Forelesning 5: Førsteordens logikk – syntaks og semantikk

Christian Mahesh Hansen - 19. februar 2007

1 Førsteordens logikk - syntaks

1.1 Repetisjon

Et førsteordens språk $\mathcal{L}$ består av:

1. Logiske symboler
   - konnektiver: $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$ og $\neg$
   - hjelpesymboler: '(' og ')' og ','
   - kvantorer: $\exists$ og $\forall$
   - variable: $\mathcal{V} = \{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$
2. Ikke-logiske symboler:
   - en tellbar mengde konstantsymboler
   - en tellbar mengde funksjonssymboler (med aritet)
   - en tellbar mengde relasjonssymboler (med aritet)

- De ikke-logiske symbolene utgjør en *signatur*

$$\langle \underbrace{c_1, c_2, c_3, \ldots}_{konstantsymboler} \; ; \; \underbrace{f_1, f_2, f_3, \ldots}_{funksjonssymboler} \; ; \underbrace{R_1, R_2, R_3, \ldots}_{relasjonssymboler} \rangle.$$

Vi så følgende signaturer sist:

enkelt språk:	$\langle$	a	;	f, g	;	P, R	$\rangle$
aritmetikk 1:	$\langle$	0	;	$s, +$	;	$=$	$\rangle$
aritmetikk 2:	$\langle$	$0, 1$	;	$+, \times$	;	$=, <$	$\rangle$
mengdelære:	$\langle$	$\emptyset$	;	$\cap, \cup$	;	$=, \in$	$\rangle$
familierelasjoner:	$\langle$	Ola, Kari	;	mor, far	;	Mor, Far, Slektning	$\rangle$
beundring:	$\langle$	a, b	;		;	Idol, Liker	$\rangle$

Hvis et førsteordens språk $\mathcal{L}$ er gitt, så får vi (definert induktivt):

1. Mengden $\mathcal{T}$ av termer i $\mathcal{L}$:
   - Enhver variabel og konstant er en term.
   - 1 Hvis f er et funksjonssymbol med aritet n og $t_1, \ldots, t_n$ er termer,så er $f(t_1, ..., t_n)$ en term.
2. Mengden $\mathcal{F}$ av formler i $\mathcal{L}$:
   - 2 Hvis R er et relasjonssymbol med aritet n og $t_1, \ldots, t_n$ er termer,så er $R(t_1, \ldots, t_n)$ en (atomær) formel.

3 • Hvis φ og ψ er formler,så er $\neg\varphi$, $(\varphi \wedge \psi)$, $(\varphi \vee \psi)$ og $(\varphi \to \psi)$ formler.

4 • Hvis φ er en formel og x er en variabel,så er $\forall x\varphi$ og $\exists x\varphi$ formler.

Alle forekomster av en variabel x i φ sies å være bundet i formlene $\forall x\varphi$ og $\exists x\varphi$ og innenfor skopet til den gjeldende kvantoren.

I språket for beundring $\langle a, b; -; \mathsf{Idol}, \mathsf{Liker}\rangle$ kan vi uttrykke:

1:	Alice liker Bob:	$\mathsf{Liker}(a, b)$
2:	Alice liker alle:	$\forall x \mathsf{Liker}(a, x)$
3:	Alice liker alle som Bob liker:	$\forall x(\mathsf{Liker}(b, x) \to \mathsf{Liker}(a, x))$
4:	Noen liker seg selv:	$\exists x \mathsf{Liker}(x, x)$
5:	Bob liker alle som liker seg selv:	$\forall x(\mathsf{Liker}(x, x) \to \mathsf{Liker}(b, x))$
6:	Ingen liker både Alice og Bob:	$\neg\exists x(\mathsf{Liker}(x, a) \wedge \mathsf{Liker}(x, b))$
		$\forall x(\mathsf{Liker}(x, a) \to \neg\mathsf{Liker}(x, b))$
7:	Noen liker ikke seg selv:	$\exists x \neg\mathsf{Liker}(x, x)$
8:	Bob liker noen som liker Alice:	$\exists x(\mathsf{Liker}(b, x) \wedge \mathsf{Liker}(x, a))$
9:	En som blir likt av alle er et idol:	$\forall x(\forall y \mathsf{Liker}(y, x) \to \mathsf{Idol}(x))$
10:	Et idol blir likt av alle:	$\forall x(\mathsf{Idol}(x) \to \forall y \mathsf{Liker}(y, x))$

