INF3170 – Logikk

Forelesning 7: Førsteordens logikk – sekventkalkyle og sunnhet

Christian Mahesh Hansen

Institutt for informatikk, Universitetet i Oslo

5. mars 2007

Dagens plan

1. Førsteordens sekventkalkyle
2. Sunnhet av førsteordens sekventkalkyle

Introduksjon

Introduksjon

- Vi har til nå sett sekventkalkyle for utsagnslogikk.

Introduksjon

- Vi har til nå sett sekventkalkyle for utsagnslogikk.
- Vi har bevist sunnhet og kompletthet av denne kalkylen.

Introduksjon

- Vi har til nå sett sekventkalkyle for utsagnslogikk.
- Vi har bevist sunnhet og kompletthet av denne kalkylen.
- Nå skal vi gjøre det samme for førsteordens logikk!

Introduksjon

- Vi har til nå sett sekventkalkyle for utsagnslogikk.
- Vi har bevist sunnhet og kompletthet av denne kalkylen.
- Nå skal vi gjøre det samme for førsteordens logikk!
- Gitt en førsteordens formel φ, er φ gyldig?

Introduksjon

- Vi har til nå sett sekventkalkyle for utsagnslogikk.
- Vi har bevist sunnhet og kompletthet av denne kalkylen.
- Nå skal vi gjøre det samme for førsteordens logikk!
- Gitt en førsteordens formel φ, er φ gyldig?
- Husk: vi introduserte LK som et systematisk forsøk på å falsifisere.

Introduksjon

- Vi har til nå sett sekventkalkyle for utsagnslogikk.
- Vi har bevist sunnhet og kompletthet av denne kalkylen.
- Nå skal vi gjøre det samme for førsteordens logikk!
- Gitt en førsteordens formel φ, er φ gyldig?
- Husk: vi introduserte LK som et systematisk forsøk på å falsifisere.
- La oss se på et eksempel.

$$\forall x(Px \rightarrow Qx) \vdash \forall x(\neg Qx \rightarrow \neg Px)$$

Eksempel

$$\forall x(Px \rightarrow Qx) \vdash \forall x(\neg Qx \rightarrow \neg Px)$$

Eksempel

- Falsifisere formelen $\forall x(\neg Qx \rightarrow \neg Px)$:

$$\forall x(Px \to Qx) \vdash \forall x(\neg Qx \to \neg Px)$$

Eksempel

- Falsifisere formelen $\forall x(\neg Qx \to \neg Px)$:
  - Introdusere et *vitne* som gjør formelen usann.

$$\frac{\forall x(Px \rightarrow Qx) \vdash \neg Qa \rightarrow \neg Pa}{\forall x(Px \rightarrow Qx) \vdash \forall x(\neg Qx \rightarrow \neg Px)}$$

Eksempel

- Falsifisere formelen $\forall x(\neg Qx \rightarrow \neg Px)$:
  - Introdusere et *vitne* som gjør formelen usann.
  - Sette inn et *nytt* konstantsymbol a for x.

$$\frac{\forall x(Px \rightarrow Qx) \ \vdash \ \neg Qa \rightarrow \neg Pa}{\forall x(Px \rightarrow Qx) \ \vdash \forall x(\neg Qx \rightarrow \neg Px)}$$

Eksempel

- Falsifisere formelen $\forall x(\neg Qx \rightarrow \neg Px)$:
  - Introdusere et *vitne* som gjør formelen usann.
  - Sette inn et *nytt* konstantsymbol a for x.
- Oppfylle formelen $\forall x(Px \rightarrow Qx)$:

$$\frac{\forall x(Px \rightarrow Qx) \vdash \quad \neg Qa \rightarrow \neg Pa}{\forall x(Px \rightarrow Qx) \vdash \forall x(\neg Qx \rightarrow \neg Px)}$$

Eksempel

- Falsifisere formelen $\forall x(\neg Qx \rightarrow \neg Px)$:
  - Introdusere et *vitne* som gjør formelen usann.
  - Sette inn et *nytt* konstantsymbol a for x.
- Oppfylle formelen $\forall x(Px \rightarrow Qx)$:
  - Da må delformelen være sann uansett hva vi setter inn for x.

$$\dfrac{\dfrac{P{\color{red}a} \rightarrow Q{\color{red}a} \vdash \neg Qa \rightarrow \neg Pa}{\forall x(Px \rightarrow Qx) \vdash \neg Qa \rightarrow \neg Pa}}{\forall x(Px \rightarrow Qx) \vdash \forall x(\neg Qx \rightarrow \neg Px)}$$

Eksempel

- Falsifisere formelen $\forall x(\neg Qx \rightarrow \neg Px)$:
  - Introdusere et *vitne* som gjør formelen usann.
  - Sette inn et *nytt* konstantsymbol a for x.
- Oppfylle formelen $\forall x(Px \rightarrow Qx)$:
  - Da må delformelen være sann uansett hva vi setter inn for x.
  - Spesielt må delformelen være sann når vi setter inn a for x.

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\vdash Pa, \neg Qa \to \neg Pa \qquad Qa \vdash \neg Qa \to \neg Pa}{Pa \to Qa \vdash \neg Qa \to \neg Pa}}{\forall x(Px \to Qx) \vdash \neg Qa \to \neg Pa}}{\forall x(Px \to Qx) \vdash \forall x(\neg Qx \to \neg Px)}$$

Eksempel

- Falsifisere formelen $\forall x(\neg Qx \to \neg Px)$:
  - Introdusere et *vitne* som gjør formelen usann.
  - Sette inn et *nytt* konstantsymbol a for x.
- Oppfylle formelen $\forall x(Px \to Qx)$:
  - Da må delformelen være sann uansett hva vi setter inn for x.
  - Spesielt må delformelen være sann når vi setter inn a for x.
- Vi kan nå anvende α- og β-reglene

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg Qa \vdash \neg Pa, Pa}{\vdash Pa, \neg Qa \to \neg Pa} \qquad Qa \vdash \neg Qa \to \neg Pa}{Pa \to Qa \vdash \neg Qa \to \neg Pa}}{\forall x(Px \to Qx) \vdash \neg Qa \to \neg Pa}}{\forall x(Px \to Qx) \vdash \forall x(\neg Qx \to \neg Px)}
$$

Eksempel

- Falsifisere formelen $\forall x(\neg Qx \to \neg Px)$:
  - Introdusere et *vitne* som gjør formelen usann.
  - Sette inn et *nytt* konstantsymbol a for x.
- Oppfylle formelen $\forall x(Px \to Qx)$:
  - Da må delformelen være sann uansett hva vi setter inn for x.
  - Spesielt må delformelen være sann når vi setter inn a for x.
- Vi kan nå anvende α- og β-reglene

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg Qa, Pa \vdash Pa}{\neg Qa \vdash \neg Pa, Pa}}{\vdash Pa, \neg Qa \to \neg Pa} \qquad Qa \vdash \neg Qa \to \neg Pa}{Pa \to Qa \vdash \neg Qa \to \neg Pa}}{\dfrac{\forall x(Px \to Qx) \vdash \neg Qa \to \neg Pa}{\forall x(Px \to Qx) \vdash \forall x(\neg Qx \to \neg Px)}}
$$

Eksempel

- Falsifisere formelen $\forall x(\neg Qx \to \neg Px)$:
  - Introdusere et *vitne* som gjør formelen usann.
  - Sette inn et *nytt* konstantsymbol a for x.
- Oppfylle formelen $\forall x(Px \to Qx)$:
  - Da må delformelen være sann uansett hva vi setter inn for x.
  - Spesielt må delformelen være sann når vi setter inn a for x.
- Vi kan nå anvende α- og β-reglene

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\times\\ \neg Qa, {\color{red}Pa} \vdash {\color{red}Pa}\end{array}}{\neg Qa \vdash \neg Pa, Pa}}{\vdash Pa, \neg Qa \to \neg Pa} \qquad Qa \vdash \neg Qa \to \neg Pa}{Pa \to Qa \vdash \neg Qa \to \neg Pa}}{\forall x(Px \to Qx) \vdash \neg Qa \to \neg Pa}}{\forall x(Px \to Qx) \vdash \forall x(\neg Qx \to \neg Px)}$$

Eksempel

- Falsifisere formelen $\forall x(\neg Qx \to \neg Px)$:
  - Introdusere et *vitne* som gjør formelen usann.
  - Sette inn et *nytt* konstantsymbol a for x.
- Oppfylle formelen $\forall x(Px \to Qx)$:
  - Da må delformelen være sann uansett hva vi setter inn for x.
  - Spesielt må delformelen være sann når vi setter inn a for x.
- Vi kan nå anvende α- og β-reglene

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$\times$}
\noLine
\UnaryInfC{$\neg Qa, Pa \vdash Pa$}
\UnaryInfC{$\neg Qa \vdash \neg Pa, Pa$}
\UnaryInfC{$\vdash Pa, \neg Qa \to \neg Pa$}
\AxiomC{$Qa, \neg Qa \vdash \neg Pa$}
\UnaryInfC{$Qa \vdash \neg Qa \to \neg Pa$}
\BinaryInfC{$Pa \to Qa \vdash \neg Qa \to \neg Pa$}
\UnaryInfC{$\forall x(Px \to Qx) \vdash \neg Qa \to \neg Pa$}
\UnaryInfC{$\forall x(Px \to Qx) \vdash \forall x(\neg Qx \to \neg Px)$}
\end{prooftree}
$$

Eksempel

- Falsifisere formelen $\forall x(\neg Qx \to \neg Px)$:
  - Introdusere et *vitne* som gjør formelen usann.
  - Sette inn et *nytt* konstantsymbol a for x.
- Oppfylle formelen $\forall x(Px \to Qx)$:
  - Da må delformelen være sann uansett hva vi setter inn for x.
  - Spesielt må delformelen være sann når vi setter inn a for x.
- Vi kan nå anvende α- og β-reglene

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\times\\ \neg Qa, Pa \vdash Pa\end{array}}{\neg Qa \vdash \neg Pa, Pa}}{\vdash Pa, \neg Qa \to \neg Pa} \qquad \dfrac{\dfrac{Qa \vdash Qa, \neg Pa}{Qa, \neg Qa \vdash \neg Pa}}{Qa \vdash \neg Qa \to \neg Pa}}{Pa \to Qa \vdash \neg Qa \to \neg Pa}}{\forall x(Px \to Qx) \vdash \neg Qa \to \neg Pa}}{\forall x(Px \to Qx) \vdash \forall x(\neg Qx \to \neg Px)}$$

Eksempel

- Falsifisere formelen $\forall x(\neg Qx \to \neg Px)$:
  - Introdusere et *vitne* som gjør formelen usann.
  - Sette inn et *nytt* konstantsymbol a for x.
- Oppfylle formelen $\forall x(Px \to Qx)$:
  - Da må delformelen være sann uansett hva vi setter inn for x.
  - Spesielt må delformelen være sann når vi setter inn a for x.
- Vi kan nå anvende α- og β-reglene og lukke.

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\times}{\neg Qa, Pa \vdash Pa}}{\neg Qa \vdash \neg Pa, Pa}}{\vdash Pa, \neg Qa \to \neg Pa} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\times}{{\color{red}Qa} \vdash {\color{red}Qa}, \neg Pa}}{Qa, \neg Qa \vdash \neg Pa}}{Qa \vdash \neg Qa \to \neg Pa}}{\dfrac{Pa \to Qa \vdash \neg Qa \to \neg Pa}{\dfrac{\forall x(Px \to Qx) \vdash \neg Qa \to \neg Pa}{\forall x(Px \to Qx) \vdash \forall x(\neg Qx \to \neg Px)}}}
$$

Eksempel

- Falsifisere formelen $\forall x(\neg Qx \to \neg Px)$:
  - Introdusere et *vitne* som gjør formelen usann.
  - Sette inn et *nytt* konstantsymbol a for x.
- Oppfylle formelen $\forall x(Px \to Qx)$:
  - Da må delformelen være sann uansett hva vi setter inn for x.
  - Spesielt må delformelen være sann når vi setter inn a for x.
- Vi kan nå anvende α- og β-reglene og lukke.

La oss forsøke med en annen regel-rekkefølge:

$$\forall x(Px \to Qx) \;\vdash \forall x(\neg Qx \to \neg Px)$$

Eksempel

La oss forsøke med en annen regel-rekkefølge:

$$\forall x(Px \to Qx) \vdash \forall x(\neg Qx \to \neg Px)$$

Eksempel

- Oppfylle $\forall x(Px \to Qx)$:

La oss forsøke med en annen regel-rekkefølge:

$$\forall x(Px \rightarrow Qx) \vdash \forall x(\neg Qx \rightarrow \neg Px)$$

Eksempel

- Oppfylle $\forall x(Px \rightarrow Qx)$:
  - Hva skal vi sette inn for x?

La oss forsøke med en annen regel-rekkefølge:

$$\frac{Po \to Qo \ \vdash \forall x(\neg Qx \to \neg Px)}{\forall x(Px \to Qx) \ \vdash \forall x(\neg Qx \to \neg Px)}$$

Eksempel

- Oppfylle $\forall x(Px \to Qx)$:
  - Hva skal vi sette inn for x? Vi bruker en *dummykonstant* o.

La oss forsøke med en annen regel-rekkefølge:

$$\frac{Po \rightarrow Qo \;\vdash \forall x(\neg Qx \rightarrow \neg Px)}{\forall x(Px \rightarrow Qx) \;\vdash \forall x(\neg Qx \rightarrow \neg Px)}$$

Eksempel

- Oppfylle $\forall x(Px \rightarrow Qx)$:
  - Hva skal vi sette inn for x? Vi bruker en *dummykonstant* o.
- Falsifisere $\forall x(\neg Qx \rightarrow \neg Px)$:

La oss forsøke med en annen regel-rekkefølge:

$$\frac{Po \to Qo \ \vdash \forall x(\neg Qx \to \neg Px)}{\forall x(Px \to Qx) \ \vdash \forall x(\neg Qx \to \neg Px)}$$

Eksempel

- Oppfylle $\forall x(Px \to Qx)$:
  - Hva skal vi sette inn for x? Vi bruker en *dummykonstant* o.
- Falsifisere $\forall x(\neg Qx \to \neg Px)$:
  - Vitnet må være *ubrukt*. Kan derfor ikke sette inn o.

La oss forsøke med en annen regel-rekkefølge:

$$\cfrac{\cfrac{Po \to Qo \vdash \neg Q{\color{red}a} \to \neg P{\color{red}a}}{Po \to Qo \vdash \forall x(\neg Qx \to \neg Px)}}{\forall x(Px \to Qx) \vdash \forall x(\neg Qx \to \neg Px)}$$

Eksempel

- Oppfylle $\forall x(Px \to Qx)$:
  - Hva skal vi sette inn for x? Vi bruker en *dummykonstant* o.
- Falsifisere $\forall x(\neg Qx \to \neg Px)$:
  - Vitnet må være *ubrukt*. Kan derfor ikke sette inn o. Setter inn a.

La oss forsøke med en annen regel-rekkefølge:

$$\dfrac{\dfrac{Po \to Qo \ \vdash \ \neg Qa \to \neg Pa}{Po \to Qo \ \vdash \ \forall x(\neg Qx \to \neg Px)}}{\color{red}{\forall x(Px \to Qx)} \ \vdash \ \forall x(\neg Qx \to \neg Px)}$$

Eksempel

- Oppfylle $\forall x(Px \to Qx)$:
  - Hva skal vi sette inn for x? Vi bruker en *dummykonstant* o.
- Falsifisere $\forall x(\neg Qx \to \neg Px)$:
  - Vitnet må være *ubrukt*. Kan derfor ikke sette inn o. Setter inn a.
- Oppfylle $\color{red}{\forall x(Px \to Qx)}$. Da må vi kunne sette inn a for x!

La oss forsøke med en annen regel-rekkefølge:

$$\dfrac{\dfrac{\forall x(Px \rightarrow Qx), Po \rightarrow Qo \vdash \neg Qa \rightarrow \neg Pa}{\forall x(Px \rightarrow Qx), Po \rightarrow Qo \vdash \forall x(\neg Qx \rightarrow \neg Px)}}{\forall x(Px \rightarrow Qx) \vdash \forall x(\neg Qx \rightarrow \neg Px)}$$

Eksempel

- Oppfylle $\forall x(Px \rightarrow Qx)$:
  - Hva skal vi sette inn for x? Vi bruker en *dummykonstant* o.
- Falsifisere $\forall x(\neg Qx \rightarrow \neg Px)$:
  - Vitnet må være *ubrukt*. Kan derfor ikke sette inn o. Setter inn a.
- Oppfylle $\forall x(Px \rightarrow Qx)$. Da må vi kunne sette inn a for x!
  - Vi må ta kopi av $\forall$-formelen når vi setter inn for x.

La oss forsøke med en annen regel-rekkefølge:

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\forall x(Px \to Qx), Pa \to Qa, Po \to Qo \vdash \neg Qa \to \neg Pa}{\forall x(Px \to Qx), Po \to Qo \vdash \neg Qa \to \neg Pa}}{\forall x(Px \to Qx), Po \to Qo \vdash \forall x(\neg Qx \to \neg Px)}}{\forall x(Px \to Qx) \vdash \forall x(\neg Qx \to \neg Px)}
$$

Eksempel

- Oppfylle $\forall x(Px \to Qx)$:
  - Hva skal vi sette inn for x? Vi bruker en *dummykonstant* o.
- Falsifisere $\forall x(\neg Qx \to \neg Px)$:
  - Vitnet må være *ubrukt*. Kan derfor ikke sette inn o. Setter inn a.
- Oppfylle $\forall x(Px \to Qx)$. Da må vi kunne sette inn a for x!
  - Vi må ta kopi av $\forall$-formelen når vi setter inn for x.
  - Setter inn a for x.

La oss forsøke med en annen regel-rekkefølge:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\forall x(Px \to Qx), Pa \to Qa, Po \to Qo \vdash \neg Qa \to \neg Pa}{\forall x(Px \to Qx), Po \to Qo \vdash \neg Qa \to \neg Pa}}{\forall x(Px \to Qx), Po \to Qo \vdash \forall x(\neg Qx \to \neg Px)}}{\forall x(Px \to Qx) \vdash \forall x(\neg Qx \to \neg Px)}$$

Eksempel

- Oppfylle $\forall x(Px \to Qx)$:
  - Hva skal vi sette inn for x? Vi bruker en *dummykonstant* o.
- Falsifisere $\forall x(\neg Qx \to \neg Px)$:
  - Vitnet må være *ubrukt*. Kan derfor ikke sette inn o. Setter inn a.
- Oppfylle $\forall x(Px \to Qx)$. Da må vi kunne sette inn a for x!
  - Vi må ta kopi av $\forall$-formelen når vi setter inn for x.
  - Setter inn a for x.
- Vi kan nå anvende α- og β-reglene og lukke.

La oss forsøke med en annen regel-rekkefølge:

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\forall x(Px \to Qx), Po \to Qo \vdash Pa, \neg Qa \to \neg Pa \qquad \forall x(Px \to Qx), Qa, Po \to Qo \vdash \neg Qa \to \neg Pa}{\forall x(Px \to Qx), Pa \to Qa, Po \to Qo \vdash \neg Qa \to \neg Pa}}{\forall x(Px \to Qx), Po \to Qo \vdash \neg Qa \to \neg Pa}}{\cfrac{\forall x(Px \to Qx), Po \to Qo \vdash \forall x(\neg Qx \to \neg Px)}{\forall x(Px \to Qx) \vdash \forall x(\neg Qx \to \neg Px)}}$$

Eksempel

- Oppfylle $\forall x(Px \to Qx)$:
  - Hva skal vi sette inn for x? Vi bruker en *dummykonstant* o.
- Falsifisere $\forall x(\neg Qx \to \neg Px)$:
  - Vitnet må være *ubrukt*. Kan derfor ikke sette inn o. Setter inn a.
- Oppfylle $\forall x(Px \to Qx)$. Da må vi kunne sette inn a for x!
  - Vi må ta kopi av $\forall$-formelen når vi setter inn for x.
  - Setter inn a for x.
- Vi kan nå anvende α- og β-reglene og lukke.

