $\text{Stor}^{\mathcal{M}} = \{ , \}$, så kan vi konkludere med **NEI**.