1.2 Frie variable

Frie variable i termer

Definisjon 1.1 (Frie variable i en term)**.** $\mathsf{FV}(t)$ *betegner mengden av* frie variable *i termen* t*.*

Definisjon 1.2 (Lukket term)**.** *En term* t *er* lukket *hvis* $\mathsf{FV}(t) = \emptyset$*, dvs.* t *inneholder ingen frie variable.*

Eksempel. *I språket* $\langle a, b; f; -\rangle$ *har vi:*

- *Termen* $f(x, a)$ *har en fri variabel* x*.*
- *Termen* $f(a, b)$ *har ingen frie variable og er en lukket term.*

Rekursive definisjoner

Når mengder er definert *induktivt*, så kan vi definere funksjoner over denne mengden *rekursivt* ved å

1. gi verdi til de "atomære" elementene (i basismengden), og
2. gi verdi til "sammensatte" elementene (fra induksjonssteget) ved å bruke verdiene som ble gitt til komponentene.

Den presise, rekursive definisjonen av FV er følgende.

Definisjon 1.3 (Frie variable - definert rekursivt)**.** *Gitt en term* t*, la mengden* $\mathsf{FV}(t)$ *av* frie variable *i* t *være definert rekursivt ved:*

- $\mathsf{FV}(x_i) = \{x_i\}$*, for en variabel* x_i*, og*

- $\mathrm{FV}(c_i) = \emptyset$, *for en konstant* c_i, *og*
- $\mathrm{FV}(f(t_1, \dots, t_n)) = \mathrm{FV}(t_1) \cup \cdots \cup \mathrm{FV}(t_n)$, *for et funksjonssymbol* f *med aritet* n.

Frie variable i formler

Definisjon 1.4 (Frie variable i en formel)**.** *En variabelforekomst i en førsteordens formel er* fri *hvis den ikke er bundet, dvs. hvis den ikke er innenfor skopet til en kvantor. Vi skriver* $\mathrm{FV}(\varphi)$ *for mengden av frie variable i* φ*.*

Eksempel $(\forall x Rxy \land Pz)$**.**

- x *er bundet*
- y *er fri*
- z *er fri*

Eksempel $(\forall x Pxy \to \forall z Pzx)$**.**

- x *er bundet*
- x *er fri*
- y *er fri*
- z *er bundet*

Oppgave. *Gi den presise, rekursive, definisjonen av frie variable i en formel.*

1.3 Substitusjoner

Definisjon 1.5 (Substitusjon for termer)**.** *La* s *og* t *være termer og* x *en variabel. Da er* $s[t/x]$, *det vi får ved å erstatte alle forekomster av* x *i* s *med* t, *definert rekursivt ved:*

1. $y[t/x] = \begin{cases} t & \text{hvis } x = y \\ y & \text{ellers} \end{cases}$ *(når* s *er en variabel* y*).*
2. $c[t/x] = c$ *(når* s *er en konstant* c*).*
3. $f(t_1[t/x], \dots, t_n[t/x])$ *(når* s *er en funksjonsterm* $f(t_1, \dots, t_n)$*).*

Eksempel.

- $f(x, y, a)[y/x] = f(x[y/x], y[y/x], a[y/x]) = f(y, y, a)$
- $f(y, y, a)[b/y] = f(y[b/y], y[b/y], a[b/y]) = f(b, b, a)$

Definisjon 1.6 (Substitusjon for formler)**.** $\varphi[t/x]$ *er definert rekursivt ved:*

1. $R(t_1, \dots, t_n)[t/x] = R(t_1[t/x], \dots, t_n[t/x])$

2. $\neg\psi[t/x] = \neg(\psi[t/x])$

3. $(\varphi_1 \circ \varphi_2)[t/x] = (\varphi_1[t/x] \circ \varphi_2[t/x])$, *hvor* $\circ \in \{\land, \lor, \to\}$

4. $\mathsf{Q}y\psi[t/x] = \begin{cases} \mathsf{Q}y(\psi[t/x]) & \textit{hvis } x \neq y \\ \mathsf{Q}y\psi & \textit{ellers} \end{cases}$, *hvor* $\mathsf{Q} \in \{\forall, \exists\}$

Eksempel.