La oss forsøke med en annen regel-rekkefølge:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\forall x(Px \to Qx), \neg Qa, Po \to Qo \vdash \neg Pa, Pa}{\forall x(Px \to Qx), Po \to Qo \vdash Pa, \neg Qa \to \neg Pa} \qquad \forall x(Px \to Qx), Qa, Po \to Qo \vdash \neg Qa \to \neg Pa}{\dfrac{\forall x(Px \to Qx), Pa \to Qa, Po \to Qo \vdash \neg Qa \to \neg Pa}{\forall x(Px \to Qx), Po \to Qo \vdash \neg Qa \to \neg Pa}}}{\dfrac{\forall x(Px \to Qx), Po \to Qo \vdash \forall x(\neg Qx \to \neg Px)}{\forall x(Px \to Qx) \vdash \forall x(\neg Qx \to \neg Px)}}$$

Eksempel

- Oppfylle $\forall x(Px \to Qx)$:
  - Hva skal vi sette inn for x? Vi bruker en *dummykonstant* o.
- Falsifisere $\forall x(\neg Qx \to \neg Px)$:
  - Vitnet må være *ubrukt*. Kan derfor ikke sette inn o. Setter inn a.
- Oppfylle $\forall x(Px \to Qx)$. Da må vi kunne sette inn a for x!
  - Vi må ta kopi av $\forall$-formelen når vi setter inn for x.
  - Setter inn a for x.
- Vi kan nå anvende α- og β-reglene og lukke.

La oss forsøke med en annen regel-rekkefølge:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\forall x(Px \to Qx), \neg Qa, Pa, Po \to Qo \vdash Pa}{\forall x(Px \to Qx), \neg Qa, Po \to Qo \vdash \neg Pa, Pa}}{\forall x(Px \to Qx), Po \to Qo \vdash Pa, \neg Qa \to \neg Pa} \quad \forall x(Px \to Qx), Qa, Po \to Qo \vdash \neg Qa \to \neg Pa}{\forall x(Px \to Qx), Pa \to Qa, Po \to Qo \vdash \neg Qa \to \neg Pa}}{\forall x(Px \to Qx), Po \to Qo \vdash \neg Qa \to \neg Pa}}{\dfrac{\forall x(Px \to Qx), Po \to Qo \vdash \forall x(\neg Qx \to \neg Px)}{\forall x(Px \to Qx) \vdash \forall x(\neg Qx \to \neg Px)}}$$

Eksempel

- Oppfylle $\forall x(Px \to Qx)$:
  - Hva skal vi sette inn for x? Vi bruker en *dummykonstant* o.
- Falsifisere $\forall x(\neg Qx \to \neg Px)$:
  - Vitnet må være *ubrukt*. Kan derfor ikke sette inn o. Setter inn a.
- Oppfylle $\forall x(Px \to Qx)$. Da må vi kunne sette inn a for x!
  - Vi må ta kopi av $\forall$-formelen når vi setter inn for x.
  - Setter inn a for x.
- Vi kan nå anvende α- og β-reglene og lukke.

La oss forsøke med en annen regel-rekkefølge:

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\times}{\forall x(Px \to Qx), \neg Qa, Pa, Po \to Qo \vdash Pa}}{\forall x(Px \to Qx), \neg Qa, Po \to Qo \vdash \neg Pa, Pa}}{\forall x(Px \to Qx), Po \to Qo \vdash Pa, \neg Qa \to \neg Pa} \qquad \forall x(Px \to Qx), Qa, Po \to Qo \vdash \neg Qa \to \neg Pa}{\forall x(Px \to Qx), Pa \to Qa, Po \to Qo \vdash \neg Qa \to \neg Pa}}{\forall x(Px \to Qx), Po \to Qo \vdash \neg Qa \to \neg Pa}}{\forall x(Px \to Qx), Po \to Qo \vdash \forall x(\neg Qx \to \neg Px)}}{\forall x(Px \to Qx) \vdash \forall x(\neg Qx \to \neg Px)}
$$

Eksempel

- Oppfylle $\forall x(Px \to Qx)$:
  - Hva skal vi sette inn for x? Vi bruker en *dummykonstant* o.
- Falsifisere $\forall x(\neg Qx \to \neg Px)$:
  - Vitnet må være *ubrukt*. Kan derfor ikke sette inn o. Setter inn a.
- Oppfylle $\forall x(Px \to Qx)$. Da må vi kunne sette inn a for x!
  - Vi må ta kopi av $\forall$-formelen når vi setter inn for x.
  - Setter inn a for x.
- Vi kan nå anvende α- og β-reglene og lukke.

La oss forsøke med en annen regel-rekkefølge:

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\times}{\forall x(Px \to Qx), \neg Qa, Pa, Po \to Qo \vdash Pa}}{\forall x(Px \to Qx), \neg Qa, Po \to Qo \vdash \neg Pa, Pa}}{\forall x(Px \to Qx), Po \to Qo \vdash Pa, \neg Qa \to \neg Pa} \quad \dfrac{\forall x(Px \to Qx), Qa, \neg Qa, Po \to Qo \vdash \neg Pa}{\forall x(Px \to Qx), Qa, Po \to Qo \vdash \neg Qa \to \neg Pa}}{\dfrac{\forall x(Px \to Qx), Pa \to Qa, Po \to Qo \vdash \neg Qa \to \neg Pa}{\forall x(Px \to Qx), Po \to Qo \vdash \neg Qa \to \neg Pa}}}{\dfrac{\forall x(Px \to Qx), Po \to Qo \vdash \forall x(\neg Qx \to \neg Px)}{\forall x(Px \to Qx) \vdash \forall x(\neg Qx \to \neg Px)}}
$$

Eksempel

- Oppfylle $\forall x(Px \to Qx)$:
  - Hva skal vi sette inn for x? Vi bruker en *dummykonstant* o.
- Falsifisere $\forall x(\neg Qx \to \neg Px)$:
  - Vitnet må være *ubrukt*. Kan derfor ikke sette inn o. Setter inn a.
- Oppfylle $\forall x(Px \to Qx)$. Da må vi kunne sette inn a for x!
  - Vi må ta kopi av $\forall$-formelen når vi setter inn for x.
  - Setter inn a for x.
- Vi kan nå anvende α- og β-reglene og lukke.

La oss forsøke med en annen regel-rekkefølge:

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{\times}{\forall x(Px \to Qx), \neg Qa, Pa, Po \to Qo \vdash Pa}}{\forall x(Px \to Qx), \neg Qa, Po \to Qo \vdash \neg Pa, Pa}}{\forall x(Px \to Qx), Po \to Qo \vdash Pa, \neg Qa \to \neg Pa} \quad \dfrac{\dfrac{\forall x(Px \to Qx), Qa, Po \to Qo \vdash Qa, \neg Pa}{\forall x(Px \to Qx), Qa, \neg Qa, Po \to Qo \vdash \neg Pa}}{\forall x(Px \to Qx), Qa, Po \to Qo \vdash \neg Qa \to \neg Pa}}{\forall x(Px \to Qx), Pa \to Qa, Po \to Qo \vdash \neg Qa \to \neg Pa}}{\forall x(Px \to Qx), Po \to Qo \vdash \neg Qa \to \neg Pa}}{\forall x(Px \to Qx), Po \to Qo \vdash \forall x(\neg Qx \to \neg Px)}}{\forall x(Px \to Qx) \vdash \forall x(\neg Qx \to \neg Px)}
$$

Eksempel

- Oppfylle $\forall x(Px \to Qx)$:
  - Hva skal vi sette inn for x? Vi bruker en *dummykonstant* o.
- Falsifisere $\forall x(\neg Qx \to \neg Px)$:
  - Vitnet må være *ubrukt*. Kan derfor ikke sette inn o. Setter inn a.
- Oppfylle $\forall x(Px \to Qx)$. Da må vi kunne sette inn a for x!
  - Vi må ta kopi av $\forall$-formelen når vi setter inn for x.
  - Setter inn a for x.
- Vi kan nå anvende α- og β-reglene og lukke.

La oss forsøke med en annen regel-rekkefølge:

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\times}{\forall x(Px \to Qx), \neg Qa, Pa, Po \to Qo \vdash Pa}}{\forall x(Px \to Qx), \neg Qa, Po \to Qo \vdash \neg Pa, Pa}}{\forall x(Px \to Qx), Po \to Qo \vdash Pa, \neg Qa \to \neg Pa} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\times}{\forall x(Px \to Qx), Qa, Po \to Qo \vdash Qa, \neg Pa}}{\forall x(Px \to Qx), Qa, \neg Qa, Po \to Qo \vdash \neg Pa}}{\forall x(Px \to Qx), Qa, Po \to Qo \vdash \neg Qa \to \neg Pa}}{\dfrac{\forall x(Px \to Qx), Pa \to Qa, Po \to Qo \vdash \neg Qa \to \neg Pa}{\dfrac{\forall x(Px \to Qx), Po \to Qo \vdash \neg Qa \to \neg Pa}{\dfrac{\forall x(Px \to Qx), Po \to Qo \vdash \forall x(\neg Qx \to \neg Px)}{\forall x(Px \to Qx) \vdash \forall x(\neg Qx \to \neg Px)}}}}
$$

Eksempel

- Oppfylle $\forall x(Px \to Qx)$:
  - Hva skal vi sette inn for x? Vi bruker en *dummykonstant* o.
- Falsifisere $\forall x(\neg Qx \to \neg Px)$:
  - Vitnet må være *ubrukt*. Kan derfor ikke sette inn o. Setter inn a.
- Oppfylle $\forall x(Px \to Qx)$. Da må vi kunne sette inn a for x!
  - Vi må ta kopi av $\forall$-formelen når vi setter inn for x.
  - Setter inn a for x.
- Vi kan nå anvende α- og β-reglene og lukke.

Motivasjon

- Vi skal nå definere sekventkalkylen LK for førsteordens logikk.

Motivasjon

- Vi skal nå definere sekventkalkylen LK for førsteordens logikk.
- Vi trenger slutningsregler for formler med kvantorene $\forall/\exists$.

Motivasjon

- Vi skal nå definere sekventkalkylen LK for førsteordens logikk.
- Vi trenger slutningsregler for formler med kvantorene $\forall / \exists$.
- Fra de foregående eksemplene har vi:

Motivasjon

- Vi skal nå definere sekventkalkylen LK for førsteordens logikk.
- Vi trenger slutningsregler for formler med kvantorene $\forall/\exists$.
- Fra de foregående eksemplene har vi:
  - Hvis vi skal oppfylle en formel $\forall x \varphi$ så må vi oppfylle $\varphi[t/x]$ for alle valg av term t.

Motivasjon

- Vi skal nå definere sekventkalkylen LK for førsteordens logikk.
- Vi trenger slutningsregler for formler med kvantorene $\forall/\exists$.
- Fra de foregående eksemplene har vi:
  - Hvis vi skal oppfylle en formel $\forall x\varphi$ så må vi oppfylle $\varphi[t/x]$ for alle valg av term t.
  - I tillegg trenger vi en ekstra kopi av $\forall x\varphi$.

Motivasjon

- Vi skal nå definere sekventkalkylen LK for førsteordens logikk.
- Vi trenger slutningsregler for formler med kvantorene $\forall/\exists$.
- Fra de foregående eksemplene har vi:
    - Hvis vi skal oppfylle en formel $\forall x \varphi$ så må vi oppfylle $\varphi[t/x]$ for alle valg av term t.
    - I tillegg trenger vi en ekstra kopi av $\forall x \varphi$.
    - Hvis vi skal falsifisere $\forall x \varphi$ må vi velge et vitne – et ubrukt konstantsymbol a – slik at $\varphi[a/x]$ er usann.

Motivasjon

- Vi skal nå definere sekventkalkylen LK for førsteordens logikk.
- Vi trenger slutningsregler for formler med kvantorene $\forall/\exists$.
- Fra de foregående eksemplene har vi:
  - Hvis vi skal oppfylle en formel $\forall x\varphi$ så må vi oppfylle $\varphi[t/x]$ for alle valg av term t.
  - I tillegg trenger vi en ekstra kopi av $\forall x\varphi$.
  - Hvis vi skal falsifisere $\forall x\varphi$ må vi velge et vitne – et ubrukt konstantsymbol a – slik at $\varphi[a/x]$ er usann.
  - Å oppfylle/falsifisere $\exists$-formler blir dualt.

Motivasjon

- Vi skal nå definere sekventkalkylen LK for førsteordens logikk.
- Vi trenger slutningsregler for formler med kvantorene $\forall/\exists$.
- Fra de foregående eksemplene har vi:
  - Hvis vi skal oppfylle en formel $\forall x\varphi$ så må vi oppfylle $\varphi[t/x]$ for alle valg av term t.
  - I tillegg trenger vi en ekstra kopi av $\forall x\varphi$.
  - Hvis vi skal falsifisere $\forall x\varphi$ må vi velge et vitne – et ubrukt konstantsymbol a – slik at $\varphi[a/x]$ er usann.
  - Å oppfylle/falsifisere $\exists$-formler blir dualt.
- Vi skal nå definere begreper som sekvent, aksiom, utledning og bevis for førsteordens språk.

Sekventer og aksiomer

Sekventer og aksiomer

Definisjon (Parameter)

La $\mathcal{L}$ være et førsteordens språk og la par *være en tellbart uendelig mengde av konstantsymboler, kalt* parametre*, forskjellige fra konstantsymbolene i $\mathcal{L}$. La $\mathcal{L}^{\mathsf{par}}$ være førsteordens språket man får ved å ta med disse som konstantsymboler.*

Sekventer og aksiomer

Definisjon (Parameter)

La $\mathcal{L}$ være et førsteordens språk og la par *være en tellbart uendelig mengde av konstantsymboler, kalt parametre, forskjellige fra konstantsymbolene i $\mathcal{L}$. La $\mathcal{L}^{\text{par}}$ være førsteordens språket man får ved å ta med disse som konstantsymboler.*

Definisjon (Sekvent)

En sekvent er et objekt på formen $\Gamma \vdash \Delta$ slik at Γ og Δ er multimengder av lukkede førsteordens formler i $\mathcal{L}^{\text{par}}$.

Sekventer og aksiomer

Definisjon (Parameter)

La $\mathcal{L}$ være et førsteordens språk og la par *være en tellbart uendelig mengde av konstantsymboler, kalt parametre, forskjellige fra konstantsymbolene i $\mathcal{L}$. La $\mathcal{L}^{\mathsf{par}}$ være førsteordens språket man får ved å ta med disse som konstantsymboler.*

Definisjon (Sekvent)

En sekvent er et objekt på formen $\Gamma \vdash \Delta$ slik at Γ og Δ er multimengder av lukkede førsteordens formler i $\mathcal{L}^{\mathsf{par}}$.

Definisjon (Aksiom)

Et aksiom er en sekvent på formen $\Gamma, A \vdash A, \Delta$ slik at A er en atomær formel.

Sekventer og aksiomer

Oppgave

Sekventer og aksiomer

Oppgave

Hvilke av uttrykkene nedenfor er sekventer?

Sekventer og aksiomer

Oppgave

Hvilke av uttrykkene nedenfor er sekventer?

- $Px \vdash Qx$

Sekventer og aksiomer

Oppgave

Hvilke av uttrykkene nedenfor er sekventer?

- $Px \vdash Qx$
- $\forall x Px \vdash \exists x Qx$

Sekventer og aksiomer

Oppgave

Hvilke av uttrykkene nedenfor er sekventer?

- $Px \vdash Qx$
- $\forall x Px \vdash \exists x Qx$
- $Pa, \forall x(Qx \rightarrow Rx) \vdash Qb \rightarrow Rb$

Sekventer og aksiomer

Oppgave

Hvilke av uttrykkene nedenfor er sekventer?

- $Px \vdash Qx$
- $\forall x Px \vdash \exists x Qx$
- $Pa, \forall x(Qx \rightarrow Rx) \vdash Qb \rightarrow Rb$
- $\forall x Px, Pa \vdash Pa, \exists x Pa$

Sekventer og aksiomer

Oppgave

Hvilke av uttrykkene nedenfor er sekventer?

- $Px \vdash Qx$
- $\forall xPx \vdash \exists xQx$
- $Pa, \forall x(Qx \rightarrow Rx) \vdash Qb \rightarrow Rb$
- $\forall xPx, Pa \vdash Pa, \exists xPa$

Hvilke av sekventene over er aksiomer?

Sekventkalkyleregler

Sekventkalkyleregler

Definisjon (γ-regler)

Sekventkalkyleregler

Definisjon (γ-regler)

γ-reglene i sekventkalkylen LK *er:*

Sekventkalkyleregler

Definisjon (γ-regler)

γ-reglene i sekventkalkylen LK *er:*

t er en lukket term

Sekventkalkyleregler

Definisjon (γ-regler)

γ-reglene i sekventkalkylen LK *er:*

$$\frac{\Gamma, \forall x\varphi, \varphi[t/x] \vdash \Delta}{\Gamma, \forall x\varphi \vdash \Delta}\,\mathsf{L}\forall$$

t er en lukket term

Sekventkalkyleregler

Definisjon (γ-regler)

γ-reglene i sekventkalkylen LK *er:*

$$\frac{\Gamma, \forall x\varphi, \varphi[t/x] \vdash \Delta}{\Gamma, \forall x\varphi \vdash \Delta}\ \mathrm{L}\forall \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, \exists x\varphi, \varphi[t/x]}{\Gamma \vdash \Delta, \exists x\varphi}\ \mathrm{R}\exists$$

t er en lukket term

Sekventkalkyleregler

Definisjon (γ-regler)

γ-reglene i sekventkalkylen LK *er:*

$$\frac{\Gamma, \forall x\varphi, \varphi[t/x] \vdash \Delta}{\Gamma, \forall x\varphi \vdash \Delta} \mathrm{L}\forall \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, \exists x\varphi, \varphi[t/x]}{\Gamma \vdash \Delta, \exists x\varphi} \mathrm{R}\exists$$

t er en lukket term

Merk: kopieringen av hovedformelen i γ-reglene medfører at bevissøk i førsteordens logikk ikke nødvendigvis behøver å terminere!

Sekventkalkyleregler

Sekventkalkyleregler

Definisjon (δ-regler)

Sekventkalkyleregler

Definisjon (δ-regler)

δ-reglene i sekventkalkylen LK *er:*

Sekventkalkyleregler

Definisjon (δ-regler)

δ-reglene i sekventkalkylen LK *er:*

a er en parameter som ikke forekommer i konklusjonen.

Sekventkalkyleregler

Definisjon (δ-regler)

δ-reglene i sekventkalkylen LK *er:*

$$\frac{\Gamma, \varphi[a/x] \vdash \Delta}{\Gamma, \exists x \varphi \vdash \Delta}\ \mathsf{L}\exists$$

a er en parameter som ikke forekommer i konklusjonen.

Sekventkalkyleregler

Definisjon (δ-regler)

δ-reglene i sekventkalkylen LK *er:*

$$\frac{\Gamma, \varphi[a/x] \vdash \Delta}{\Gamma, \exists x \varphi \vdash \Delta}\ \mathsf{L}\exists \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, \varphi[a/x]}{\Gamma \vdash \Delta, \forall x \varphi}\ \mathsf{R}\forall$$

a er en parameter som ikke forekommer i konklusjonen.

Sekventkalkyleregler

- γ-reglene erstatter den bundne variabelen med en lukket term.

Sekventkalkyleregler

- γ-reglene erstatter den bundne variabelen med en lukket term.
- δ-reglene erstatter den bundne variabelen med et konstantsymbol.

Sekventkalkyleregler

- γ-reglene erstatter den bundne variabelen med en lukket term.
- δ-reglene erstatter den bundne variabelen med et konstantsymbol.
- Det betyr at hvis hovedformelen er lukket, så er også de aktive formlene lukkede.

Sekventkalkyleregler

- γ-reglene erstatter den bundne variabelen med en lukket term.
- δ-reglene erstatter den bundne variabelen med et konstantsymbol.
- Det betyr at hvis hovedformelen er lukket, så er også de aktive formlene lukkede.
- γ- og δ-reglene er derfor veldefinerte i den forstand at alle sekventer forblir lukket.

Sekventkalkyleregler

- γ-reglene erstatter den bundne variabelen med en lukket term.
- δ-reglene erstatter den bundne variabelen med et konstantsymbol.
- Det betyr at hvis hovedformelen er lukket, så er også de aktive formlene lukkede.
- γ- og δ-reglene er derfor veldefinerte i den forstand at alle sekventer forblir lukket.