- $(Pxy \land \forall x Pxy)[a/x] = (Pay \land \forall x Pxy)$
- $(Pxy \land \forall x Pxy)[a/y] = (Pxa \land \forall x Pxa)$

- Vi ser at substitusjon ikke blir gjort for bundne variable.
- Vi har enda et tilfelle hvor vi ønsker å forhindre substitusjon.

Eksempel.

- $\exists x \mathsf{Liker}(x, y)[f(x)/y] = \exists x \mathsf{Liker}(x, f(x))$

- Her blir en variabel bundet *etter* substitusjon.
- Dette kan endre meningen til en formel på en måte som vi ikke ønsker.

Definisjon 1.7. *Vi sier at t er fri for x i φ hvis ingen variabel i t blir bundet som følge av å substitutere t for x i φ.*

Eksempel. *Termen $f(x)$ er ikke fri for y i formelen $\exists x \mathsf{Liker}(x, y)$.*

- En måte å unngå dette på er å omdøpe bundne variable først.
- F.eks. se på $\exists z \mathsf{Liker}(z, y)$ i stedet for $\exists x \mathsf{Liker}(x, y)$.
- Fra nå av antar vi at alle substitusjoner er "fri for", dvs. at ingen variable blir bundet som følge av en substitusjon.

1.4 Lukkede og åpne formler

Definisjon 1.8 (Lukket/åpen formel)**.** *En formel φ er lukket hvis $\mathsf{FV}(\varphi) = \emptyset$, dvs. φ inneholder ingen frie variable. En formel er åpen hvis den ikke inneholder noen kvantorer.*

Eksempel.

- *$\forall x Pxa$ er lukket*
- *$\forall x Pxy$ er* ikke *lukket*
- *Pxy er* ikke *lukket, men åpen*
- *Pab er åpen* og *lukket*

2 Førsteordens logikk - semantikk

2.1 Introduksjon

- Hvordan skal vi *tolke* førsteordens formler?
- Hva skal $\forall x\varphi$ og $\exists x\varphi$ bety?
- Hva kan vi bruke førsteordens formler til å uttrykke?

  (Hva er det førsteordens formler *ikke* kan uttrykke?)
- Hva gjør en formel *sann* / *gyldig* / *oppfyllbar*?
- Å gi en semantikk er å si noe om forholdet mellom språk og virkelighet.
  - Valuasjoner gir en semantikk for klassisk utsagnslogikk.
- I førsteordens logikk vil *modeller* gi oss en semantikk.

En modell består intuitivt av

1. en mengde, og
2. en tolkning av alle ikke-logiske symboler slik at
   - et konstantsymbol tolkes som et element i mengden,
   - et funksjonssymbol tolkes som en funksjon på mengden, og
   - et relasjonssymbol tolkes som en relasjon på mengden.

Vi skal først definere modeller helt presist, også skal vi definere hva det vil si at en formel er sann i en modell.

Husk

Hvis D en mengde, så består D^n av alle n-tupler av elementer fra D, for $n \geq 0$.

$$D^n = \{\langle d_1, \ldots, d_n \rangle \mid d_1, \ldots, d_n \in D\}$$

2.2 Modeller

La et førsteordens språk $\mathcal{L}$ være gitt.

Definisjon 2.1 (Modell)**.** *En* modell $\mathcal{M}$ *for* $\mathcal{L}$ *består av en ikke-tom mengde* D*, kalt* domenet *til* $\mathcal{M}$*, og en funksjon* $(\cdot)^{\mathcal{M}}$ *som tolker alle ikke-logiske symboler på følgende måte:*

- *Hvis* c *er et konstantsymbol, så er* $c^{\mathcal{M}} \in D$*.*
- 5 *Hvis* f *er et funksjonsymbol med aritet* n*,så er* $f^{\mathcal{M}}$ *en funksjon fra* $D^n = \underbrace{D \times \cdots \times D}_{n}$ *til* D*.*
- 6 *Hvis* R *er et relasjonssymbol med aritet* n*,så er* $R^{\mathcal{M}}$ *en relasjon på* $D^n = \underbrace{D \times \cdots \times D}_{n}$*.*

Vi skriver $|\mathcal{M}|$ *for domenet* D *til modellen* $\mathcal{M}$*.*

Noen kommentarer

1. Et funksjonssymbol f med aritet 0 kan betraktes som en konstant.
   - Da er $f^{\mathcal{M}}$ en funksjon fra D^0 til D.
   - 7 Siden D^0 består av kun ett element $\langle\rangle$ - det tomme tuppelet - så består $f^{\mathcal{M}}$ også av kun ett element $\langle\langle\rangle, e\rangle$, hvor $e \in D$.
   - Vi kan derfor identifisere $f^{\mathcal{M}}$ med e.
2. Et relasjonssymbol R med aritet 0 kan betraktes som en utsagnsvariabel.
   - Da er $R^{\mathcal{M}}$ en delmengde av D^0.
   - 8 Siden D^0 består av kun ett element $\langle\rangle$ - det tomme tuppelet -så fins det nøyaktig to muligheter for $R^{\mathcal{M}}$.
   - Enten så er $R^{\mathcal{M}}$ tom eller så er $\langle\rangle \in R^{\mathcal{M}}$.
   - Vi kan derfor tenke på D^0 som **Bool**.
3. Et tuppel $\langle e\rangle$, hvor $e \in D$, kan vi identifisere med elementet e.
   - 9 Når et relasjonssymbol R har aritet 1,så skriver vi derfor $\{e_1, \ldots, e_n\}$ i stedet for $\{\langle e_1\rangle, \ldots, \langle e_n\rangle\}$.
   - Vi antar derfor også at $R^{\mathcal{M}} \subseteq D$.

2.3 Hovedeksempel - et figurspråk

Relasjonssymbol	aritet
Sirkel	1
Firkant	1
Trekant	1
Stor	1
Liten	1
Mindre	2

- Konstantsymboler: a, b, c, d, e, f.
- Funksjonssymboler: ingen.
- Vi leser på denne måten:

  Sirkel(x): "x er en sirkel"

  Firkant(x): "x er en firkant"

  Trekant(x): "x er en trekant"

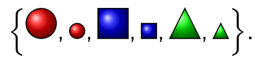
  Stor(x): "x er stor"

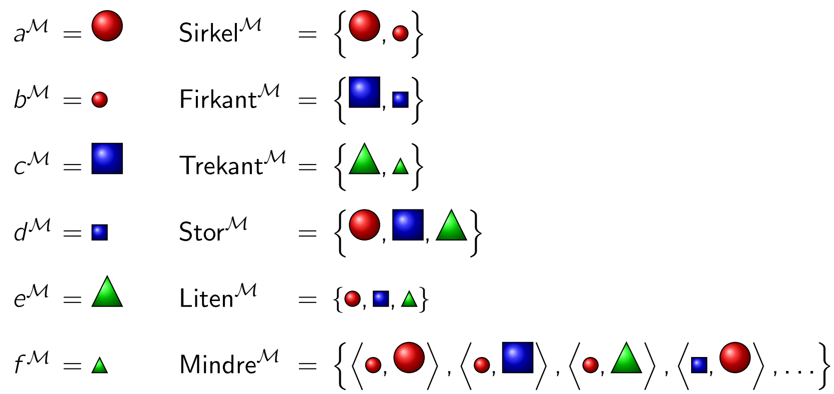
  Liten(x): "x er liten"

  Mindre(x, y): "x er mindre enn y"

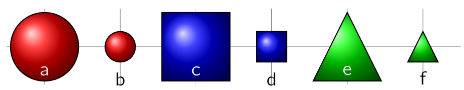
La oss nå lage en modell for dette språket!

En tolkning av figurspråket

La $\mathcal{M}$ være en modell med domene $D =$ 



Vi foregriper begivenhetene og ser på hvilke atomære formler som er sanne og usanne i modellen $\mathcal{M}$.



Sant	**Usant**
• Sirkel(a)	• Trekant(a)
• Firkant(c)	• Stor(b)
• Liten(b)	• Mindre(a, b)
• Mindre(b, e)	• Mindre(a, a)

2.4 Tolkning av termer og formler

- Vi så i eksempelet over at vi hadde et konstantsymbol for hvert element i domenet, men det er ikke alltid slik.
- Når vi skal tolke formler er det nyttig å ha en konstant for hvert element.