Definisjon (Slutningsreglene i førsteordens LK)

Slutningsreglene i førsteordens LK *er* α*- og* β*-reglene fra utsagnslogisk* LK *og* γ*- og* δ*-reglene.*

Slutninger

- Som i utsagnslogikk definerer reglene slutninger ved at vi erstatter symbolene i reglene med lukkede førsteordens formler:

Slutninger

- Som i utsagnslogikk definerer reglene slutninger ved at vi erstatter symbolene i reglene med lukkede førsteordens formler:

$$\frac{\Gamma, \forall x \varphi, \varphi[t/x] \vdash \Delta}{\Gamma, \forall x \varphi \vdash \Delta}\,\mathsf{L}\forall \quad \Bigg| \quad \frac{Pa, \forall x(Px \to Qx), Pa \to Qa \vdash Qa}{Pa, \forall x(Px \to Qx) \vdash Qa}\,\mathsf{L}\forall$$

Slutninger

- Som i utsagnslogikk definerer reglene slutninger ved at vi erstatter symbolene i reglene med lukkede førsteordens formler:

$$\frac{\Gamma, \forall x\varphi, \varphi[t/x] \vdash \Delta}{\Gamma, \forall x\varphi \vdash \Delta}\,\mathrm{L}\forall \quad\Bigg|\quad \frac{Pa, \forall x(Px \to Qx), Pa \to Qa \vdash Qa}{Pa, \forall x(Px \to Qx) \vdash Qa}\,\mathrm{L}\forall$$

- Begrepene innført i tilknytning til regler/slutninger i utsagnslogisk LK gjelder også i førsteordens LK:

Slutninger

- Som i utsagnslogikk definerer reglene slutninger ved at vi erstatter symbolene i reglene med lukkede førsteordens formler:

$$\frac{\Gamma, \forall x \varphi, \varphi[t/x] \vdash \Delta}{\Gamma, \forall x \varphi \vdash \Delta}\,\mathrm{L}\forall \quad \Bigg| \quad \frac{Pa, \forall x(Px \to Qx), Pa \to Qa \vdash Qa}{Pa, \forall x(Px \to Qx) \vdash Qa}\,\mathrm{L}\forall$$

- Begrepene innført i tilknytning til regler/slutninger i utsagnslogisk LK gjelder også i førsteordens LK:
- Sekventene *over* streken kalles premisser.

Slutninger

- Som i utsagnslogikk definerer reglene slutninger ved at vi erstatter symbolene i reglene med lukkede førsteordens formler:

$$\frac{\Gamma, \forall x\varphi, \varphi[t/x] \vdash \Delta}{\Gamma, \forall x\varphi \vdash \Delta}\,\mathsf{L}\forall \quad \Bigg| \quad \frac{Pa, \forall x(Px \to Qx), Pa \to Qa \vdash Qa}{Pa, \forall x(Px \to Qx) \vdash Qa}\,\mathsf{L}\forall$$

- Begrepene innført i tilknytning til regler/slutninger i utsagnslogisk LK gjelder også i førsteordens LK:
- Sekventene *over* streken kalles premisser.
- Sekventen *under* streken kalles konklusjon.

Slutninger

- Som i utsagnslogikk definerer reglene slutninger ved at vi erstatter symbolene i reglene med lukkede førsteordens formler:

$$\frac{\Gamma, \forall x \varphi, \varphi[t/x] \vdash \Delta}{\Gamma, \forall x \varphi \vdash \Delta} \text{L}\forall \quad \Bigg| \quad \frac{Pa, \forall x(Px \rightarrow Qx), Pa \rightarrow Qa \vdash Qa}{Pa, \forall x(Px \rightarrow Qx) \vdash Qa} \text{L}\forall$$

- Begrepene innført i tilknytning til regler/slutninger i utsagnslogisk LK gjelder også i førsteordens LK:
- Sekventene *over* streken kalles premisser.
- Sekventen *under* streken kalles konklusjon.
- Teksten til høyre for streken er regelens navn.

Slutninger

- Som i utsagnslogikk definerer reglene slutninger ved at vi erstatter symbolene i reglene med lukkede førsteordens formler:

$$\frac{\Gamma, \forall x\varphi, \varphi[t/x] \vdash \Delta}{\Gamma, \forall x\varphi \vdash \Delta}\,\mathrm{L}\forall \quad \Bigg| \quad \frac{Pa, \forall x(Px \to Qx), Pa \to Qa \vdash Qa}{Pa, \forall x(Px \to Qx) \vdash Qa}\,\mathrm{L}\forall$$

- Begrepene innført i tilknytning til regler/slutninger i utsagnslogisk LK gjelder også i førsteordens LK:
- Sekventene *over* streken kalles premisser.
- Sekventen *under* streken kalles konklusjon.
- Teksten til høyre for streken er regelens navn.
- Formelen som forekommer eksplisitt i konklusjonen kalles hovedformel.

Slutninger

- Som i utsagnslogikk definerer reglene slutninger ved at vi erstatter symbolene i reglene med lukkede førsteordens formler:

$$\frac{\Gamma, \forall x\varphi, \varphi[t/x] \vdash \Delta}{\Gamma, \forall x\varphi \vdash \Delta}\,\mathrm{L}\forall \quad \Bigg| \quad \frac{Pa, \forall x(Px \to Qx), Pa \to Qa \vdash Qa}{Pa, \forall x(Px \to Qx) \vdash Qa}\,\mathrm{L}\forall$$

- Begrepene innført i tilknytning til regler/slutninger i utsagnslogisk LK gjelder også i førsteordens LK:
- Sekventene *over* streken kalles premisser.
- Sekventen *under* streken kalles konklusjon.
- Teksten til høyre for streken er regelens navn.
- Formelen som forekommer eksplisitt i konklusjonen kalles hovedformel.
- Formlene som forekommer eksplisitt i premissene kalles aktive formler.

Slutninger

- Som i utsagnslogikk definerer reglene slutninger ved at vi erstatter symbolene i reglene med lukkede førsteordens formler:

$$\frac{\Gamma, \forall x\varphi, \varphi[t/x] \vdash \Delta}{\Gamma, \forall x\varphi \vdash \Delta}\,\mathrm{L}\forall \qquad \Bigg| \qquad \frac{Pa, \forall x(Px \rightarrow Qx), Pa \rightarrow Qa \vdash Qa}{Pa, \forall x(Px \rightarrow Qx) \vdash Qa}\,\mathrm{L}\forall$$

- Begrepene innført i tilknytning til regler/slutninger i utsagnslogisk LK gjelder også i førsteordens LK:
- Sekventene *over* streken kalles premisser.
- Sekventen *under* streken kalles konklusjon.
- Teksten til høyre for streken er regelens navn.
- Formelen som forekommer eksplisitt i konklusjonen kalles hovedformel.
- Formlene som forekommer eksplisitt i premissene kalles aktive formler.
- Formlene som forekommer i Γ og Δ kalles ekstraformler.

Utledninger

Utledninger

- Ett-premissregler: α-, γ- og δ-reglene.

Utledninger

- Ett-premissregler: α-, γ- og δ-reglene.
- To-premissregler: β-reglene.

Utledninger

- Ett-premissregler: α-, γ- og δ-reglene.
- To-premissregler: β-reglene.

Definisjon (LK-utledninger – basistilfelle)

Utledninger

- Ett-premissregler: α-, γ- og δ-reglene.
- To-premissregler: β-reglene.

Definisjon (LK-utledninger – basistilfelle)

En sekvent $\Gamma \vdash \Delta$, hvor Γ og Δ er multimengder av lukkede førsteordens formler i $\mathcal{L}$, er en LK-utledning.

$$\Gamma \vdash \Delta$$

Her er $\Gamma \vdash \Delta$ både rotsekvent og løvsekvent.

Utledninger

- Ett-premissregler: α-, γ- og δ-reglene.
- To-premissregler: β-reglene.

Definisjon (LK-utledninger – basistilfelle)

En sekvent $\Gamma \vdash \Delta$, hvor Γ og Δ er multimengder av lukkede førsteordens formler i $\mathcal{L}$, er en LK-utledning.

$$\Gamma \vdash \Delta$$

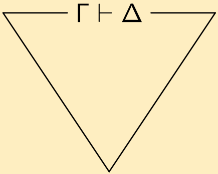
Her er $\Gamma \vdash \Delta$ både rotsekvent og løvsekvent.

- Merk: språket $\mathcal{L}^{\text{par}}$ brukes ikke i rotsekventen, men kun for å introdusere nye parametre i δ-reglene.

Utledninger

Definisjon (LK-utledninger – ett-premissutvidelse)

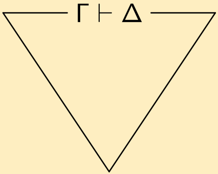
Hvis det finnes en LK*-utledning med en løvsekvent* $\Gamma \vdash \Delta$



Utledninger

Definisjon (LK-utledninger – ett-premissutvidelse)

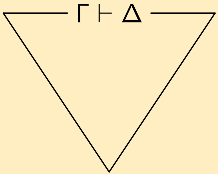
Hvis det finnes en LK*-utledning med en løvsekvent* $\Gamma \vdash \Delta$ *og en ett-premisslutning med konklusjon* $\Gamma \vdash \Delta$ *og premiss* $\Gamma' \vdash \Delta'$



Utledninger

Definisjon (LK-utledninger – ett-premissutvidelse)

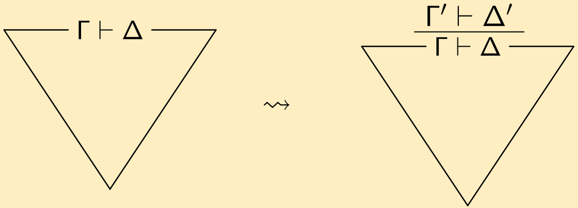
Hvis det finnes en LK-*utledning med en løvsekvent* $\Gamma \vdash \Delta$ *og en ett-premisslutning med konklusjon* $\Gamma \vdash \Delta$ *og premiss* $\Gamma' \vdash \Delta'$*, så er objektet vi får ved å plassere* $\Gamma' \vdash \Delta'$ *over* $\Gamma \vdash \Delta$ *en* LK-*utledning*.



Utledninger

Definisjon (LK-utledninger – ett-premissutvidelse)

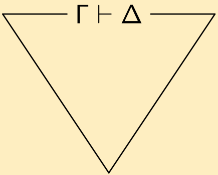
Hvis det finnes en LK*-utledning med en løvsekvent* $\Gamma \vdash \Delta$ *og en ett-premisslutning med konklusjon* $\Gamma \vdash \Delta$ *og premiss* $\Gamma' \vdash \Delta'$*, så er objektet vi får ved å plassere* $\Gamma' \vdash \Delta'$ *over* $\Gamma \vdash \Delta$ *en* LK*-utledning.*



Utledninger

Definisjon (LK-utledninger – to-premissutvidelse)

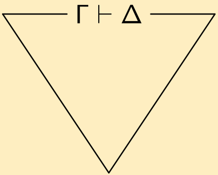
Hvis det finnes en LK*-utledning med en løvsekvent* $\Gamma \vdash \Delta$



Utledninger

Definisjon (LK-utledninger – to-premissutvidelse)

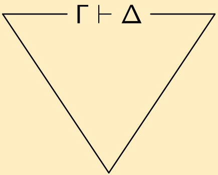
Hvis det finnes en LK-*utledning med en løvsekvent* $\Gamma \vdash \Delta$ *og en to-premisslutning med konklusjon* $\Gamma \vdash \Delta$ *og premisser* $\Gamma' \vdash \Delta'$ *og* $\Gamma'' \vdash \Delta''$



Utledninger

Definisjon (LK-utledninger – to-premissutvidelse)

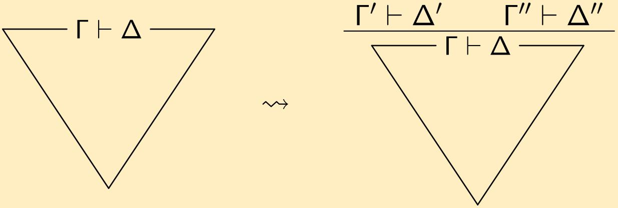
Hvis det finnes en LK*-utledning med en løvsekvent* $\Gamma \vdash \Delta$ *og en to-premisslutning med konklusjon* $\Gamma \vdash \Delta$ *og premisser* $\Gamma' \vdash \Delta'$ *og* $\Gamma'' \vdash \Delta''$*, så er objektet vi får ved å plassere* $\Gamma' \vdash \Delta'$ *og* $\Gamma'' \vdash \Delta''$ *over* $\Gamma \vdash \Delta$ *en* LK*-utledning*.



Utledninger

Definisjon (LK-utledninger – to-premissutvidelse)

Hvis det finnes en LK*-utledning med en løvsekvent* $\Gamma \vdash \Delta$ *og en to-premisslutning med konklusjon* $\Gamma \vdash \Delta$ *og premisser* $\Gamma' \vdash \Delta'$ *og* $\Gamma'' \vdash \Delta''$*, så er objektet vi får ved å plassere* $\Gamma' \vdash \Delta'$ *og* $\Gamma'' \vdash \Delta''$ *over* $\Gamma \vdash \Delta$ *en* LK-*utledning*.



Bevis

Bevis

Definisjon (LK-bevis)

Bevis

Definisjon (LK-bevis)

Et LK-*bevis er en* LK-*utledning der alle løvsekventene er aksiomer.*

Bevis

Definisjon (LK-bevis)

Et LK-*bevis er en* LK-*utledning der alle løvsekventene er aksiomer.*

Definisjon (LK-bevisbar)

Bevis

Definisjon (LK-bevis)

Et LK-*bevis er en* LK-*utledning der alle løvsekventene er aksiomer.*

Definisjon (LK-bevisbar)

En sekvent $\Gamma \vdash \Delta$ *er* LK-*bevisbar hvis det finnes et* LK-*bevis med* $\Gamma \vdash \Delta$ *som rotsekvent.*

Eksempel 1

$$\forall x Px \vdash \forall x Px$$

Eksempel 1

$$\forall x Px \vdash \forall x Px$$

Eksempel 1

$$\frac{\forall x P x \vdash P a}{\forall x P x \vdash \forall x P x}$$

Eksempel 1

$$\frac{\forall x P x \vdash Pa}{\forall x P x \vdash \forall x P x}$$

Eksempel 1

$$\cfrac{\cfrac{\forall x Px, Pa \vdash Pa}{\forall x Px \vdash Pa}}{\forall x Px \vdash \forall x Px}$$

Eksempel 1

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\times}{\forall x Px, Pa \vdash Pa}}{\forall x Px \vdash Pa}}{\forall x Px \vdash \forall x Px}
$$

Eksempel 1

$$\cfrac{\cfrac{\times}{\forall x Px, Pa \vdash Pa}}{\cfrac{\forall x Px \vdash Pa}{\forall x Px \vdash \forall x Px}}$$

- Dette viser at sekventen $\forall x Px \vdash \forall x Px$ er bevisbar.

Eksempel 1

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\times}{\forall x Px, Pa \vdash Pa}}{\forall x Px \vdash Pa}}{\forall x Px \vdash \forall x Px}$$

- Dette viser at sekventen $\forall x Px \vdash \forall x Px$ er bevisbar.
- Sekventen er også gyldig, noe som er lett å se:

Eksempel 1

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\times}{\forall x Px, Pa \vdash Pa}}{\forall x Px \vdash Pa}}{\forall x Px \vdash \forall x Px}$$

- Dette viser at sekventen $\forall x Px \vdash \forall x Px$ er bevisbar.
- Sekventen er også gyldig, noe som er lett å se:
  - Envher modell som oppfyller antecedenten, må oppfylle succedenten.

Eksempel 1

$$\dfrac{\dfrac{\overset{\times}{\forall x Px, Pa \vdash Pa}}{\forall x Px \vdash Pa}}{\forall x Px \vdash \forall x Px}$$

- Dette viser at sekventen $\forall x Px \vdash \forall x Px$ er bevisbar.
- Sekventen er også gyldig, noe som er lett å se:
  - Envher modell som oppfyller antecedenten, må oppfylle succedenten.
- At sekventen er gyldig følger også fra sunnhetsteoremet.

Eksempel 2

$$\forall x P x \vdash \exists x P x$$

Eksempel 2

$$\forall x Px \vdash \exists x Px$$

Eksempel 2

$$\frac{\forall x Px \vdash \exists x Px, P o}{\forall x Px \vdash \exists x Px}$$

Eksempel 2

$$\frac{\forall x Px \vdash \exists x Px, Po}{\forall x Px \vdash \exists x Px}$$

Eksempel 2

$$\dfrac{\dfrac{\forall x Px, Po \vdash \exists x Px, Po}{\forall x Px \vdash \exists x Px, Po}}{\forall x Px \vdash \exists x Px}$$

Eksempel 2

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\times}{\forall x Px, Po \vdash \exists x Px, Po}}{\forall x Px \vdash \exists x Px, Po}}{\forall x Px \vdash \exists x Px}$$

Eksempel 2

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\times}{\forall x Px, Po \vdash \exists x Px, Po}}{\forall x Px \vdash \exists x Px, Po}}{\forall x Px \vdash \exists x Px}$$

- Dette viser at sekventen $\forall x Px \vdash \exists x Px$ er bevisbar.

Eksempel 2

$$\dfrac{\dfrac{\times}{\forall x Px, Po \vdash \exists x Px, Po}}{\dfrac{\forall x Px \vdash \exists x Px, Po}{\forall x Px \vdash \exists x Px}}$$

- Dette viser at sekventen $\forall x Px \vdash \exists x Px$ er bevisbar.
- Sekventen er også gyldig:

Eksempel 2

$$\dfrac{\dfrac{\times}{\forall x Px, Po \vdash \exists x Px, Po}}{\dfrac{\forall x Px \vdash \exists x Px, Po}{\forall x Px \vdash \exists x Px}}$$

- Dette viser at sekventen $\forall x Px \vdash \exists x Px$ er bevisbar.
- Sekventen er også gyldig:
  - Anta at modellen $\mathcal{M}$ gjør $\forall x Px$ sann.

Eksempel 2

$$\dfrac{\dfrac{\times}{\forall x Px, Po \vdash \exists x Px, Po}}{\dfrac{\forall x Px \vdash \exists x Px, Po}{\forall x Px \vdash \exists x Px}}$$

- Dette viser at sekventen $\forall x Px \vdash \exists x Px$ er bevisbar.
- Sekventen er også gyldig:
  - Anta at modellen $\mathcal{M}$ gjør $\forall x Px$ sann.
  - Domenet må bestå av minst ett element e.

Eksempel 2

$$\dfrac{\dfrac{\times}{\forall x Px, Po \vdash \exists x Px, Po}}{\dfrac{\forall x Px \vdash \exists x Px, Po}{\forall x Px \vdash \exists x Px}}$$

- Dette viser at sekventen $\forall x Px \vdash \exists x Px$ er bevisbar.
- Sekventen er også gyldig:
  - Anta at modellen $\mathcal{M}$ gjør $\forall x Px$ sann.
  - Domenet må bestå av minst ett element e.
  - Siden $\mathcal{M}$ gjør $\forall x Px$ sann, må $\mathcal{M}$ gjøre formelen $P\bar{e}$ sann.

Eksempel 2

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\times}{\forall x Px, Po \vdash \exists x Px, Po}}{\forall x Px \vdash \exists x Px, Po}}{\forall x Px \vdash \exists x Px}$$

- Dette viser at sekventen $\forall x Px \vdash \exists x Px$ er bevisbar.
- Sekventen er også gyldig:
  - Anta at modellen $\mathcal{M}$ gjør $\forall x Px$ sann.
  - Domenet må bestå av minst ett element e.
  - Siden $\mathcal{M}$ gjør $\forall x Px$ sann, må $\mathcal{M}$ gjøre formelen $P\bar{e}$ sann.
  - Siden $\mathcal{M}$ gjør $P\bar{e}$ sann, må $\mathcal{M}$ gjøre formelen $\exists x Px$ sann.

Eksempel 2

$$\dfrac{\dfrac{\times}{\forall x Px, Po \vdash \exists x Px, Po}}{\dfrac{\forall x Px \vdash \exists x Px, Po}{\forall x Px \vdash \exists x Px}}$$

- Dette viser at sekventen $\forall x Px \vdash \exists x Px$ er bevisbar.
- Sekventen er også gyldig:
  - Anta at modellen $\mathcal{M}$ gjør $\forall x Px$ sann.
  - Domenet må bestå av minst ett element e.
  - Siden $\mathcal{M}$ gjør $\forall x Px$ sann, må $\mathcal{M}$ gjøre formelen $P\bar{e}$ sann.
  - Siden $\mathcal{M}$ gjør $P\bar{e}$ sann, må $\mathcal{M}$ gjøre formelen $\exists x Px$ sann.
- At sekventen er gyldig følger også fra sunnhetsteoremet.