Definisjon 2.2 (Utvidet språk $\mathcal{L}(\mathcal{M})$)**.** *La $\mathcal{L}$ være et førsteordens språk og $\mathcal{M}$ en modell for $\mathcal{L}$. Da er $\mathcal{L}(\mathcal{M})$ det førsteordens språket man får fra $\mathcal{L}$ ved å legge til nye konstantsymboler for hvert element i $|\mathcal{M}|$. Hvis a er i $|\mathcal{M}|$, så skriver vi $\bar{a}$ for den nye konstanten. Hvis $\mathcal{N}$ er en modell for $\mathcal{L}(\mathcal{M})$, så krever vi at $\bar{a}^{\mathcal{N}} = a$.*

- Når vi tolker termer og formler fra språket $\mathcal{L}$ i en modell $\mathcal{M}$, så bruker vi det utvidete språket $\mathcal{L}(\mathcal{M})$ og antar at $\mathcal{M}$ er en $\mathcal{L}(\mathcal{M})$-modell.

Definisjon 2.3 (Tolkning av lukkede termer)**.** *La $\mathcal{L}$ være et førsteordens språk og $\mathcal{M}$ en modell for $\mathcal{L}$. Anta at $\mathcal{M}$ er en $\mathcal{L}(\mathcal{M})$-modell. Da tolker vi en lukket term $f(t_1, \ldots, t_n)$ på følgende måte:*

$$f(t_1, \ldots, t_n)^{\mathcal{M}} = f^{\mathcal{M}}(t_1^{\mathcal{M}}, \ldots, t_n^{\mathcal{M}}).$$

Oppgave. *Dette er en rekursiv definisjon. Skriv ut hele definisjonen.*

Definisjon 2.4 (Tolkning av lukkede formler)**.** *La $\mathcal{L}$ være et førsteordens språk og $\mathcal{M}$ en modell for $\mathcal{L}$. Anta a $\mathcal{M}$ er en $\mathcal{L}(\mathcal{M})$-modell. Vi definerer ved rekursjon hva det vil si at en lukket formel φ er* sann *i $\mathcal{M}$; vi skriver $\mathcal{M} \models \varphi$ når φ er sann i $\mathcal{M}$ / $\mathcal{M}$ gjør φ sann.*

- *For atomære formler: $\mathcal{M} \models R(t_1, \ldots, t_n)$ hvis $\langle t_1^{\mathcal{M}}, \ldots, t_n^{\mathcal{M}} \rangle \in R^{\mathcal{M}}$.*
- *$\mathcal{M} \models \neg\varphi$ hvis det ikke er tilfelle at $\mathcal{M} \models \varphi$.*
- *$\mathcal{M} \models \varphi \wedge \psi$ hvis $\mathcal{M} \models \varphi$ og $\mathcal{M} \models \psi$.*
- *$\mathcal{M} \models \varphi \vee \psi$ hvis $\mathcal{M} \models \varphi$ eller $\mathcal{M} \models \psi$.*
- *$\mathcal{M} \models \varphi \to \psi$ hvis $\mathcal{M} \models \varphi$ impliserer $\mathcal{M} \models \psi$.*
- *$\mathcal{M} \models \forall x\varphi$ hvis $\mathcal{M} \models \varphi[\bar{a}/x]$ for alle a i $|\mathcal{M}|$.*
- *$\mathcal{M} \models \exists x\varphi$ hvis $\mathcal{M} \models \varphi[\bar{a}/x]$ for minst en a i $|\mathcal{M}|$.*

Definisjon 2.5 (Oppfyllbarhet)**.** *En lukket formel φ er* oppfyllbar *hvis det fins en modell $\mathcal{M}$ som gjør φ sann. Vi sier også at $\mathcal{M}$ oppfyller φ og at $\mathcal{M}$ en en modell for φ.*

Oppfyllbar

- $\exists x \mathrm{Liten}(x)$
- $\exists x(\mathrm{Liten}(x) \wedge \mathrm{Stor}(x))$
- $\exists x Px \to \forall x Px$

Ikke oppfyllbar

- $Pa \wedge \neg Pa$
- $\exists x(\mathrm{Liten}(x) \wedge \neg\mathrm{Liten}(x))$
- $\neg\mathrm{Stor}(a) \wedge \forall x \mathrm{Stor}(x)$

Definisjon 2.6 (Gyldighet)**.** *En lukket formel φ er* gyldig *hvis den er sann i alle modeller $\mathcal{M}$, ellers så er den* falsifiserbar.

Gyldig

- $\forall x Pxa \to \forall z Pza$
- $(\forall x Px \wedge \forall y Qy) \to \forall x Px$
- $\exists x \mathrm{Liten}(x) \vee \exists x \neg\mathrm{Liten}(x)$

Ikke gyldig (falsfiserbar)

- $\forall x Px$
- $\exists x \mathrm{Stor}(x) \to \forall x \mathrm{Stor}(x)$
- $\exists x Px \to \exists x(Px \wedge Qx)$

2.5 Oppsummering

En modell $\mathcal{M}$ for et språk $\mathcal{L}$ består av

1. en ikke-tom mengde $|\mathcal{M}|$, kalt domenet til $\mathcal{M}$, og
2. en tolkning av alle ikke-logiske symboler i språket.

For eksempel, hvis $\mathcal{L}$ er språket $\langle$ 🚺 , 🚹 , ☕ ; 🏭 ; ♀ , ♂ $\rangle$, så må en modell $\mathcal{M}$ gi et domene og en tolkning til alle symbolene.

- 🚺$^{\mathcal{M}}$, 🚹$^{\mathcal{M}}$ og ☕$^{\mathcal{M}}$ må være elementer i domenet.
- 🏭$^{\mathcal{M}}$ må være en funksjon på domenet
- ♀$^{\mathcal{M}}$ og ♂$^{\mathcal{M}}$ må være relasjoner på domenet.
- Husk på ariteten til symbolene. (🏭 har aritet 2; ♀ og ♂ har aritet 1.)

Hvis $\mathcal{M}$ er en modell og φ er en lukket formel, så definerte vi $\mathcal{M} \models \varphi$.Vi brukte det utvidete språket - med konstanter for hvert element i domenet - for å gjøre dette.

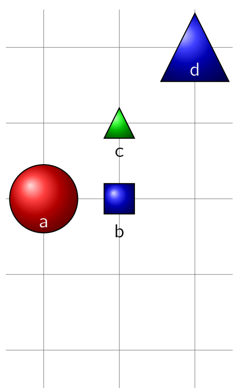
- For atomære formler: $\mathcal{M} \models R(t_1, \ldots, t_n)$ hvis $\langle t_1^{\mathcal{M}}, \ldots, t_n^{\mathcal{M}} \rangle \in R^{\mathcal{M}}$.
- $\mathcal{M} \models \neg\varphi$ hvis det *ikke* er tilfelle at $\mathcal{M} \models \varphi$.
- $\mathcal{M} \models \varphi \land \psi$ hvis $\mathcal{M} \models \varphi$ *og* $\mathcal{M} \models \psi$.
- $\mathcal{M} \models \varphi \lor \psi$ hvis $\mathcal{M} \models \varphi$ *eller* $\mathcal{M} \models \psi$.
- $\mathcal{M} \models \varphi \to \psi$ hvis $\mathcal{M} \models \varphi$ *impliserer* $\mathcal{M} \models \psi$.
- $\mathcal{M} \models \forall x\varphi$ hvis $\mathcal{M} \models \varphi[\bar{a}/x]$ *for alle a* i $|\mathcal{M}|$.
- $\mathcal{M} \models \exists x\varphi$ hvis $\mathcal{M} \models \varphi[\bar{a}/x]$ *for minst en a* i $|\mathcal{M}|$.

2.6 Språk og modeller - et komplekst forhold

- Ved førsteordens språk har vi fått betydelig større uttrykkskraft.
- Modeller kan være rike på struktur.
- Det er et ikke-trivielt forhold mellom språk og modeller.
- Noe av det vi er interessert i:
  - Sjekke om en formel er sann i en modell. (Modellsjekking)
  - Sjekke om en formel er oppfyllbar eller falsifiserbar.
  - Sjekke om en formel er gyldig.
  - Sjekke om formler er uavhengige av hverandre.
  - Bruke språket til å beskrive modeller, forsøke å "fange inn" og beskrive virkeligheten.