Eksempel 3

$$\forall x(Px \land Qx) \vdash \forall xPx \land \forall xQx$$

Eksempel 3

$$\forall x(Px \land Qx) \;\vdash\; \forall x Px \land \forall x Qx$$

Eksempel 3

$$\frac{\forall x(Px \land Qx) \ \vdash \forall x Px \qquad\qquad \forall x(Px \land Qx) \ \vdash \forall x Qx}{\forall x(Px \land Qx) \ \vdash \forall x Px \land \forall x Qx}$$

Eksempel 3

$$\dfrac{\forall x(Px \land Qx) \vdash \forall xPx \qquad \forall x(Px \land Qx) \vdash \forall xQx}{\forall x(Px \land Qx) \vdash \forall xPx \land \forall xQx}$$

Eksempel 3

$$\dfrac{\dfrac{\forall x(Px \wedge Qx) \ \vdash Pa}{\forall x(Px \wedge Qx) \ \vdash \forall x Px} \qquad \forall x(Px \wedge Qx) \ \vdash \forall x Qx}{\forall x(Px \wedge Qx) \ \vdash \forall x Px \wedge \forall x Qx}$$

Eksempel 3

$$\dfrac{\dfrac{\color{red}{\forall x(Px \land Qx)} \vdash Pa}{\forall x(Px \land Qx) \vdash \forall x Px} \qquad \forall x(Px \land Qx) \vdash \forall x Qx}{\forall x(Px \land Qx) \vdash \forall x Px \land \forall x Qx}$$

Eksempel 3

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\forall x(Px \land Qx), Pa \land Qa \;\vdash\; Pa}{\forall x(Px \land Qx) \;\vdash\; Pa}}{\forall x(Px \land Qx) \;\vdash\; \forall x Px} \qquad \forall x(Px \land Qx) \;\vdash\; \forall x Qx}{\forall x(Px \land Qx) \;\vdash\; \forall x Px \land \forall x Qx}$$

Eksempel 3

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\forall x(Px \land Qx), Pa \land Qa \ \vdash \ Pa}{\forall x(Px \land Qx) \ \vdash \ Pa}}{\forall x(Px \land Qx) \ \vdash \ \forall x Px} \qquad \forall x(Px \land Qx) \ \vdash \ \forall x Qx}{\forall x(Px \land Qx) \ \vdash \ \forall x Px \land \forall x Qx}
$$

Eksempel 3

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\forall x(Px \land Qx), Pa, Qa \vdash Pa}{\forall x(Px \land Qx), Pa \land Qa \vdash Pa}}{\forall x(Px \land Qx) \vdash Pa}}{\forall x(Px \land Qx) \vdash \forall x Px} \qquad \forall x(Px \land Qx) \vdash \forall x Qx}{\forall x(Px \land Qx) \vdash \forall x Px \land \forall x Qx}
$$

Eksempel 3

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\times}{\forall x(Px \land Qx), Pa, Qa \vdash Pa}}{\forall x(Px \land Qx), Pa \land Qa \vdash Pa}}{\forall x(Px \land Qx) \vdash Pa}}{\forall x(Px \land Qx) \vdash \forall x Px} \quad \forall x(Px \land Qx) \vdash \forall x Qx$$

$$\overline{\forall x(Px \land Qx) \vdash \forall x Px \land \forall x Qx}$$

Eksempel 3

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\times}{\forall x(Px \land Qx), Pa, Qa \vdash Pa}}{\forall x(Px \land Qx), Pa \land Qa \vdash Pa}}{\forall x(Px \land Qx) \vdash Pa}}{\forall x(Px \land Qx) \vdash \forall x Px} \qquad \forall x(Px \land Qx) \vdash \forall x Qx}{\forall x(Px \land Qx) \vdash \forall x Px \land \forall x Qx}
$$

Eksempel 3

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\times}{\forall x(Px \land Qx), Pa, Qa \vdash Pa}}{\forall x(Px \land Qx), Pa \land Qa \vdash Pa}}{\forall x(Px \land Qx) \vdash Pa}}{\forall x(Px \land Qx) \vdash \forall x Px}
\quad
\dfrac{\forall x(Px \land Qx) \vdash Qa}{\forall x(Px \land Qx) \vdash \forall x Qx}
$$
$$
\overline{\forall x(Px \land Qx) \vdash \forall x Px \land \forall x Qx}
$$

Eksempel 3

$$
\dfrac{
  \dfrac{
    \dfrac{
      \dfrac{\times}{\forall x(Px \land Qx), Pa, Qa \;\vdash\; Pa}
    }{\forall x(Px \land Qx), Pa \land Qa \;\vdash\; Pa}
  }{\forall x(Px \land Qx) \;\vdash\; Pa}
  }{\forall x(Px \land Qx) \;\vdash\; \forall x Px}
  \qquad
  \dfrac{\forall x(Px \land Qx) \;\vdash\; Qa}{\forall x(Px \land Qx) \;\vdash\; \forall x Qx}
}{\forall x(Px \land Qx) \;\vdash\; \forall x Px \land \forall x Qx}
$$

Eksempel 3

$$
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{\times}{\forall x(Px \land Qx), Pa, Qa \;\vdash\; Pa}
}{\forall x(Px \land Qx), Pa \land Qa \;\vdash\; Pa}
}{\forall x(Px \land Qx) \;\vdash\; Pa}
}{\forall x(Px \land Qx) \;\vdash\; \forall x Px}
\qquad
\dfrac{
\dfrac{\forall x(Px \land Qx), Pa \land Qa \;\vdash\; Qa}{\forall x(Px \land Qx) \;\vdash\; Qa}
}{\forall x(Px \land Qx) \;\vdash\; \forall x Qx}
}{\forall x(Px \land Qx) \;\vdash\; \forall x Px \land \forall x Qx}
$$

Eksempel 3

$$
\dfrac{
  \dfrac{
    \dfrac{
      \dfrac{\times}{\forall x(Px \land Qx), Pa, Qa \vdash Pa}
    }{\forall x(Px \land Qx), Pa \land Qa \vdash Pa}
  }{\forall x(Px \land Qx) \vdash Pa}
  }{\forall x(Px \land Qx) \vdash \forall x Px}
  \quad
  \dfrac{
    \dfrac{\forall x(Px \land Qx), Pa \land Qa \vdash Qa}{\forall x(Px \land Qx) \vdash Qa}
  }{\forall x(Px \land Qx) \vdash \forall x Qx}
}{\forall x(Px \land Qx) \vdash \forall x Px \land \forall x Qx}
$$

Eksempel 3

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\times}{\forall x(Px \land Qx), Pa, Qa \vdash Pa}}{\forall x(Px \land Qx), Pa \land Qa \vdash Pa}}{\forall x(Px \land Qx) \vdash Pa}}{\forall x(Px \land Qx) \vdash \forall x Px} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\forall x(Px \land Qx), Pa, Qa \vdash Qa}{\forall x(Px \land Qx), Pa \land Qa \vdash Qa}}{\forall x(Px \land Qx) \vdash Qa}}{\forall x(Px \land Qx) \vdash \forall x Qx}$$
$$\overline{\forall x(Px \land Qx) \vdash \forall x Px \land \forall x Qx}$$

Eksempel 3

$$
\dfrac{
  \dfrac{
    \dfrac{
      \dfrac{\dfrac{\times}{\forall x(Px \land Qx), Pa, Qa \vdash Pa}}{\forall x(Px \land Qx), Pa \land Qa \vdash Pa}
    }{\forall x(Px \land Qx) \vdash Pa}
  }{\forall x(Px \land Qx) \vdash \forall x Px}
  \qquad
  \dfrac{
    \dfrac{
      \dfrac{\dfrac{\times}{\forall x(Px \land Qx), Pa, Qa \vdash Qa}}{\forall x(Px \land Qx), Pa \land Qa \vdash Qa}
    }{\forall x(Px \land Qx) \vdash Qa}
  }{\forall x(Px \land Qx) \vdash \forall x Qx}
}{\forall x(Px \land Qx) \vdash \forall x Px \land \forall x Qx}
$$

Eksempel 3

$$
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{\times}{\forall x(Px \land Qx), Pa, Qa \vdash Pa}
}{\forall x(Px \land Qx), Pa \land Qa \vdash Pa}
}{\forall x(Px \land Qx) \vdash Pa}
}{\forall x(Px \land Qx) \vdash \forall x Px}
\quad
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{\times}{\forall x(Px \land Qx), Pa, Qa \vdash Qa}
}{\forall x(Px \land Qx), Pa \land Qa \vdash Qa}
}{\forall x(Px \land Qx) \vdash Qa}
}{\forall x(Px \land Qx) \vdash \forall x Qx}
}{\forall x(Px \land Qx) \vdash \forall x Px \land \forall x Qx}
$$

- Dette viser at sekventen $\forall x(Px \land Qx) \vdash \forall x Px \land \forall x Qx$ er bevisbar.

Eksempel 3

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\times}{\forall x(Px \land Qx), Pa, Qa \vdash Pa}}{\forall x(Px \land Qx), Pa \land Qa \vdash Pa}}{\forall x(Px \land Qx) \vdash Pa}}{\forall x(Px \land Qx) \vdash \forall x Px}
\quad
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\times}{\forall x(Px \land Qx), Pa, Qa \vdash Qa}}{\forall x(Px \land Qx), Pa \land Qa \vdash Qa}}{\forall x(Px \land Qx) \vdash Qa}}{\forall x(Px \land Qx) \vdash \forall x Qx}
$$
$$
\overline{\forall x(Px \land Qx) \vdash \forall x Px \land \forall x Qx}
$$

- Dette viser at sekventen $\forall x(Px \land Qx) \vdash \forall x Px \land \forall x Qx$ er bevisbar.
- Sekventen er også gyldig:

Eksempel 3

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\times}{\forall x(Px \land Qx), Pa, Qa \;\vdash\; Pa}}{\forall x(Px \land Qx), Pa \land Qa \;\vdash\; Pa}}{\forall x(Px \land Qx) \;\vdash\; Pa}}{\forall x(Px \land Qx) \;\vdash\; \forall x Px}
\qquad
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\times}{\forall x(Px \land Qx), Pa, Qa \;\vdash\; Qa}}{\forall x(Px \land Qx), Pa \land Qa \;\vdash\; Qa}}{\forall x(Px \land Qx) \;\vdash\; Qa}}{\forall x(Px \land Qx) \;\vdash\; \forall x Qx}
$$

$$
\overline{\forall x(Px \land Qx) \;\vdash\; \forall x Px \land \forall x Qx}
$$

- Dette viser at sekventen $\forall x(Px \land Qx) \vdash \forall x Px \land \forall x Qx$ er bevisbar.
- Sekventen er også gyldig:
  - Anta at modellen $\mathcal{M}$ gjør $\forall x(Px \land Qx)$ sann.

Eksempel 3

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\times}{\forall x(Px \land Qx), Pa, Qa \vdash Pa}}{\forall x(Px \land Qx), Pa \land Qa \vdash Pa}}{\forall x(Px \land Qx) \vdash Pa}}{\forall x(Px \land Qx) \vdash \forall x Px} \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\times}{\forall x(Px \land Qx), Pa, Qa \vdash Qa}}{\forall x(Px \land Qx), Pa \land Qa \vdash Qa}}{\forall x(Px \land Qx) \vdash Qa}}{\forall x(Px \land Qx) \vdash \forall x Qx}}{\forall x(Px \land Qx) \vdash \forall x Px \land \forall x Qx}
$$

- Dette viser at sekventen $\forall x(Px \land Qx) \vdash \forall x Px \land \forall x Qx$ er bevisbar.
- Sekventen er også gyldig:
  - Anta at modellen $\mathcal{M}$ gjør $\forall x(Px \land Qx)$ sann.
  - Velg et vilkårlig element e i domenet til $\mathcal{M}$.

Eksempel 3

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\times}{\forall x(Px \land Qx), Pa, Qa \vdash Pa}}{\forall x(Px \land Qx), Pa \land Qa \vdash Pa}}{\forall x(Px \land Qx) \vdash Pa}}{\forall x(Px \land Qx) \vdash \forall x Px}
\qquad
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\times}{\forall x(Px \land Qx), Pa, Qa \vdash Qa}}{\forall x(Px \land Qx), Pa \land Qa \vdash Qa}}{\forall x(Px \land Qx) \vdash Qa}}{\forall x(Px \land Qx) \vdash \forall x Qx}
$$

$$
\forall x(Px \land Qx) \vdash \forall x Px \land \forall x Qx
$$

- Dette viser at sekventen $\forall x(Px \land Qx) \vdash \forall x Px \land \forall x Qx$ er bevisbar.
- Sekventen er også gyldig:
  - Anta at modellen $\mathcal{M}$ gjør $\forall x(Px \land Qx)$ sann.
  - Velg et vilkårlig element e i domenet til $\mathcal{M}$.
  - Ved antakelsen må $\mathcal{M}$ gjøre $P\bar{e} \land Q\bar{e}$ sann.

Eksempel 3

$$
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{\times}{\forall x(Px \land Qx), Pa, Qa \vdash Pa}
}{\forall x(Px \land Qx), Pa \land Qa \vdash Pa}
}{\forall x(Px \land Qx) \vdash Pa}
}{\forall x(Px \land Qx) \vdash \forall x Px}
\qquad
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{
\dfrac{\times}{\forall x(Px \land Qx), Pa, Qa \vdash Qa}
}{\forall x(Px \land Qx), Pa \land Qa \vdash Qa}
}{\forall x(Px \land Qx) \vdash Qa}
}{\forall x(Px \land Qx) \vdash \forall x Qx}
$$

$$\forall x(Px \land Qx) \vdash \forall x Px \land \forall x Qx$$

- Dette viser at sekventen $\forall x(Px \land Qx) \vdash \forall x Px \land \forall x Qx$ er bevisbar.
- Sekventen er også gyldig:
  - Anta at modellen $\mathcal{M}$ gjør $\forall x(Px \land Qx)$ sann.
  - Velg et vilkårlig element e i domenet til $\mathcal{M}$.
  - Ved antakelsen må $\mathcal{M}$ gjøre $P\bar{e} \land Q\bar{e}$ sann.
  - Da må $\mathcal{M}$ gjøre $P\bar{e}$ og $Q\bar{e}$ sann.

Eksempel 3

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\times}{\forall x(Px \land Qx), Pa, Qa \vdash Pa}}{\forall x(Px \land Qx), Pa \land Qa \vdash Pa}}{\forall x(Px \land Qx) \vdash Pa}}{\forall x(Px \land Qx) \vdash \forall x Px} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\times}{\forall x(Px \land Qx), Pa, Qa \vdash Qa}}{\forall x(Px \land Qx), Pa \land Qa \vdash Qa}}{\forall x(Px \land Qx) \vdash Qa}}{\forall x(Px \land Qx) \vdash \forall x Qx}$$
$$\overline{\forall x(Px \land Qx) \vdash \forall x Px \land \forall x Qx}$$

- Dette viser at sekventen $\forall x(Px \land Qx) \vdash \forall x Px \land \forall x Qx$ er bevisbar.
- Sekventen er også gyldig:
  - Anta at modellen $\mathcal{M}$ gjør $\forall x(Px \land Qx)$ sann.
  - Velg et vilkårlig element e i domenet til $\mathcal{M}$.
  - Ved antakelsen må $\mathcal{M}$ gjøre $P\bar{e} \land Q\bar{e}$ sann.
  - Da må $\mathcal{M}$ gjøre $P\bar{e}$ og $Q\bar{e}$ sann.
  - Siden e var vilkårlig valgt, må $\mathcal{M}$ også gjøre $\forall x Px$ og $\forall x Qx$ sanne.

Eksempel 3

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\times}{\forall x(Px \land Qx), Pa, Qa \vdash Pa}}{\forall x(Px \land Qx), Pa \land Qa \vdash Pa}}{\forall x(Px \land Qx) \vdash Pa}}{\forall x(Px \land Qx) \vdash \forall x Px}
\qquad
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\times}{\forall x(Px \land Qx), Pa, Qa \vdash Qa}}{\forall x(Px \land Qx), Pa \land Qa \vdash Qa}}{\forall x(Px \land Qx) \vdash Qa}}{\forall x(Px \land Qx) \vdash \forall x Qx}
$$
$$
\forall x(Px \land Qx) \vdash \forall x Px \land \forall x Qx
$$

- Dette viser at sekventen $\forall x(Px \land Qx) \vdash \forall x Px \land \forall x Qx$ er bevisbar.
- Sekventen er også gyldig:
  - Anta at modellen $\mathcal{M}$ gjør $\forall x(Px \land Qx)$ sann.
  - Velg et vilkårlig element e i domenet til $\mathcal{M}$.
  - Ved antakelsen må $\mathcal{M}$ gjøre $P\bar{e} \land Q\bar{e}$ sann.
  - Da må $\mathcal{M}$ gjøre $P\bar{e}$ og $Q\bar{e}$ sann.
  - Siden e var vilkårlig valgt, må $\mathcal{M}$ også gjøre $\forall x Px$ og $\forall x Qx$ sanne.
- At sekventen er gyldig følger også fra sunnhetsteoremet.

Eksempel 4

$$\exists x \forall y Lyx \ \vdash \forall x \exists y Lxy$$

Eksempel 4

$$\exists x \forall y Lyx \ \vdash \forall x \exists y Lxy$$

Eksempel 4

$$\frac{\forall y L y a \ \vdash \forall x \exists y L x y}{\exists x \forall y L y x \ \vdash \forall x \exists y L x y}$$

Eksempel 4

$$\frac{\forall y Lya \ \vdash \ \forall x \exists y Lxy}{\exists x \forall y Lyx \ \vdash \ \forall x \exists y Lxy}$$

Eksempel 4

$$\dfrac{\dfrac{\forall y Lya \vdash \exists y Lby}{\forall y Lya \vdash \forall x \exists y Lxy}}{\exists x \forall y Lyx \vdash \forall x \exists y Lxy}$$

Eksempel 4

$$\dfrac{\dfrac{\forall y L y a \;\vdash\; \exists y L b y}{\forall y L y a \;\vdash\; \forall x \exists y L x y}}{\exists x \forall y L y x \;\vdash\; \forall x \exists y L x y}$$

Eksempel 4

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\forall y Lya, Lba \vdash \exists y Lby}{\forall y Lya \vdash \exists y Lby}}{\forall y Lya \vdash \forall x \exists y Lxy}}{\exists x \forall y Lyx \vdash \forall x \exists y Lxy}$$

Eksempel 4

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\forall y Lya, Lba \vdash \exists y Lby}{\forall y Lya \vdash \exists y Lby}}{\forall y Lya \vdash \forall x \exists y Lxy}}{\exists x \forall y Lyx \vdash \forall x \exists y Lxy}$$

Eksempel 4

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\forall yLya, Lba \vdash Lba, \exists yLby}{\forall yLya, Lba \vdash \exists yLby}}{\forall yLya \vdash \exists yLby}}{\forall yLya \vdash \forall x\exists yLxy}}{\exists x\forall yLyx \vdash \forall x\exists yLxy}$$

Eksempel 4

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\times}{\forall y Lya, Lba \vdash Lba, \exists y Lby}}{\forall y Lya, Lba \vdash \exists y Lby}}{\forall y Lya \vdash \exists y Lby}}{\forall y Lya \vdash \forall x \exists y Lxy}}{\exists x \forall y Lyx \vdash \forall x \exists y Lxy}
$$

Eksempel 4

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\times}{\forall y Lya, Lba \vdash Lba, \exists y Lby}}{\forall y Lya, Lba \vdash \exists y Lby}}{\forall y Lya \vdash \exists y Lby}}{\forall y Lya \vdash \forall x \exists y Lxy}$$

$$\dfrac{\forall y Lya \vdash \forall x \exists y Lxy}{\exists x \forall y Lyx \vdash \forall x \exists y Lxy}$$

- Dette viser at sekventen $\exists x \forall y Lyx \vdash \forall x \exists y Lxy$ er bevisbar.

Eksempel 4

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\times}{\forall yLya, Lba \vdash Lba, \exists yLby}}{\forall yLya, Lba \vdash \exists yLby}}{\forall yLya \vdash \exists yLby}}{\forall yLya \vdash \forall x\exists yLxy}}{\exists x\forall yLyx \vdash \forall x\exists yLxy}$$

- Dette viser at sekventen $\exists x\forall yLyx \vdash \forall x\exists yLxy$ er bevisbar.
- Sekventen er også gyldig:

Eksempel 4

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\times}{\forall yLya, Lba \vdash Lba, \exists yLby}}{\forall yLya, Lba \vdash \exists yLby}}{\forall yLya \vdash \exists yLby}}{\forall yLya \vdash \forall x\exists yLxy}}{\exists x\forall yLyx \vdash \forall x\exists yLxy}
$$

- Dette viser at sekventen $\exists x\forall yLyx \vdash \forall x\exists yLxy$ er bevisbar.
- Sekventen er også gyldig:
  - Anta at modellen $\mathcal{M}$ gjør $\exists x\forall yLyx$ sann.

Eksempel 4

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\times}{\forall y Lya, Lba \vdash Lba, \exists y Lby}}{\forall y Lya, Lba \vdash \exists y Lby}}{\forall y Lya \vdash \exists y Lby}}{\forall y Lya \vdash \forall x \exists y Lxy}}{\exists x \forall y Lyx \vdash \forall x \exists y Lxy}$$

- Dette viser at sekventen $\exists x \forall y Lyx \vdash \forall x \exists y Lxy$ er bevisbar.
- Sekventen er også gyldig:
  - Anta at modellen $\mathcal{M}$ gjør $\exists x \forall y Lyx$ sann.
  - Da fins det et element a slik at $\forall y Ly\bar{a}$ er sann i $\mathcal{M}$.