2.7 En utvidelse av figurspråket

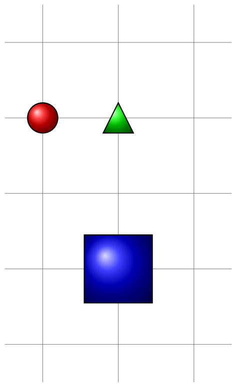
Atomær formel	Intendert tolkning
Sirkel(x)	x er en sirkel
Firkant(x)	x er en firkant
Trekant(x)	x er en trekant
Stor(x)	x er stor
Liten(x)	x er liten
Mindre(x, y)	x er mindre enn y
Over(x, y)	x er nærmere toppen enn y
Under(x, y)	x er nærmere bunnen enn y
VenstreFor(x, y)	x er lenger til venstre enn y
HoyreFor(x, y)	x er lenger til høyre enn y
Inntil(x, y)	x er rett ved siden av, rett over eller rett under y
Mellom(x, y, z)	x, y og z er i samme kolonne, rad eller diagonal, og x er mellom y og z



Forklarende eksempler til semantikken:

- $a^{\mathcal{M}} =$, $b^{\mathcal{M}} =$, $c^{\mathcal{M}} =$, $d^{\mathcal{M}} =$ (vi antar at dette er alle konstantene)
- $\text{Trekant}^{\mathcal{M}} = \{ , \}$
- $\text{Stor}^{\mathcal{M}} = \{ , \}$
- $\text{Liten}^{\mathcal{M}} = \{ , \}$
- $\mathcal{M} \models \text{Under}(a, c)$ fordi $\langle a^{\mathcal{M}}, c^{\mathcal{M}} \rangle = \langle , \rangle \in \text{Under}^{\mathcal{M}}$
- $\mathcal{M} \models \neg\text{Under}(a, b)$
- $\mathcal{M} \models \text{VenstreFor}(a, c) \land \neg\text{VenstreFor}(b, c)$
- $\mathcal{M} \models \text{Inntil}(a, b) \land \neg\text{Inntil}(a, c)$
- $\mathcal{M} \models \text{Mellom}(c, a, d) \land \neg\text{Mellom}(c, b, d)$

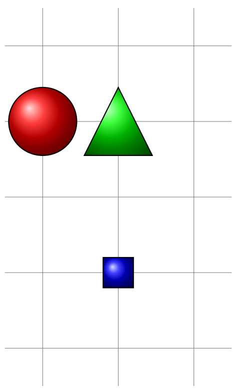
2.8 Oppfyllbarhet av førsteordens formler



- Er det slik at $\mathcal{M} \models \exists x \mathsf{Liten}(x)$?
- For å svare, må vi se på definisjonen av $\models$.

$$\begin{gathered}
\mathcal{M} \models \exists x \mathsf{Liten}(x) \\
\Updownarrow \\
\text{det fins en } a \in |\mathcal{M}| \text{ slik at } \mathcal{M} \models \mathsf{Liten}(\bar{a}) \\
\Updownarrow \\
\text{det fins en } a \in |\mathcal{M}| \text{ slik at } \bar{a}^{\mathcal{M}} \in \mathsf{Liten}^{\mathcal{M}} \\
\Updownarrow \\
\text{det fins en } a \in |\mathcal{M}| \text{ slik at } a \in \mathsf{Liten}^{\mathcal{M}}
\end{gathered}$$

- Siden $\mathsf{Liten}^{\mathcal{M}} = \{ , \}$, kan vi konkludere med **JA**.



- Er det slik at $\mathcal{M} \models \forall x \mathsf{Stor}(x)$?
- For å svare, må vi se på definisjonen av $\models$.

$$\begin{gathered}
\mathcal{M} \models \forall x \mathsf{Stor}(x) \\
\Updownarrow \\
\text{for alle } a \in |\mathcal{M}| \text{ så } \mathcal{M} \models \mathsf{Stor}(\bar{a}) \\
\Updownarrow \\
\text{for alle } a \in |\mathcal{M}| \text{ så } \bar{a}^{\mathcal{M}} \in \mathsf{Stor}^{\mathcal{M}} \\
\Updownarrow \\
\text{for alle } a \in |\mathcal{M}| \text{ så } a \in \mathsf{Stor}^{\mathcal{M}}
\end{gathered}$$

- Siden $|\mathcal{M}| = \{ , , \}$ og $\mathsf{Stor}^{\mathcal{M}} = \{ , \}$, så kan vi konkludere med **NEI**.