Eksempel 4

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\times}{\forall y Lya, Lba \vdash Lba, \exists y Lby}}{\forall y Lya, Lba \vdash \exists y Lby}}{\forall y Lya \vdash \exists y Lby}}{\dfrac{\forall y Lya \vdash \forall x \exists y Lxy}{\exists x \forall y Lyx \vdash \forall x \exists y Lxy}}
$$

- Dette viser at sekventen $\exists x \forall y Lyx \vdash \forall x \exists y Lxy$ er bevisbar.
- Sekventen er også gyldig:
  - Anta at modellen $\mathcal{M}$ gjør $\exists x \forall y Lyx$ sann.
  - Da fins det et element a slik at $\forall y Ly\bar{a}$ er sann i $\mathcal{M}$.
  - For å vise at $\forall x \exists y Lxy$ er sann i $\mathcal{M}$, velg et vilkårlig element b.

Eksempel 4

$$
\begin{array}{c}
\times \\
\hline
\forall y Lya, Lba \vdash Lba, \exists y Lby \\
\hline
\forall y Lya, Lba \vdash \exists y Lby \\
\hline
\forall y Lya \vdash \exists y Lby \\
\hline
\forall y Lya \vdash \forall x \exists y Lxy \\
\hline
\exists x \forall y Lyx \vdash \forall x \exists y Lxy
\end{array}
$$

- Dette viser at sekventen $\exists x \forall y Lyx \vdash \forall x \exists y Lxy$ er bevisbar.
- Sekventen er også gyldig:
    - Anta at modellen $\mathcal{M}$ gjør $\exists x \forall y Lyx$ sann.
    - Da fins det et element a slik at $\forall y Ly\bar{a}$ er sann i $\mathcal{M}$.
    - For å vise at $\forall x \exists y Lxy$ er sann i $\mathcal{M}$, velg et vilkårlig element b.
    - Det er nok å vise at $\exists y L\bar{b}y$ er sann i $\mathcal{M}$.

Eksempel 4

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\times}{\forall yLya, Lba \vdash Lba, \exists yLby}}{\forall yLya, Lba \vdash \exists yLby}}{\forall yLya \vdash \exists yLby}}{\forall yLya \vdash \forall x\exists yLxy}}{\exists x\forall yLyx \vdash \forall x\exists yLxy}$$

- Dette viser at sekventen $\exists x\forall yLyx \vdash \forall x\exists yLxy$ er bevisbar.
- Sekventen er også gyldig:
  - Anta at modellen $\mathcal{M}$ gjør $\exists x\forall yLyx$ sann.
  - Da fins det et element a slik at $\forall yLy\bar{a}$ er sann i $\mathcal{M}$.
  - For å vise at $\forall x\exists yLxy$ er sann i $\mathcal{M}$, velg et vilkårlig element b.
  - Det er nok å vise at $\exists yL\bar{b}y$ er sann i $\mathcal{M}$.
  - Vi har at $L\bar{b}\bar{a}$ er sann i $\mathcal{M}$, siden $\forall yLy\bar{a}$ er sann i $\mathcal{M}$.

Eksempel 4

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\times}{\forall yLya, Lba \vdash Lba, \exists yLby}}{\forall yLya, Lba \vdash \exists yLby}}{\forall yLya \vdash \exists yLby}}{\forall yLya \vdash \forall x\exists yLxy}}{\exists x\forall yLyx \vdash \forall x\exists yLxy}$$

- Dette viser at sekventen $\exists x\forall yLyx \vdash \forall x\exists yLxy$ er bevisbar.
- Sekventen er også gyldig:
  - Anta at modellen $\mathcal{M}$ gjør $\exists x\forall yLyx$ sann.
  - Da fins det et element a slik at $\forall yLy\bar{a}$ er sann i $\mathcal{M}$.
  - For å vise at $\forall x\exists yLxy$ er sann i $\mathcal{M}$, velg et vilkårlig element b.
  - Det er nok å vise at $\exists yL\bar{b}y$ er sann i $\mathcal{M}$.
  - Vi har at $L\bar{b}\bar{a}$ er sann i $\mathcal{M}$, siden $\forall yLy\bar{a}$ er sann i $\mathcal{M}$.
  - "Hvis det fins en som blir likt av alle, så har alle noen de liker."

Eksempel 4

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\times}{\forall y Lya, Lba \vdash Lba, \exists y Lby}}{\forall y Lya, Lba \vdash \exists y Lby}}{\forall y Lya \vdash \exists y Lby}}{\forall y Lya \vdash \forall x \exists y Lxy}}{\exists x \forall y Lyx \vdash \forall x \exists y Lxy}$$

- Dette viser at sekventen $\exists x \forall y Lyx \vdash \forall x \exists y Lxy$ er bevisbar.
- Sekventen er også gyldig:
  - Anta at modellen $\mathcal{M}$ gjør $\exists x \forall y Lyx$ sann.
  - Da fins det et element a slik at $\forall y Ly\bar{a}$ er sann i $\mathcal{M}$.
  - For å vise at $\forall x \exists y Lxy$ er sann i $\mathcal{M}$, velg et vilkårlig element b.
  - Det er nok å vise at $\exists y L\bar{b}y$ er sann i $\mathcal{M}$.
  - Vi har at $L\bar{b}\bar{a}$ er sann i $\mathcal{M}$, siden $\forall y Ly\bar{a}$ er sann i $\mathcal{M}$.
  - "Hvis det fins en som blir likt av alle, så har alle noen de liker."
- At sekventen er gyldig følger også fra sunnhetsteoremet.

Eksempel 5

$$\forall x \exists y Lxy \;\vdash\; \exists x \forall y Lyx$$

Eksempel 5

$$\forall x \exists y Lxy \ \vdash \exists x \forall y Lyx$$

Eksempel 5

$$\frac{\forall x \exists y Lxy, \exists y Loy \ \vdash \exists x \forall y Lyx}{\forall x \exists y Lxy \ \vdash \exists x \forall y Lyx}$$

Eksempel 5

$$\frac{\forall x \exists y Lxy, \exists y Loy \ \vdash \exists x \forall y Lyx}{\forall x \exists y Lxy \ \vdash \exists x \forall y Lyx}$$

Eksempel 5

$$\dfrac{\dfrac{\forall x \exists y Lxy, Loa \vdash \exists x \forall y Lyx}{\forall x \exists y Lxy, \exists y Loy \vdash \exists x \forall y Lyx}}{\forall x \exists y Lxy \vdash \exists x \forall y Lyx}$$

Eksempel 5

$$\dfrac{\dfrac{\forall x \exists y Lxy, Loa \vdash \exists x \forall y Lyx}{\forall x \exists y Lxy, \exists y Loy \vdash \exists x \forall y Lyx}}{\forall x \exists y Lxy \vdash \exists x \forall y Lyx}$$

Eksempel 5

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\forall x \exists y Lxy, Loa \vdash \forall y Lya, \exists x \forall y Lyx}{\forall x \exists y Lxy, Loa \vdash \exists x \forall y Lyx}}{\forall x \exists y Lxy, \exists y Loy \vdash \exists x \forall y Lyx}}{\forall x \exists y Lxy \vdash \exists x \forall y Lyx}$$

Eksempel 5

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\forall x \exists y Lxy, Loa \vdash \forall y Lya, \exists x \forall y Lyx}{\forall x \exists y Lxy, Loa \vdash \exists x \forall y Lyx}}{\forall x \exists y Lxy, \exists y Loy \vdash \exists x \forall y Lyx}}{\forall x \exists y Lxy \vdash \exists x \forall y Lyx}
$$

Eksempel 5

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\forall x \exists y Lxy, Loa \vdash Lba, \exists x \forall y Lyx}{\forall x \exists y Lxy, Loa \vdash \forall y Lya, \exists x \forall y Lyx}}{\forall x \exists y Lxy, Loa \vdash \exists x \forall y Lyx}}{\forall x \exists y Lxy, \exists y Loy \vdash \exists x \forall y Lyx}}{\forall x \exists y Lxy \vdash \exists x \forall y Lyx}$$

Eksempel 5

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\forall x \exists y Lxy, Loa \vdash Lba, \exists x \forall y Lyx}{\forall x \exists y Lxy, Loa \vdash \forall y Lya, \exists x \forall y Lyx}}{\forall x \exists y Lxy, Loa \vdash \exists x \forall y Lyx}}{\forall x \exists y Lxy, \exists y Loy \vdash \exists x \forall y Lyx}}{\forall x \exists y Lxy \vdash \exists x \forall y Lyx}$$

Eksempel 5

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\forall x \exists y Lxy, \exists y Lby, Loa \vdash Lba, \exists x \forall y Lyx}{\forall x \exists y Lxy, Loa \vdash Lba, \exists x \forall y Lyx}}{\forall x \exists y Lxy, Loa \vdash \forall y Lya, \exists x \forall y Lyx}}{\forall x \exists y Lxy, Loa \vdash \exists x \forall y Lyx}}{\forall x \exists y Lxy, \exists y Loy \vdash \exists x \forall y Lyx}}{\forall x \exists y Lxy \vdash \exists x \forall y Lyx}$$

Eksempel 5

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\forall x \exists y Lxy, \exists y Lby, Loa \vdash Lba, \exists x \forall y Lyx}{\forall x \exists y Lxy, Loa \vdash Lba, \exists x \forall y Lyx}}{\forall x \exists y Lxy, Loa \vdash \forall y Lya, \exists x \forall y Lyx}}{\forall x \exists y Lxy, Loa \vdash \exists x \forall y Lyx}}{\forall x \exists y Lxy, \exists y Loy \vdash \exists x \forall y Lyx}}{\forall x \exists y Lxy \vdash \exists x \forall y Lyx}$$

Eksempel 5

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\color{gray}{\forall x \exists y Lxy}, Lb\color{red}{c}, Loa \vdash Lba, \color{gray}{\exists x \forall y Lyx}}{\color{gray}{\forall x \exists y Lxy}, \exists y Lby, Loa \vdash Lba, \color{gray}{\exists x \forall y Lyx}}}{\color{gray}{\forall x \exists y Lxy}, Loa \vdash Lba, \color{gray}{\exists x \forall y Lyx}}}{\color{gray}{\forall x \exists y Lxy}, Loa \vdash \forall y Lya, \color{gray}{\exists x \forall y Lyx}}}{\color{gray}{\forall x \exists y Lxy}, Loa \vdash \exists x \forall y Lyx}}{\color{gray}{\forall x \exists y Lxy}, \exists y Loy \vdash \exists x \forall y Lyx}}{\forall x \exists y Lxy \vdash \exists x \forall y Lyx}
$$

Eksempel 5

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\forall x \exists y Lxy, Lbc, Loa \vdash Lba, \exists x \forall y Lyx}{\forall x \exists y Lxy, \exists y Lby, Loa \vdash Lba, \exists x \forall y Lyx}}{\forall x \exists y Lxy, Loa \vdash Lba, \exists x \forall y Lyx}}{\forall x \exists y Lxy, Loa \vdash \forall y Lya, \exists x \forall y Lyx}}{\forall x \exists y Lxy, Loa \vdash \exists x \forall y Lyx}}{\dfrac{\forall x \exists y Lxy, \exists y Loy \vdash \exists x \forall y Lyx}{\forall x \exists y Lxy \vdash \exists x \forall y Lyx}}
$$

Eksempel 5

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\forall x \exists y Lxy, Lbc, Loa \vdash Lba, \forall y Lyc, \exists x \forall y Lyx}{\forall x \exists y Lxy, Lbc, Loa \vdash Lba, \exists x \forall y Lyx}}{\forall x \exists y Lxy, \exists y Lby, Loa \vdash Lba, \exists x \forall y Lyx}}{\forall x \exists y Lxy, Loa \vdash Lba, \exists x \forall y Lyx}}{\forall x \exists y Lxy, Loa \vdash \forall y Lya, \exists x \forall y Lyx}}{\forall x \exists y Lxy, Loa \vdash \exists x \forall y Lyx}}{\forall x \exists y Lxy, \exists y Loy \vdash \exists x \forall y Lyx}}{\forall x \exists y Lxy \vdash \exists x \forall y Lyx}$$

Eksempel 5

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\forall x \exists y Lxy, Lbc, Loa \vdash Lba, \forall y Lyc, \exists x \forall y Lyx}{\forall x \exists y Lxy, Lbc, Loa \vdash Lba, \exists x \forall y Lyx}}{\forall x \exists y Lxy, \exists y Lby, Loa \vdash Lba, \exists x \forall y Lyx}}{\forall x \exists y Lxy, Loa \vdash Lba, \exists x \forall y Lyx}}{\forall x \exists y Lxy, Loa \vdash \forall y Lya, \exists x \forall y Lyx}}{\forall x \exists y Lxy, Loa \vdash \exists x \forall y Lyx}}{\forall x \exists y Lxy, \exists y Loy \vdash \exists x \forall y Lyx}}{\forall x \exists y Lxy \vdash \exists x \forall y Lyx}$$

Eksempel 5

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\forall x \exists y Lxy, Lbc, Loa \vdash Lba, Ldc, \exists x \forall y Lyx}{\forall x \exists y Lxy, Lbc, Loa \vdash Lba, \forall y Lyc, \exists x \forall y Lyx}}{\forall x \exists y Lxy, Lbc, Loa \vdash Lba, \exists x \forall y Lyx}}{\forall x \exists y Lxy, \exists y Lby, Loa \vdash Lba, \exists x \forall y Lyx}}{\forall x \exists y Lxy, Loa \vdash Lba, \exists x \forall y Lyx}}{\forall x \exists y Lxy, Loa \vdash \forall y Lya, \exists x \forall y Lyx}}{\forall x \exists y Lxy, Loa \vdash \exists x \forall y Lyx}}{\forall x \exists y Lxy, \exists y Loy \vdash \exists x \forall y Lyx}}{\forall x \exists y Lxy \vdash \exists x \forall y Lyx}$$

Eksempel 5

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\vdots}{\forall x \exists y Lxy, Lbc, Loa \vdash Lba, Ldc, \exists x \forall y Lyx}}{\forall x \exists y Lxy, Lbc, Loa \vdash Lba, \forall y Lyc, \exists x \forall y Lyx}}{\forall x \exists y Lxy, Lbc, Loa \vdash Lba, \exists x \forall y Lyx}}{\forall x \exists y Lxy, \exists y Lby, Loa \vdash Lba, \exists x \forall y Lyx}}{\forall x \exists y Lxy, Loa \vdash Lba, \exists x \forall y Lyx}}{\forall x \exists y Lxy, Loa \vdash \forall y Lya, \exists x \forall y Lyx}}{\forall x \exists y Lxy, Loa \vdash \exists x \forall y Lyx}}{\forall x \exists y Lxy, \exists y Loy \vdash \exists x \forall y Lyx}}{\forall x \exists y Lxy \vdash \exists x \forall y Lyx}
$$

Eksempel 5

- Vi klarte ikke å bevise sekventen $\forall x \exists y Lxy \vdash \exists x \forall y Lyx$.

Eksempel 5

- Vi klarte ikke å bevise sekventen $\forall x \exists y Lxy \vdash \exists x \forall y Lyx$.
- Kan vi klare å lage en motmodell?

Eksempel 5

- Vi klarte ikke å bevise sekventen $\forall x \exists y Lxy \vdash \exists x \forall y Lyx$.
- Kan vi klare å lage en motmodell?
  - Når vi kommer til kompletthet, så skal vi se at det *alltid* fins en motmodell for ikke-bevisbare sekventer.

Eksempel 5

- Vi klarte ikke å bevise sekventen $\forall x \exists y Lxy \vdash \exists x \forall y Lyx$.
- Kan vi klare å lage en motmodell?
  - Når vi kommer til kompletthet, så skal vi se at det *alltid* fins en motmodell for ikke-bevisbare sekventer.
- **JA**, la $\mathcal{M} = \{a, b\}$ og la $L^{\mathcal{M}} = \{\langle a, a\rangle, \langle b, b\rangle\}$.

Eksempel 5

- Vi klarte ikke å bevise sekventen $\forall x \exists y Lxy \vdash \exists x \forall y Lyx$.
- Kan vi klare å lage en motmodell?
  - Når vi kommer til kompletthet, så skal vi se at det *alltid* fins en motmodell for ikke-bevisbare sekventer.
- **JA**, la $\mathcal{M} = \{a, b\}$ og la $L^{\mathcal{M}} = \{\langle a, a\rangle, \langle b, b\rangle\}$.
- "Alle liker seg selv og ingen andre."

Eksempel 5

- Vi klarte ikke å bevise sekventen $\forall x \exists y Lxy \vdash \exists x \forall y Lyx$.
- Kan vi klare å lage en motmodell?
  - Når vi kommer til kompletthet, så skal vi se at det *alltid* fins en motmodell for ikke-bevisbare sekventer.
- **JA**, la $\mathcal{M} = \{a, b\}$ og la $L^{\mathcal{M}} = \{\langle a, a\rangle, \langle b, b\rangle\}$.
- "Alle liker seg selv og ingen andre."
- Da vil $\mathcal{M} \models \forall x \exists y Lxy$.

Eksempel 5

- Vi klarte ikke å bevise sekventen $\forall x \exists y Lxy \vdash \exists x \forall y Lyx$.
- Kan vi klare å lage en motmodell?
  - Når vi kommer til kompletthet, så skal vi se at det *alltid* fins en motmodell for ikke-bevisbare sekventer.
- **JA**, la $\mathcal{M} = \{a, b\}$ og la $L^{\mathcal{M}} = \{\langle a, a\rangle, \langle b, b\rangle\}$.
- "Alle liker seg selv og ingen andre."
- Da vil $\mathcal{M} \models \forall x \exists y Lxy$.
  - $\mathcal{M} \models \exists y L\bar{a}y$, siden $\mathcal{M} \models L\bar{a}\bar{a}$.

Eksempel 5

- Vi klarte ikke å bevise sekventen $\forall x \exists y Lxy \vdash \exists x \forall y Lyx$.
- Kan vi klare å lage en motmodell?
  - Når vi kommer til kompletthet, så skal vi se at det *alltid* fins en motmodell for ikke-bevisbare sekventer.
- **JA**, la $\mathcal{M} = \{a, b\}$ og la $L^{\mathcal{M}} = \{\langle a, a\rangle, \langle b, b\rangle\}$.
- "Alle liker seg selv og ingen andre."
- Da vil $\mathcal{M} \models \forall x \exists y Lxy$.
  - $\mathcal{M} \models \exists y L\bar{a}y$, siden $\mathcal{M} \models L\bar{a}\bar{a}$.
  - $\mathcal{M} \models \exists y L\bar{b}y$, siden $\mathcal{M} \models L\bar{b}\bar{b}$.

Eksempel 5

- Vi klarte ikke å bevise sekventen $\forall x \exists y Lxy \vdash \exists x \forall y Lyx$.
- Kan vi klare å lage en motmodell?
  - Når vi kommer til kompletthet, så skal vi se at det *alltid* fins en motmodell for ikke-bevisbare sekventer.
- **JA**, la $\mathcal{M} = \{a, b\}$ og la $L^{\mathcal{M}} = \{\langle a, a\rangle, \langle b, b\rangle\}$.
- "Alle liker seg selv og ingen andre."
- Da vil $\mathcal{M} \models \forall x \exists y Lxy$.
  - $\mathcal{M} \models \exists y L\bar{a}y$, siden $\mathcal{M} \models L\bar{a}\bar{a}$.
  - $\mathcal{M} \models \exists y L\bar{b}y$, siden $\mathcal{M} \models L\bar{b}\bar{b}$.
- Og $\mathcal{M} \not\models \exists x \forall y Lyx$.

Eksempel 5

- Vi klarte ikke å bevise sekventen $\forall x \exists y Lxy \vdash \exists x \forall y Lyx$.
- Kan vi klare å lage en motmodell?
  - Når vi kommer til kompletthet, så skal vi se at det *alltid* fins en motmodell for ikke-bevisbare sekventer.
- **JA**, la $\mathcal{M} = \{a, b\}$ og la $L^{\mathcal{M}} = \{\langle a, a\rangle, \langle b, b\rangle\}$.
- "Alle liker seg selv og ingen andre."
- Da vil $\mathcal{M} \models \forall x \exists y Lxy$.
  - $\mathcal{M} \models \exists y L\bar{a}y$, siden $\mathcal{M} \models L\bar{a}\bar{a}$.
  - $\mathcal{M} \models \exists y L\bar{b}y$, siden $\mathcal{M} \models L\bar{b}\bar{b}$.
- Og $\mathcal{M} \not\models \exists x \forall y Lyx$.
  - $\mathcal{M} \not\models \forall y Ly\bar{a}$, siden $\mathcal{M} \not\models L\bar{b}\bar{a}$.

Eksempel 5

- Vi klarte ikke å bevise sekventen $\forall x \exists y Lxy \vdash \exists x \forall y Lyx$.
- Kan vi klare å lage en motmodell?
  - Når vi kommer til kompletthet, så skal vi se at det *alltid* fins en motmodell for ikke-bevisbare sekventer.
- **JA**, la $\mathcal{M} = \{a, b\}$ og la $L^{\mathcal{M}} = \{\langle a, a \rangle, \langle b, b \rangle\}$.
- "Alle liker seg selv og ingen andre."
- Da vil $\mathcal{M} \models \forall x \exists y Lxy$.
  - $\mathcal{M} \models \exists y L\bar{a}y$, siden $\mathcal{M} \models L\bar{a}\bar{a}$.
  - $\mathcal{M} \models \exists y L\bar{b}y$, siden $\mathcal{M} \models L\bar{b}\bar{b}$.
- Og $\mathcal{M} \not\models \exists x \forall y Lyx$.
  - $\mathcal{M} \not\models \forall y Ly\bar{a}$, siden $\mathcal{M} \not\models L\bar{b}\bar{a}$.
  - $\mathcal{M} \not\models \forall y Ly\bar{b}$, siden $\mathcal{M} \not\models L\bar{a}\bar{b}$.

Eksempel 6

$$\vdash \exists x(Px \to \forall x Px)$$

Eksempel 6

$$\vdash \exists x(Px \to \forall x Px)$$

Eksempel 6

$$\frac{\vdash Po \rightarrow \forall x Px, \exists x(Px \rightarrow \forall x Px)}{\vdash \exists x(Px \rightarrow \forall x Px)}$$

Eksempel 6

$$\frac{\vdash Po \rightarrow \forall x Px, \exists x(Px \rightarrow \forall x Px)}{\vdash \exists x(Px \rightarrow \forall x Px)}$$

Eksempel 6

$$\dfrac{\dfrac{Po \vdash \forall x Px, \exists x(Px \to \forall x Px)}{\vdash Po \to \forall x Px, \exists x(Px \to \forall x Px)}}{\vdash \exists x(Px \to \forall x Px)}$$

Eksempel 6

$$\dfrac{\dfrac{Po \vdash \forall x Px, \exists x(Px \to \forall x Px)}{\vdash Po \to \forall x Px, \exists x(Px \to \forall x Px)}}{\vdash \exists x(Px \to \forall x Px)}$$

Eksempel 6

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{Po \vdash Pa, \exists x(Px \rightarrow \forall x Px)}{Po \vdash \forall x Px, \exists x(Px \rightarrow \forall x Px)}}{\vdash Po \rightarrow \forall x Px, \exists x(Px \rightarrow \forall x Px)}}{\vdash \exists x(Px \rightarrow \forall x Px)}$$

Eksempel 6

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{Po \vdash Pa, \exists x(Px \rightarrow \forall xPx)}{Po \vdash \forall xPx, \exists x(Px \rightarrow \forall xPx)}}{\vdash Po \rightarrow \forall xPx, \exists x(Px \rightarrow \forall xPx)}}{\vdash \exists x(Px \rightarrow \forall xPx)}$$

Eksempel 6

$$
\begin{array}{rl}
Po & \vdash Pa, Pa \rightarrow \forall x Px, \exists x(Px \rightarrow \forall x Px) \\
\hline
Po & \vdash Pa, \exists x(Px \rightarrow \forall x Px) \\
\hline
Po & \vdash \forall x Px, \exists x(Px \rightarrow \forall x Px) \\
\hline
 & \vdash Po \rightarrow \forall x Px, \exists x(Px \rightarrow \forall x Px) \\
\hline
 & \vdash \exists x(Px \rightarrow \forall x Px)
\end{array}
$$

Eksempel 6

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{Po \vdash Pa, Pa \to \forall x Px, \exists x(Px \to \forall x Px)}{Po \vdash Pa, \exists x(Px \to \forall x Px)}}{Po \vdash \forall x Px, \exists x(Px \to \forall x Px)}}{\vdash Po \to \forall x Px, \exists x(Px \to \forall x Px)}}{\vdash \exists x(Px \to \forall x Px)}$$

Eksempel 6

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{Po, Pa \vdash \forall x Px, Pa, \exists x(Px \to \forall x Px)}{Po \vdash Pa, Pa \to \forall x Px, \exists x(Px \to \forall x Px)}}{Po \vdash Pa, \exists x(Px \to \forall x Px)}}{Po \vdash \forall x Px, \exists x(Px \to \forall x Px)}}{\vdash Po \to \forall x Px, \exists x(Px \to \forall x Px)}}{\vdash \exists x(Px \to \forall x Px)}
$$

Eksempel 6

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\times}{Po, Pa \vdash \forall x Px, Pa, \exists x(Px \to \forall x Px)}}{Po \vdash Pa, Pa \to \forall x Px, \exists x(Px \to \forall x Px)}}{Po \vdash Pa, \exists x(Px \to \forall x Px)}}{Po \vdash \forall x Px, \exists x(Px \to \forall x Px)}}{\dfrac{\vdash Po \to \forall x Px, \exists x(Px \to \forall x Px)}{\vdash \exists x(Px \to \forall x Px)}}
$$

Eksempel 6

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\times}{Po, Pa \vdash \forall x Px, Pa, \exists x(Px \rightarrow \forall x Px)}}{Po \vdash Pa, Pa \rightarrow \forall x Px, \exists x(Px \rightarrow \forall x Px)}}{Po \vdash Pa, \exists x(Px \rightarrow \forall x Px)}}{Po \vdash \forall x Px, \exists x(Px \rightarrow \forall x Px)}}{\vdash Po \rightarrow \forall x Px, \exists x(Px \rightarrow \forall x Px)}}{\vdash \exists x(Px \rightarrow \forall x Px)}$$

- Dette viser at sekventen $\vdash \exists x(Px \rightarrow \forall x Px)$ er bevisbar.

Eksempel 6

$$\times$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{Po, Pa \vdash \forall x Px, Pa, \exists x(Px \to \forall x Px)}{Po \vdash Pa, Pa \to \forall x Px, \exists x(Px \to \forall x Px)}}{Po \vdash Pa, \exists x(Px \to \forall x Px)}}{Po \vdash \forall x Px, \exists x(Px \to \forall x Px)}}{\vdash Po \to \forall x Px, \exists x(Px \to \forall x Px)}}{\vdash \exists x(Px \to \forall x Px)}$$

- Dette viser at sekventen $\vdash \exists x(Px \to \forall x Px)$ er bevisbar.
- "Det fins en x slik at hvis x liker fotball, så liker alle fotball."

Eksempel 6

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\times}{Po, Pa \vdash \forall x Px, Pa, \exists x(Px \to \forall x Px)}}{Po \vdash Pa, Pa \to \forall x Px, \exists x(Px \to \forall x Px)}}{Po \vdash Pa, \exists x(Px \to \forall x Px)}}{Po \vdash \forall x Px, \exists x(Px \to \forall x Px)}}{\vdash Po \to \forall x Px, \exists x(Px \to \forall x Px)}}{\vdash \exists x(Px \to \forall x Px)}$$

- Dette viser at sekventen $\vdash \exists x(Px \to \forall x Px)$ er bevisbar.
- "Det fins en x slik at hvis x liker fotball, så liker alle fotball."
- Dette er ikke den samme påstanden som:
  "Hvis det fins en x som liker fotball, så liker alle fotball."

Eksempel 6

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\times}{Po, Pa \vdash \forall x Px, Pa, \exists x(Px \to \forall x Px)}}{Po \vdash Pa, Pa \to \forall x Px, \exists x(Px \to \forall x Px)}}{Po \vdash Pa, \exists x(Px \to \forall x Px)}}{Po \vdash \forall x Px, \exists x(Px \to \forall x Px)}}{\dfrac{\vdash Po \to \forall x Px, \exists x(Px \to \forall x Px)}{\vdash \exists x(Px \to \forall x Px)}}
$$

- Dette viser at sekventen $\vdash \exists x(Px \to \forall x Px)$ er bevisbar.
- "Det fins en x slik at hvis x liker fotball, så liker alle fotball."
- Dette er ikke den samme påstanden som:
  "Hvis det fins en x som liker fotball, så liker alle fotball."
- Oppgave: vis at formelen er gyldig. Argumenter for at formelen er sann i enhver modell.

Overblikk

Overblikk

- Vi skal nå vise at enhver sekvent som kan bevises ved å bruke LK-reglene er gyldig.

Overblikk

- Vi skal nå vise at enhver sekvent som kan bevises ved å bruke LK-reglene er gyldig.
- Hvis vi kunne bevise noe som *ikke* var gyldig, så ville LK ha vært ukorrekt eller usunn...

Overblikk

- Vi skal nå vise at enhver sekvent som kan bevises ved å bruke LK-reglene er gyldig.
- Hvis vi kunne bevise noe som *ikke* var gyldig, så ville LK ha vært ukorrekt eller usunn. . .

Definisjon (Sunnhet)

En sekventkalkyle er sunn hvis enhver sekvent som er bevisbar i kalkylen, er gyldig.

Overblikk

- Vi skal nå vise at enhver sekvent som kan bevises ved å bruke LK-reglene er gyldig.
- Hvis vi kunne bevise noe som *ikke* var gyldig, så ville LK ha vært ukorrekt eller usunn...

Definisjon (Sunnhet)

En sekventkalkyle er sunn hvis enhver sekvent som er bevisbar i kalkylen, er gyldig.

Teorem (Sunnhet)

Sekventkalkylen LK *for førsteordens logikk er sunn.*

Antakelser om førsteordens språk

Antakelser om førsteordens språk

- Vi antar i beviset at et førsteordens språk $\mathcal{L}$ er gitt.

Antakelser om førsteordens språk

- Vi antar i beviset at et førsteordens språk $\mathcal{L}$ er gitt.
- En rotsekvent $\Gamma \vdash \Delta$ består altså av lukkede $\mathcal{L}$-formler.

Antakelser om førsteordens språk

- Vi antar i beviset at et førsteordens språk $\mathcal{L}$ er gitt.
- En rotsekvent $\Gamma \vdash \Delta$ består altså av lukkede $\mathcal{L}$-formler.
- Fra antakelsen om at $\Gamma \vdash \Delta$ er bevisbar, skal vi vise at $\Gamma \vdash \Delta$ er gyldig.

Antakelser om førsteordens språk

- Vi antar i beviset at et førsteordens språk $\mathcal{L}$ er gitt.
- En rotsekvent $\Gamma \vdash \Delta$ består altså av lukkede $\mathcal{L}$-formler.
- Fra antakelsen om at $\Gamma \vdash \Delta$ er bevisbar, skal vi vise at $\Gamma \vdash \Delta$ er gyldig.
- Med *gyldig* mener vi *gyldig i alle $\mathcal{L}$-modeller*.

Antakelser om førsteordens språk

- Vi antar i beviset at et førsteordens språk $\mathcal{L}$ er gitt.
- En rotsekvent $\Gamma \vdash \Delta$ består altså av lukkede $\mathcal{L}$-formler.
- Fra antakelsen om at $\Gamma \vdash \Delta$ er bevisbar, skal vi vise at $\Gamma \vdash \Delta$ er gyldig.
- Med *gyldig* mener vi *gyldig i alle $\mathcal{L}$-modeller*.
- I en utledning av $\Gamma \vdash \Delta$ brukes det utvidete språket $\mathcal{L}^{\mathsf{par}}$.

Antakelser om førsteordens språk

- Vi antar i beviset at et førsteordens språk $\mathcal{L}$ er gitt.
- En rotsekvent $\Gamma \vdash \Delta$ består altså av lukkede $\mathcal{L}$-formler.
- Fra antakelsen om at $\Gamma \vdash \Delta$ er bevisbar, skal vi vise at $\Gamma \vdash \Delta$ er gyldig.
- Med *gyldig* mener vi *gyldig i alle* $\mathcal{L}$*-modeller*.
- I en utledning av $\Gamma \vdash \Delta$ brukes det utvidete språket $\mathcal{L}^{\mathsf{par}}$.
- Vi antar derfor i sunnhetsbeviset at alle modeller er $\mathcal{L}^{\mathsf{par}}$-modeller.

Antakelser om førsteordens språk

- Vi antar i beviset at et førsteordens språk $\mathcal{L}$ er gitt.
- En rotsekvent $\Gamma \vdash \Delta$ består altså av lukkede $\mathcal{L}$-formler.
- Fra antakelsen om at $\Gamma \vdash \Delta$ er bevisbar, skal vi vise at $\Gamma \vdash \Delta$ er gyldig.
- Med *gyldig* mener vi *gyldig i alle $\mathcal{L}$-modeller*.
- I en utledning av $\Gamma \vdash \Delta$ brukes det utvidete språket $\mathcal{L}^{\mathrm{par}}$.
- Vi antar derfor i sunnhetsbeviset at alle modeller er $\mathcal{L}^{\mathrm{par}}$-modeller.
- Når vi har vist at $\Gamma \vdash \Delta$ er gyldig i alle $\mathcal{L}^{\mathrm{par}}$-modeller, så må $\Gamma \vdash \Delta$ også være gyldig i alle $\mathcal{L}$-modeller, siden $\Gamma \vdash \Delta$ kun består av $\mathcal{L}$-formler.

Strukturen i beviset for sunnhet

Strukturen i beviset for sunnhet

Vi viser følgende lemmaer:

Strukturen i beviset for sunnhet

Vi viser følgende lemmaer:

1. Alle LK-reglene bevarer falsifiserbarhet oppover.

Strukturen i beviset for sunnhet

Vi viser følgende lemmaer:

1. Alle LK-reglene bevarer falsifiserbarhet oppover.
2. En LK-utledning med falsifiserbar rotsekvent har minst én falsifiserbar løvsekvent.

Strukturen i beviset for sunnhet

Vi viser følgende lemmaer:

1. Alle LK-reglene bevarer falsifiserbarhet oppover.
2. En LK-utledning med falsifiserbar rotsekvent har minst én falsifiserbar løvsekvent.
3. Alle aksiomer er gyldige.

Strukturen i beviset for sunnhet

Vi viser følgende lemmaer:

1. Alle LK-reglene bevarer falsifiserbarhet oppover.
2. En LK-utledning med falsifiserbar rotsekvent har minst én falsifiserbar løvsekvent.
3. Alle aksiomer er gyldige.

Til slutt vises sunnhetsteoremet ved hjelp av lemmaene.

Strukturen i beviset for sunnhet

Vi viser følgende lemmaer:

1. Alle LK-reglene bevarer falsifiserbarhet oppover.
2. En LK-utledning med falsifiserbar rotsekvent har minst én falsifiserbar løvsekvent.
3. Alle aksiomer er gyldige.

Til slutt vises sunnhetsteoremet ved hjelp av lemmaene.

Reglene bevarer falsifiserbarhet

Reglene bevarer falsifiserbarhet

Definisjon

En LK*-regel* θ *er falsifiserbarhetsbevarende (oppover) hvis hver gang konklusjonen i en* θ*-slutning er falsifiserbar, så er også minst ett av premissene i slutningen falsifiserbart.*

Reglene bevarer falsifiserbarhet

Definisjon

En LK*-regel* θ *er falsifiserbarhetsbevarende (oppover) hvis hver gang konklusjonen i en* θ*-slutning er falsifiserbar, så er også minst ett av premissene i slutningen falsifiserbart.*

Lemma

Alle LK*-reglene er falsifiserbarhetsbevarende.*

Reglene bevarer falsifiserbarhet

Definisjon

En LK*-regel θ er falsifiserbarhetsbevarende (oppover) hvis hver gang konklusjonen i en θ-slutning er falsifiserbar, så er også minst ett av premissene i slutningen falsifiserbart.*

Lemma

Alle LK*-reglene er falsifiserbarhetsbevarende.*

- Vi har vist at α- og β-reglene har egenskapen.

Reglene bevarer falsifiserbarhet

Definisjon

En LK*-regel θ er falsifiserbarhetsbevarende (oppover) hvis hver gang konklusjonen i en θ-slutning er falsifiserbar, så er også minst ett av premissene i slutningen falsifiserbart.*

Lemma

Alle LK*-reglene er falsifiserbarhetsbevarende.*

- Vi har vist at α- og β-reglene har egenskapen.
- Gjenstår å vise at γ- og δ-reglene har egenskapen.

Bevis for at L∀ bevarer falsifiserbarhet

Bevis for at L∀ bevarer falsifiserbarhet

$$\frac{\Gamma, \forall x \varphi, \varphi[t/x] \ \vdash \Delta}{\Gamma, \forall x \varphi \ \vdash \Delta}\,\mathsf{L}\forall \qquad t \text{ er en lukket term}$$

Bevis for at L∀ bevarer falsifiserbarhet

$$\frac{\Gamma, \forall x\varphi, \varphi[t/x] \ \vdash \Delta}{\Gamma, \forall x\varphi \ \vdash \Delta}\,\mathsf{L}\forall \qquad t \text{ er en lukket term}$$

- Anta at modellen $\mathcal{M}$ falsifiserer konklusjonen $\Gamma, \forall x\varphi \vdash \Delta$.

Bevis for at L∀ bevarer falsifiserbarhet

$$\frac{\Gamma, \forall x\varphi, \varphi[t/x] \ \vdash \Delta}{\Gamma, \forall x\varphi \ \vdash \Delta}\,\mathsf{L}\forall \qquad t \text{ er en lukket term}$$

- Anta at modellen $\mathcal{M}$ falsifiserer konklusjonen $\Gamma, \forall x\varphi \vdash \Delta$.
- $\mathcal{M}$ gjør alle formlene i $\Gamma \cup \{\forall x\varphi\}$ sanne og alle formlene i Δ usanne.

Bevis for at L$\forall$ bevarer falsifiserbarhet

$$\frac{\Gamma, \forall x\varphi, \varphi[t/x] \ \vdash \Delta}{\Gamma, \forall x\varphi \ \vdash \Delta} \, \mathsf{L}\forall \qquad t \text{ er en lukket term}$$

- Anta at modellen $\mathcal{M}$ falsifiserer konklusjonen $\Gamma, \forall x\varphi \vdash \Delta$.
- $\mathcal{M}$ gjør alle formlene i $\Gamma \cup \{\forall x\varphi\}$ sanne og alle formlene i Δ usanne.
- Det holder å vise at $\mathcal{M} \models \varphi[t/x]$.

Bevis for at L∀ bevarer falsifiserbarhet

$$\frac{\Gamma, \forall x \varphi, \varphi[t/x] \ \vdash \Delta}{\Gamma, \forall x \varphi \ \vdash \Delta} \text{L}\forall \qquad t \text{ er en lukket term}$$

- Anta at modellen $\mathcal{M}$ falsifiserer konklusjonen $\Gamma, \forall x \varphi \vdash \Delta$.
- $\mathcal{M}$ gjør alle formlene i $\Gamma \cup \{\forall x \varphi\}$ sanne og alle formlene i Δ usanne.
- Det holder å vise at $\mathcal{M} \models \varphi[t/x]$. Da er premisset falsifisert av $\mathcal{M}$.

Bevis for at L∀ bevarer falsifiserbarhet

$$\frac{\Gamma, \forall x \varphi, \varphi[t/x] \ \vdash \Delta}{\Gamma, \forall x \varphi \ \vdash \Delta} \text{L}\forall \qquad t \text{ er en lukket term}$$

- Anta at modellen $\mathcal{M}$ falsifiserer konklusjonen $\Gamma, \forall x \varphi \vdash \Delta$.
- $\mathcal{M}$ gjør alle formlene i $\Gamma \cup \{\forall x \varphi\}$ sanne og alle formlene i Δ usanne.
- Det holder å vise at $\mathcal{M} \models \varphi[t/x]$. Da er premisset falsifisert av $\mathcal{M}$.
- Anta at $t^{\mathcal{M}} = e$, hvor $e \in |\mathcal{M}|$.

Bevis for at L$\forall$ bevarer falsifiserbarhet

$$\frac{\Gamma, \forall x\varphi, \varphi[t/x] \;\vdash \Delta}{\Gamma, \forall x\varphi \;\vdash \Delta}\,\mathrm{L}\forall \qquad t \text{ er en lukket term}$$

- Anta at modellen $\mathcal{M}$ falsifiserer konklusjonen $\Gamma, \forall x\varphi \vdash \Delta$.
- $\mathcal{M}$ gjør alle formlene i $\Gamma \cup \{\forall x\varphi\}$ sanne og alle formlene i Δ usanne.
- Det holder å vise at $\mathcal{M} \models \varphi[t/x]$. Da er premisset falsifisert av $\mathcal{M}$.
- Anta at $t^{\mathcal{M}} = e$, hvor $e \in |\mathcal{M}|$.
  (Her bruker vi definisjonen av modell og at t er en lukket term.)

Bevis for at L∀ bevarer falsifiserbarhet

$$\frac{\Gamma, \forall x \varphi, \varphi[t/x] \ \vdash \Delta}{\Gamma, \forall x \varphi \ \vdash \Delta} \text{L}\forall \qquad t \text{ er en lukket term}$$

- Anta at modellen $\mathcal{M}$ falsifiserer konklusjonen $\Gamma, \forall x \varphi \vdash \Delta$.
- $\mathcal{M}$ gjør alle formlene i $\Gamma \cup \{\forall x \varphi\}$ sanne og alle formlene i Δ usanne.
- Det holder å vise at $\mathcal{M} \models \varphi[t/x]$. Da er premisset falsifisert av $\mathcal{M}$.
- Anta at $t^{\mathcal{M}} = e$, hvor $e \in |\mathcal{M}|$.
  (Her bruker vi definisjonen av modell og at t er en lukket term.)
- Siden $\mathcal{M} \models \forall x \varphi$ har vi at $\mathcal{M} \models \varphi[\bar{d}/x]$ for alle $d \in |\mathcal{M}|$.

Bevis for at L∀ bevarer falsifiserbarhet

$$\frac{\Gamma, \forall x\varphi, \varphi[t/x] \;\vdash \Delta}{\Gamma, \forall x\varphi \;\vdash \Delta}\,\mathsf{L}\forall \qquad t \text{ er en lukket term}$$

- Anta at modellen $\mathcal{M}$ falsifiserer konklusjonen $\Gamma, \forall x\varphi \vdash \Delta$.
- $\mathcal{M}$ gjør alle formlene i $\Gamma \cup \{\forall x\varphi\}$ sanne og alle formlene i Δ usanne.
- Det holder å vise at $\mathcal{M} \models \varphi[t/x]$. Da er premisset falsifisert av $\mathcal{M}$.
- Anta at $t^{\mathcal{M}} = e$, hvor $e \in |\mathcal{M}|$.
  (Her bruker vi definisjonen av modell og at t er en lukket term.)
- Siden $\mathcal{M} \models \forall x\varphi$ har vi at $\mathcal{M} \models \varphi[\bar{d}/x]$ for alle $d \in |\mathcal{M}|$.
  (Her bruker vi definisjonen av oppfyllbarhet.)

Bevis for at L$\forall$ bevarer falsifiserbarhet

$$\frac{\Gamma, \forall x \varphi, \varphi[t/x] \ \vdash \Delta}{\Gamma, \forall x \varphi \ \vdash \Delta} \text{L}\forall \qquad t \text{ er en lukket term}$$

- Anta at modellen $\mathcal{M}$ falsifiserer konklusjonen $\Gamma, \forall x \varphi \vdash \Delta$.
- $\mathcal{M}$ gjør alle formlene i $\Gamma \cup \{\forall x \varphi\}$ sanne og alle formlene i Δ usanne.
- Det holder å vise at $\mathcal{M} \models \varphi[t/x]$. Da er premisset falsifisert av $\mathcal{M}$.
- Anta at $t^{\mathcal{M}} = e$, hvor $e \in |\mathcal{M}|$.
  (Her bruker vi definisjonen av modell og at t er en lukket term.)
- Siden $\mathcal{M} \models \forall x \varphi$ har vi at $\mathcal{M} \models \varphi[\bar{d}/x]$ for alle $d \in |\mathcal{M}|$.
  (Her bruker vi definisjonen av oppfyllbarhet.)
- Spesielt har vi at $\mathcal{M} \models \varphi[\bar{e}/x]$.

Bevis for at L∀ bevarer falsifiserbarhet

$$\frac{\Gamma, \forall x\varphi, \varphi[t/x] \;\vdash \Delta}{\Gamma, \forall x\varphi \;\vdash \Delta}\,\mathsf{L}\forall \qquad t \text{ er en lukket term}$$

- Anta at modellen $\mathcal{M}$ falsifiserer konklusjonen $\Gamma, \forall x\varphi \vdash \Delta$.
- $\mathcal{M}$ gjør alle formlene i $\Gamma \cup \{\forall x\varphi\}$ sanne og alle formlene i Δ usanne.
- Det holder å vise at $\mathcal{M} \models \varphi[t/x]$. Da er premisset falsifisert av $\mathcal{M}$.
- Anta at $t^{\mathcal{M}} = e$, hvor $e \in |\mathcal{M}|$.
  (Her bruker vi definisjonen av modell og at t er en lukket term.)
- Siden $\mathcal{M} \models \forall x\varphi$ har vi at $\mathcal{M} \models \varphi[\bar{d}/x]$ for alle $d \in |\mathcal{M}|$.
  (Her bruker vi definisjonen av oppfyllbarhet.)
- Spesielt har vi at $\mathcal{M} \models \varphi[\bar{e}/x]$.
- t og $\bar{e}$ må tolkes likt (som elementet e).

Bevis for at L$\forall$ bevarer falsifiserbarhet

$$\frac{\Gamma, \forall x\varphi, \varphi[t/x] \ \vdash \Delta}{\Gamma, \forall x\varphi \ \vdash \Delta}\,\mathsf{L}\forall \qquad t \text{ er en lukket term}$$

- Anta at modellen $\mathcal{M}$ falsifiserer konklusjonen $\Gamma, \forall x\varphi \vdash \Delta$.
- $\mathcal{M}$ gjør alle formlene i $\Gamma \cup \{\forall x\varphi\}$ sanne og alle formlene i Δ usanne.
- Det holder å vise at $\mathcal{M} \models \varphi[t/x]$. Da er premisset falsifisert av $\mathcal{M}$.
- Anta at $t^{\mathcal{M}} = e$, hvor $e \in |\mathcal{M}|$.
  (Her bruker vi definisjonen av modell og at t er en lukket term.)
- Siden $\mathcal{M} \models \forall x\varphi$ har vi at $\mathcal{M} \models \varphi[\bar{d}/x]$ for alle $d \in |\mathcal{M}|$.
  (Her bruker vi definisjonen av oppfyllbarhet.)
- Spesielt har vi at $\mathcal{M} \models \varphi[\bar{e}/x]$.
- t og $\bar{e}$ må tolkes likt (som elementet e). Derfor har vi $\mathcal{M} \models \varphi[t/x]$.

- Mot slutten av beviset brukte vi egentlig følgende lemma.

- Mot slutten av beviset brukte vi egentlig følgende lemma.

Lemma

La $\mathcal{M}$ være en modell og φ en formel med høyst x fri.

- Mot slutten av beviset brukte vi egentlig følgende lemma.

Lemma

La $\mathcal{M}$ være en modell og φ en formel med høyst x fri. Anta at s og t er termer slik at $s^{\mathcal{M}} = t^{\mathcal{M}}$.

- Mot slutten av beviset brukte vi egentlig følgende lemma.

Lemma

La $\mathcal{M}$ være en modell og φ en formel med høyst x fri. Anta at s og t er termer slik at $s^{\mathcal{M}} = t^{\mathcal{M}}$. Da vil $\mathcal{M} \models \varphi[s/x]$ hvis og bare hvis $\mathcal{M} \models \varphi[t/x]$.

- Mot slutten av beviset brukte vi egentlig følgende lemma.

Lemma

La $\mathcal{M}$ være en modell og φ en formel med høyst x fri. Anta at s og t er termer slik at $s^{\mathcal{M}} = t^{\mathcal{M}}$. Da vil $\mathcal{M} \models \varphi[s/x]$ hvis og bare hvis $\mathcal{M} \models \varphi[t/x]$.

- Oppgave: bevis lemmaet. Hint: induksjon på φ.

Bevis for at L∃ bevarer falsifiserbarhet

Bevis for at L∃ bevarer falsifiserbarhet

$$\frac{\Gamma, \varphi[a/x] \ \vdash \Delta}{\Gamma, \exists x \varphi \ \vdash \Delta} \, \mathsf{L}\exists$$

a er en parameter som ikke forekommer i konklusjonen

Bevis for at L∃ bevarer falsifiserbarhet

$$\frac{\Gamma, \varphi[a/x] \ \vdash \Delta}{\Gamma, \exists x \varphi \ \vdash \Delta} \text{L}\exists$$

a er en parameter som ikke forekommer i konklusjonen

- Anta at modellen $\mathcal{M}$ falsifiserer konklusjonen $\Gamma, \exists x \varphi \vdash \Delta$.

Bevis for at L∃ bevarer falsifiserbarhet

$$\frac{\Gamma, \varphi[a/x] \ \vdash \Delta}{\Gamma, \exists x \varphi \ \vdash \Delta} \text{L}\exists$$

a er en parameter som ikke forekommer i konklusjonen

- Anta at modellen $\mathcal{M}$ falsifiserer konklusjonen $\Gamma, \exists x \varphi \vdash \Delta$.
- $\mathcal{M}$ gjør alle formlene i $\Gamma \cup \{\exists x \varphi\}$ sanne og alle formlene i Δ usanne.

Bevis for at L∃ bevarer falsifiserbarhet

$$\frac{\Gamma, \varphi[a/x] \ \vdash \Delta}{\Gamma, \exists x \varphi \ \vdash \Delta} \text{L}\exists$$

a er en parameter som ikke forekommer i konklusjonen

- Anta at modellen $\mathcal{M}$ falsifiserer konklusjonen $\Gamma, \exists x \varphi \vdash \Delta$.
- $\mathcal{M}$ gjør alle formlene i $\Gamma \cup \{\exists x \varphi\}$ sanne og alle formlene i Δ usanne.
- Vi må finne en modell som falsifiserer premisset.

Bevis for at L∃ bevarer falsifiserbarhet

$$\frac{\Gamma, \varphi[a/x] \ \vdash \Delta}{\Gamma, \exists x \varphi \ \vdash \Delta} \text{L}\exists$$

a er en parameter som ikke forekommer i konklusjonen

- Anta at modellen $\mathcal{M}$ falsifiserer konklusjonen $\Gamma, \exists x \varphi \vdash \Delta$.
- $\mathcal{M}$ gjør alle formlene i $\Gamma \cup \{\exists x \varphi\}$ sanne og alle formlene i Δ usanne.
- Vi må finne en modell som falsifiserer premisset.
- Men, vi kan ikke uten videre anta at $\mathcal{M} \models \varphi[a/x]$.

Bevis for at L∃ bevarer falsifiserbarhet

$$\frac{\Gamma, \varphi[a/x] \ \vdash \Delta}{\Gamma, \exists x\varphi \ \vdash \Delta} \text{L}\exists$$

a er en parameter som ikke forekommer i konklusjonen

- Anta at modellen $\mathcal{M}$ falsifiserer konklusjonen $\Gamma, \exists x\varphi \vdash \Delta$.
- $\mathcal{M}$ gjør alle formlene i $\Gamma \cup \{\exists x\varphi\}$ sanne og alle formlene i Δ usanne.
- Vi må finne en modell som falsifiserer premisset.
- Men, vi kan ikke uten videre anta at $\mathcal{M} \models \varphi[a/x]$.
- Siden $\mathcal{M} \models \exists x\varphi$ har vi at $\mathcal{M} \models \varphi[\bar{d}/x]$ for en $d \in |\mathcal{M}|$.

Bevis for at L∃ bevarer falsifiserbarhet

$$\frac{\Gamma, \varphi[a/x] \ \vdash \Delta}{\Gamma, \exists x\varphi \ \vdash \Delta}\,\mathsf{L}\exists$$

a er en parameter som ikke forekommer i konklusjonen

- Anta at modellen $\mathcal{M}$ falsifiserer konklusjonen $\Gamma, \exists x\varphi \vdash \Delta$.
- $\mathcal{M}$ gjør alle formlene i $\Gamma \cup \{\exists x\varphi\}$ sanne og alle formlene i Δ usanne.
- Vi må finne en modell som falsifiserer premisset.
- Men, vi kan ikke uten videre anta at $\mathcal{M} \models \varphi[a/x]$.
- Siden $\mathcal{M} \models \exists x\varphi$ har vi at $\mathcal{M} \models \varphi[\bar{d}/x]$ for en $d \in |\mathcal{M}|$.
- Fra modellen $\mathcal{M}$ lager vi en ny modell $\mathcal{M}'$ på følgende måte:

Bevis for at L∃ bevarer falsifiserbarhet

$$\frac{\Gamma, \varphi[a/x] \ \vdash \Delta}{\Gamma, \exists x \varphi \ \vdash \Delta}\ \mathsf{L}\exists$$

a er en parameter som ikke forekommer i konklusjonen

- Anta at modellen $\mathcal{M}$ falsifiserer konklusjonen $\Gamma, \exists x \varphi \vdash \Delta$.
- $\mathcal{M}$ gjør alle formlene i $\Gamma \cup \{\exists x \varphi\}$ sanne og alle formlene i Δ usanne.
- Vi må finne en modell som falsifiserer premisset.
- Men, vi kan ikke uten videre anta at $\mathcal{M} \models \varphi[a/x]$.
- Siden $\mathcal{M} \models \exists x \varphi$ har vi at $\mathcal{M} \models \varphi[\bar{d}/x]$ for en $d \in |\mathcal{M}|$.
- Fra modellen $\mathcal{M}$ lager vi en ny modell $\mathcal{M}'$ på følgende måte:
  - $\mathcal{M}'$ skal være helt lik $\mathcal{M}$ bortsett fra når det gjelder tolkningen av a.

Bevis for at L∃ bevarer falsifiserbarhet

$$\frac{\Gamma, \varphi[a/x] \ \vdash \Delta}{\Gamma, \exists x\varphi \ \vdash \Delta}\,\mathsf{L}\exists$$

a er en parameter som ikke forekommer i konklusjonen

- Anta at modellen $\mathcal{M}$ falsifiserer konklusjonen $\Gamma, \exists x\varphi \vdash \Delta$.
- $\mathcal{M}$ gjør alle formlene i $\Gamma \cup \{\exists x\varphi\}$ sanne og alle formlene i Δ usanne.
- Vi må finne en modell som falsifiserer premisset.
- Men, vi kan ikke uten videre anta at $\mathcal{M} \models \varphi[a/x]$.
- Siden $\mathcal{M} \models \exists x\varphi$ har vi at $\mathcal{M} \models \varphi[\bar{d}/x]$ for en $d \in |\mathcal{M}|$.
- Fra modellen $\mathcal{M}$ lager vi en ny modell $\mathcal{M}'$ på følgende måte:
  - $\mathcal{M}'$ skal være helt lik $\mathcal{M}$ bortsett fra når det gjelder tolkningen av a.
  - Parameteren a skal tolkes som elementet d, dvs. $a^{\mathcal{M}'} = d$.

Bevis for at L∃ bevarer falsifiserbarhet

$$\frac{\Gamma, \varphi[a/x] \ \vdash \Delta}{\Gamma, \exists x \varphi \ \vdash \Delta} \text{L}\exists$$

a er en parameter som ikke forekommer i konklusjonen

- Anta at modellen $\mathcal{M}$ falsifiserer konklusjonen $\Gamma, \exists x \varphi \vdash \Delta$.
- $\mathcal{M}$ gjør alle formlene i $\Gamma \cup \{\exists x \varphi\}$ sanne og alle formlene i Δ usanne.
- Vi må finne en modell som falsifiserer premisset.
- Men, vi kan ikke uten videre anta at $\mathcal{M} \models \varphi[a/x]$.
- Siden $\mathcal{M} \models \exists x \varphi$ har vi at $\mathcal{M} \models \varphi[\bar{d}/x]$ for en $d \in |\mathcal{M}|$.
- Fra modellen $\mathcal{M}$ lager vi en ny modell $\mathcal{M}'$ på følgende måte:
  - $\mathcal{M}'$ skal være helt lik $\mathcal{M}$ bortsett fra når det gjelder tolkningen av a.
  - Parameteren a skal tolkes som elementet d, dvs. $a^{\mathcal{M}'} = d$.
- Vi konkluderer med at $\mathcal{M}'$ falsifiserer premisset:

Bevis for at L∃ bevarer falsifiserbarhet

$$\frac{\Gamma, \varphi[a/x] \ \vdash \Delta}{\Gamma, \exists x \varphi \ \vdash \Delta}\ \mathrm{L}\exists$$

a er en parameter som ikke forekommer i konklusjonen

- Anta at modellen $\mathcal{M}$ falsifiserer konklusjonen $\Gamma, \exists x \varphi \vdash \Delta$.
- $\mathcal{M}$ gjør alle formlene i $\Gamma \cup \{\exists x \varphi\}$ sanne og alle formlene i Δ usanne.
- Vi må finne en modell som falsifiserer premisset.
- Men, vi kan ikke uten videre anta at $\mathcal{M} \models \varphi[a/x]$.
- Siden $\mathcal{M} \models \exists x \varphi$ har vi at $\mathcal{M} \models \varphi[\bar{d}/x]$ for en $d \in |\mathcal{M}|$.
- Fra modellen $\mathcal{M}$ lager vi en ny modell $\mathcal{M}'$ på følgende måte:
  - $\mathcal{M}'$ skal være helt lik $\mathcal{M}$ bortsett fra når det gjelder tolkningen av a.
  - Parameteren a skal tolkes som elementet d, dvs. $a^{\mathcal{M}'} = d$.
- Vi konkluderer med at $\mathcal{M}'$ falsifiserer premisset:
  - Siden a ikke forekommer i konklusjonen, så må $\mathcal{M}'$ og $\mathcal{M}$ tolke formlene i Γ og Δ likt.

Bevis for at L∃ bevarer falsifiserbarhet

$$\frac{\Gamma, \varphi[a/x] \ \vdash \Delta}{\Gamma, \exists x \varphi \ \vdash \Delta} \text{L}\exists$$

a er en parameter som ikke forekommer i konklusjonen

- Anta at modellen $\mathcal{M}$ falsifiserer konklusjonen $\Gamma, \exists x \varphi \vdash \Delta$.
- $\mathcal{M}$ gjør alle formlene i $\Gamma \cup \{\exists x \varphi\}$ sanne og alle formlene i Δ usanne.
- Vi må finne en modell som falsifiserer premisset.
- Men, vi kan ikke uten videre anta at $\mathcal{M} \models \varphi[a/x]$.
- Siden $\mathcal{M} \models \exists x \varphi$ har vi at $\mathcal{M} \models \varphi[\bar{d}/x]$ for en $d \in |\mathcal{M}|$.
- Fra modellen $\mathcal{M}$ lager vi en ny modell $\mathcal{M}'$ på følgende måte:
  - $\mathcal{M}'$ skal være helt lik $\mathcal{M}$ bortsett fra når det gjelder tolkningen av a.
  - Parameteren a skal tolkes som elementet d, dvs. $a^{\mathcal{M}'} = d$.
- Vi konkluderer med at $\mathcal{M}'$ falsifiserer premisset:
  - Siden a ikke forekommer i konklusjonen, så må $\mathcal{M}'$ og $\mathcal{M}$ tolke formlene i Γ og Δ likt. $\mathcal{M}'$ gjør derfor alle formlene i Γ sanne og alle formlene i Δ usanne.

Bevis for at L$\exists$ bevarer falsifiserbarhet

$$\frac{\Gamma, \varphi[a/x] \ \vdash \Delta}{\Gamma, \exists x\varphi \ \vdash \Delta} \text{L}\exists$$

a er en parameter som ikke forekommer i konklusjonen

- Anta at modellen $\mathcal{M}$ falsifiserer konklusjonen $\Gamma, \exists x\varphi \vdash \Delta$.
- $\mathcal{M}$ gjør alle formlene i $\Gamma \cup \{\exists x\varphi\}$ sanne og alle formlene i Δ usanne.
- Vi må finne en modell som falsifiserer premisset.
- Men, vi kan ikke uten videre anta at $\mathcal{M} \models \varphi[a/x]$.
- Siden $\mathcal{M} \models \exists x\varphi$ har vi at $\mathcal{M} \models \varphi[\bar{d}/x]$ for en $d \in |\mathcal{M}|$.
- Fra modellen $\mathcal{M}$ lager vi en ny modell $\mathcal{M}'$ på følgende måte:
  - $\mathcal{M}'$ skal være helt lik $\mathcal{M}$ bortsett fra når det gjelder tolkningen av a.
  - Parameteren a skal tolkes som elementet d, dvs. $a^{\mathcal{M}'} = d$.
- Vi konkluderer med at $\mathcal{M}'$ falsifiserer premisset:
  - Siden a ikke forekommer i konklusjonen, så må $\mathcal{M}'$ og $\mathcal{M}$ tolke formlene i Γ og Δ likt. $\mathcal{M}'$ gjør derfor alle formlene i Γ sanne og alle formlene i Δ usanne.
  - Siden a og $\bar{d}$ må tolkes likt (som elementet d), må $\mathcal{M}' \models \varphi[a/x]$.

Et eksempel

Et eksempel

- Anta at $\mathcal{M}$ er en modell med domene $\{1, 2\}$ slik at $P^{\mathcal{M}} = \{2\}$.

Et eksempel

- Anta at $\mathcal{M}$ er en modell med domene $\{1, 2\}$ slik at $P^{\mathcal{M}} = \{2\}$.
- Anta at a og b er parametre slik at $a^{\mathcal{M}} = b^{\mathcal{M}} = 1$.

Et eksempel

- Anta at $\mathcal{M}$ er en modell med domene $\{1, 2\}$ slik at $P^{\mathcal{M}} = \{2\}$.
- Anta at a og b er parametre slik at $a^{\mathcal{M}} = b^{\mathcal{M}} = 1$.
- Da vil $\mathcal{M} \not\models Pa$ og $\mathcal{M} \not\models Pb$.

Et eksempel

- Anta at $\mathcal{M}$ er en modell med domene $\{1, 2\}$ slik at $P^{\mathcal{M}} = \{2\}$.
- Anta at a og b er parametre slik at $a^{\mathcal{M}} = b^{\mathcal{M}} = 1$.
- Da vil $\mathcal{M} \not\models Pa$ og $\mathcal{M} \not\models Pb$.

$$\exists x Px \vdash Pa$$

Et eksempel

- Anta at $\mathcal{M}$ er en modell med domene $\{1, 2\}$ slik at $P^{\mathcal{M}} = \{2\}$.
- Anta at a og b er parametre slik at $a^{\mathcal{M}} = b^{\mathcal{M}} = 1$.
- Da vil $\mathcal{M} \not\models Pa$ og $\mathcal{M} \not\models Pb$.

$$\exists x P x \vdash Pa$$

- Vi har at $\mathcal{M}$ falsifiserer konklusjonen:

Et eksempel

- Anta at $\mathcal{M}$ er en modell med domene $\{1, 2\}$ slik at $P^{\mathcal{M}} = \{2\}$.
- Anta at a og b er parametre slik at $a^{\mathcal{M}} = b^{\mathcal{M}} = 1$.
- Da vil $\mathcal{M} \not\models Pa$ og $\mathcal{M} \not\models Pb$.

$$\exists x Px \vdash Pa$$

- Vi har at $\mathcal{M}$ falsifiserer konklusjonen:
  $\mathcal{M} \models \exists x Px$, siden $\mathcal{M} \models P\overline{2}$.

Et eksempel

- Anta at $\mathcal{M}$ er en modell med domene $\{1,2\}$ slik at $P^{\mathcal{M}} = \{2\}$.
- Anta at a og b er parametre slik at $a^{\mathcal{M}} = b^{\mathcal{M}} = 1$.
- Da vil $\mathcal{M} \not\models Pa$ og $\mathcal{M} \not\models Pb$.

$$\exists x Px \vdash Pa$$

- Vi har at $\mathcal{M}$ falsifiserer konklusjonen:
  $\mathcal{M} \models \exists x Px$, siden $\mathcal{M} \models P\bar{2}$.
  $\mathcal{M} \not\models Pa$.

Et eksempel

- Anta at $\mathcal{M}$ er en modell med domene $\{1, 2\}$ slik at $P^{\mathcal{M}} = \{2\}$.
- Anta at a og b er parametre slik at $a^{\mathcal{M}} = b^{\mathcal{M}} = 1$.
- Da vil $\mathcal{M} \not\models Pa$ og $\mathcal{M} \not\models Pb$.

$$\frac{Pb \vdash Pa}{\exists x Px \vdash Pa}$$

- Vi har at $\mathcal{M}$ falsifiserer konklusjonen:

  $\mathcal{M} \models \exists x Px$, siden $\mathcal{M} \models P\overline{2}$.

  $\mathcal{M} \not\models Pa$.

Et eksempel

- Anta at $\mathcal{M}$ er en modell med domene $\{1, 2\}$ slik at $P^{\mathcal{M}} = \{2\}$.
- Anta at a og b er parametre slik at $a^{\mathcal{M}} = b^{\mathcal{M}} = 1$.
- Da vil $\mathcal{M} \not\models Pa$ og $\mathcal{M} \not\models Pb$.

$$\frac{Pb \vdash Pa}{\exists x Px \vdash Pa}$$

- Vi har at $\mathcal{M}$ falsifiserer konklusjonen:

  $\mathcal{M} \models \exists x Px$, siden $\mathcal{M} \models P\bar{2}$.

  $\mathcal{M} \not\models Pa$.
- Men, $\mathcal{M}$ falsifiserer ikke premisset, siden $\mathcal{M} \not\models Pb$.

Et eksempel

- Anta at $\mathcal{M}$ er en modell med domene $\{1, 2\}$ slik at $P^{\mathcal{M}} = \{2\}$.
- Anta at a og b er parametre slik at $a^{\mathcal{M}} = b^{\mathcal{M}} = 1$.
- Da vil $\mathcal{M} \not\models Pa$ og $\mathcal{M} \not\models Pb$.

$$\frac{Pb \vdash Pa}{\exists x Px \vdash Pa}$$

- Vi har at $\mathcal{M}$ falsifiserer konklusjonen:
  $\mathcal{M} \models \exists x Px$, siden $\mathcal{M} \models P\overline{2}$.
  $\mathcal{M} \not\models Pa$.
- Men, $\mathcal{M}$ falsifiserer ikke premisset, siden $\mathcal{M} \not\models Pb$.
- Vi lager en ny modell $\mathcal{M}'$ som er slik at $b^{\mathcal{M}'} = 2$.

Et eksempel

- Anta at $\mathcal{M}$ er en modell med domene $\{1, 2\}$ slik at $P^{\mathcal{M}} = \{2\}$.
- Anta at a og b er parametre slik at $a^{\mathcal{M}} = b^{\mathcal{M}} = 1$.
- Da vil $\mathcal{M} \not\models Pa$ og $\mathcal{M} \not\models Pb$.

$$\frac{Pb \vdash Pa}{\exists x Px \vdash Pa}$$

- Vi har at $\mathcal{M}$ falsifiserer konklusjonen:
  $\mathcal{M} \models \exists x Px$, siden $\mathcal{M} \models P\bar{2}$.
  $\mathcal{M} \not\models Pa$.
- Men, $\mathcal{M}$ falsifiserer ikke premisset, siden $\mathcal{M} \not\models Pb$.
- Vi lager en ny modell $\mathcal{M}'$ som er slik at $b^{\mathcal{M}'} = 2$.
- Da vil $\mathcal{M}'$ falsifiserer premisset.

Bevis for at R∃ bevarer falsifiserbarhet

Bevis for at R∃ bevarer falsifiserbarhet

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, \exists x\varphi, \varphi[t/x]}{\Gamma \vdash \Delta, \exists x\varphi}\ \mathrm{R}\exists \qquad t \text{ er en lukket term}$$

Bevis for at R∃ bevarer falsifiserbarhet

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, \exists x \varphi, \varphi[t/x]}{\Gamma \vdash \Delta, \exists x \varphi}\,\mathrm{R}\exists \qquad t \text{ er en lukket term}$$

- Anta at modellen $\mathcal{M}$ falsifiserer konklusjonen $\Gamma \vdash \exists x \varphi, \Delta$.

Bevis for at R∃ bevarer falsifiserbarhet

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, \exists x\varphi, \varphi[t/x]}{\Gamma \vdash \Delta, \exists x\varphi}\,\text{R}\exists \qquad t \text{ er en lukket term}$$

- Anta at modellen $\mathcal{M}$ falsifiserer konklusjonen $\Gamma \vdash \exists x\varphi, \Delta$.
- $\mathcal{M}$ gjør alle formlene i Γ sanne og alle formlene i $\Delta \cup \{\exists x\varphi\}$ usanne.

Bevis for at R∃ bevarer falsifiserbarhet

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, \exists x\varphi, \varphi[t/x]}{\Gamma \vdash \Delta, \exists x\varphi} \, \mathrm{R}\exists \qquad t \text{ er en lukket term}$$

- Anta at modellen $\mathcal{M}$ falsifiserer konklusjonen $\Gamma \vdash \exists x\varphi, \Delta$.
- $\mathcal{M}$ gjør alle formlene i Γ sanne og alle formlene i $\Delta \cup \{\exists x\varphi\}$ usanne.
- Det holder å vise at $\mathcal{M} \not\models \varphi[t/x]$.

Bevis for at R∃ bevarer falsifiserbarhet

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, \exists x\varphi, \varphi[t/x]}{\Gamma \vdash \Delta, \exists x\varphi}\,\mathsf{R}\exists \qquad t \text{ er en lukket term}$$

- Anta at modellen $\mathcal{M}$ falsifiserer konklusjonen $\Gamma \vdash \exists x\varphi, \Delta$.
- $\mathcal{M}$ gjør alle formlene i Γ sanne og alle formlene i $\Delta \cup \{\exists x\varphi\}$ usanne.
- Det holder å vise at $\mathcal{M} \not\models \varphi[t/x]$. Da er premisset falsifisert av $\mathcal{M}$.

Bevis for at R∃ bevarer falsifiserbarhet

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, \exists x\varphi, \varphi[t/x]}{\Gamma \vdash \Delta, \exists x\varphi}\ \mathrm{R}\exists \qquad t \text{ er en lukket term}$$

- Anta at modellen $\mathcal{M}$ falsifiserer konklusjonen $\Gamma \vdash \exists x\varphi, \Delta$.
- $\mathcal{M}$ gjør alle formlene i Γ sanne og alle formlene i $\Delta \cup \{\exists x\varphi\}$ usanne.
- Det holder å vise at $\mathcal{M} \not\models \varphi[t/x]$. Da er premisset falsifisert av $\mathcal{M}$.
- Anta at $t^{\mathcal{M}} = e$, hvor $e \in |\mathcal{M}|$.

Bevis for at R∃ bevarer falsifiserbarhet

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, \exists x\varphi, \varphi[t/x]}{\Gamma \vdash \Delta, \exists x\varphi}\ \mathrm{R}\exists \qquad t \text{ er en lukket term}$$

- Anta at modellen $\mathcal{M}$ falsifiserer konklusjonen $\Gamma \vdash \exists x\varphi, \Delta$.
- $\mathcal{M}$ gjør alle formlene i Γ sanne og alle formlene i $\Delta \cup \{\exists x\varphi\}$ usanne.
- Det holder å vise at $\mathcal{M} \not\models \varphi[t/x]$. Da er premisset falsifisert av $\mathcal{M}$.
- Anta at $t^{\mathcal{M}} = e$, hvor $e \in |\mathcal{M}|$.
  (Her bruker vi definisjonen av modell og at t er en lukket term.)

Bevis for at R$\exists$ bevarer falsifiserbarhet

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, \exists x\varphi, \varphi[t/x]}{\Gamma \vdash \Delta, \exists x\varphi}\ \mathsf{R}\exists \qquad t \text{ er en lukket term}$$

- Anta at modellen $\mathcal{M}$ falsifiserer konklusjonen $\Gamma \vdash \exists x\varphi, \Delta$.
- $\mathcal{M}$ gjør alle formlene i Γ sanne og alle formlene i $\Delta \cup \{\exists x\varphi\}$ usanne.
- Det holder å vise at $\mathcal{M} \not\models \varphi[t/x]$. Da er premisset falsifisert av $\mathcal{M}$.
- Anta at $t^{\mathcal{M}} = e$, hvor $e \in |\mathcal{M}|$.
  (Her bruker vi definisjonen av modell og at t er en lukket term.)
- Siden $\mathcal{M} \not\models \exists x\varphi$ fins det ikke noen $d \in |\mathcal{M}|$ slik at $\mathcal{M} \models \varphi[\bar{d}/x]$.

Bevis for at R$\exists$ bevarer falsifiserbarhet

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, \exists x\varphi, \varphi[t/x]}{\Gamma \vdash \Delta, \exists x\varphi}\,\mathsf{R}\exists \qquad t \text{ er en lukket term}$$

- Anta at modellen $\mathcal{M}$ falsifiserer konklusjonen $\Gamma \vdash \exists x\varphi, \Delta$.
- $\mathcal{M}$ gjør alle formlene i Γ sanne og alle formlene i $\Delta \cup \{\exists x\varphi\}$ usanne.
- Det holder å vise at $\mathcal{M} \not\models \varphi[t/x]$. Da er premisset falsifisert av $\mathcal{M}$.
- Anta at $t^{\mathcal{M}} = e$, hvor $e \in |\mathcal{M}|$.
  (Her bruker vi definisjonen av modell og at t er en lukket term.)
- Siden $\mathcal{M} \not\models \exists x\varphi$ fins det ikke noen $d \in |\mathcal{M}|$ slik at $\mathcal{M} \models \varphi[\bar{d}/x]$.
  (Her bruker vi definisjonen av oppfyllbarhet.)

Bevis for at R$\exists$ bevarer falsifiserbarhet

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, \exists x\varphi, \varphi[t/x]}{\Gamma \vdash \Delta, \exists x\varphi} \text{R}\exists \qquad t \text{ er en lukket term}$$

- Anta at modellen $\mathcal{M}$ falsifiserer konklusjonen $\Gamma \vdash \exists x\varphi, \Delta$.
- $\mathcal{M}$ gjør alle formlene i Γ sanne og alle formlene i $\Delta \cup \{\exists x\varphi\}$ usanne.
- Det holder å vise at $\mathcal{M} \not\models \varphi[t/x]$. Da er premisset falsifisert av $\mathcal{M}$.
- Anta at $t^{\mathcal{M}} = e$, hvor $e \in |\mathcal{M}|$.
  (Her bruker vi definisjonen av modell og at t er en lukket term.)
- Siden $\mathcal{M} \not\models \exists x\varphi$ fins det ikke noen $d \in |\mathcal{M}|$ slik at $\mathcal{M} \models \varphi[\bar{d}/x]$.
  (Her bruker vi definisjonen av oppfyllbarhet.)
- Spesielt har vi at $\mathcal{M} \not\models \varphi[\bar{e}/x]$.

Bevis for at R∃ bevarer falsifiserbarhet

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, \exists x\varphi, \varphi[t/x]}{\Gamma \vdash \Delta, \exists x\varphi}\ \mathrm{R}\exists \qquad t \text{ er en lukket term}$$

- Anta at modellen $\mathcal{M}$ falsifiserer konklusjonen $\Gamma \vdash \exists x\varphi, \Delta$.
- $\mathcal{M}$ gjør alle formlene i Γ sanne og alle formlene i $\Delta \cup \{\exists x\varphi\}$ usanne.
- Det holder å vise at $\mathcal{M} \not\models \varphi[t/x]$. Da er premisset falsifisert av $\mathcal{M}$.
- Anta at $t^{\mathcal{M}} = e$, hvor $e \in |\mathcal{M}|$.
  (Her bruker vi definisjonen av modell og at t er en lukket term.)
- Siden $\mathcal{M} \not\models \exists x\varphi$ fins det ikke noen $d \in |\mathcal{M}|$ slik at $\mathcal{M} \models \varphi[\bar{d}/x]$.
  (Her bruker vi definisjonen av oppfyllbarhet.)
- Spesielt har vi at $\mathcal{M} \not\models \varphi[\bar{e}/x]$.
- t og $\bar{e}$ må tolkes likt (som elementet e).

Bevis for at R∃ bevarer falsifiserbarhet

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, \exists x\varphi, \varphi[t/x]}{\Gamma \vdash \Delta, \exists x\varphi}\ \mathrm{R}\exists \qquad t \text{ er en lukket term}$$

- Anta at modellen $\mathcal{M}$ falsifiserer konklusjonen $\Gamma \vdash \exists x\varphi, \Delta$.
- $\mathcal{M}$ gjør alle formlene i Γ sanne og alle formlene i $\Delta \cup \{\exists x\varphi\}$ usanne.
- Det holder å vise at $\mathcal{M} \not\models \varphi[t/x]$. Da er premisset falsifisert av $\mathcal{M}$.
- Anta at $t^{\mathcal{M}} = e$, hvor $e \in |\mathcal{M}|$.
  (Her bruker vi definisjonen av modell og at t er en lukket term.)
- Siden $\mathcal{M} \not\models \exists x\varphi$ fins det ikke noen $d \in |\mathcal{M}|$ slik at $\mathcal{M} \models \varphi[\bar{d}/x]$.
  (Her bruker vi definisjonen av oppfyllbarhet.)
- Spesielt har vi at $\mathcal{M} \not\models \varphi[\bar{e}/x]$.
- t og $\bar{e}$ må tolkes likt (som elementet e). Derfor har vi $\mathcal{M} \not\models \varphi[t/x]$.

Bevis for at R∀ bevarer falsifiserbarhet

Bevis for at R∀ bevarer falsifiserbarhet

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, \varphi[a/x]}{\Gamma \vdash \Delta, \forall x \varphi}\,\mathrm{R}\forall$$

a er en parameter som ikke forekommer i konklusjonen

Bevis for at R∀ bevarer falsifiserbarhet

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, \varphi[a/x]}{\Gamma \vdash \Delta, \forall x \varphi} \text{R}\forall$$

a er en parameter som ikke forekommer i konklusjonen

- Anta at modellen $\mathcal{M}$ falsifiserer konklusjonen $\Gamma \vdash \Delta, \forall x \varphi$.

Bevis for at R$\forall$ bevarer falsifiserbarhet

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, \varphi[a/x]}{\Gamma \vdash \Delta, \forall x \varphi}\,\mathrm{R}\forall$$

a er en parameter som ikke forekommer i konklusjonen

- Anta at modellen $\mathcal{M}$ falsifiserer konklusjonen $\Gamma \vdash \Delta, \forall x \varphi$.
- $\mathcal{M}$ gjør alle formlene i Γ sanne og alle formlene i $\Delta \cup \{\forall x \varphi\}$ usanne.

Bevis for at R∀ bevarer falsifiserbarhet

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, \varphi[a/x]}{\Gamma \vdash \Delta, \forall x \varphi}\,\mathrm{R}\forall$$

a er en parameter som ikke forekommer i konklusjonen

- Anta at modellen $\mathcal{M}$ falsifiserer konklusjonen $\Gamma \vdash \Delta, \forall x \varphi$.
- $\mathcal{M}$ gjør alle formlene i Γ sanne og alle formlene i $\Delta \cup \{\forall x \varphi\}$ usanne.
- Vi må finne en modell som falsifiserer premisset.

Bevis for at R∀ bevarer falsifiserbarhet

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, \varphi[a/x]}{\Gamma \vdash \Delta, \forall x \varphi}\,\mathrm{R}\forall$$

a er en parameter som ikke forekommer i konklusjonen

- Anta at modellen $\mathcal{M}$ falsifiserer konklusjonen $\Gamma \vdash \Delta, \forall x \varphi$.
- $\mathcal{M}$ gjør alle formlene i Γ sanne og alle formlene i $\Delta \cup \{\forall x \varphi\}$ usanne.
- Vi må finne en modell som falsifiserer premisset.
- Men, vi kan ikke uten videre anta at $\mathcal{M} \not\models \varphi[a/x]$.

Bevis for at R$\forall$ bevarer falsifiserbarhet

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, \varphi[a/x]}{\Gamma \vdash \Delta, \forall x \varphi}\ \mathrm{R}\forall$$

a er en parameter som ikke forekommer i konklusjonen

- Anta at modellen $\mathcal{M}$ falsifiserer konklusjonen $\Gamma \vdash \Delta, \forall x \varphi$.
- $\mathcal{M}$ gjør alle formlene i Γ sanne og alle formlene i $\Delta \cup \{\forall x \varphi\}$ usanne.
- Vi må finne en modell som falsifiserer premisset.
- Men, vi kan ikke uten videre anta at $\mathcal{M} \not\models \varphi[a/x]$.
- Siden $\mathcal{M} \not\models \forall x \varphi$ har vi at $\mathcal{M} \not\models \varphi[\bar{d}/x]$ for en $d \in |\mathcal{M}|$.

Bevis for at R∀ bevarer falsifiserbarhet

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, \varphi[a/x]}{\Gamma \vdash \Delta, \forall x \varphi}\ \mathrm{R}\forall$$

a er en parameter som ikke forekommer i konklusjonen

- Anta at modellen $\mathcal{M}$ falsifiserer konklusjonen $\Gamma \vdash \Delta, \forall x\varphi$.
- $\mathcal{M}$ gjør alle formlene i Γ sanne og alle formlene i $\Delta \cup \{\forall x \varphi\}$ usanne.
- Vi må finne en modell som falsifiserer premisset.
- Men, vi kan ikke uten videre anta at $\mathcal{M} \not\models \varphi[a/x]$.
- Siden $\mathcal{M} \not\models \forall x\varphi$ har vi at $\mathcal{M} \not\models \varphi[\bar{d}/x]$ for en $d \in |\mathcal{M}|$.
- Fra modellen $\mathcal{M}$ lager vi en ny modell $\mathcal{M}'$ på følgende måte:

Bevis for at R$\forall$ bevarer falsifiserbarhet

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, \varphi[a/x]}{\Gamma \vdash \Delta, \forall x \varphi}\ \mathsf{R}\forall$$

a er en parameter som ikke forekommer i konklusjonen

- Anta at modellen $\mathcal{M}$ falsifiserer konklusjonen $\Gamma \vdash \Delta, \forall x \varphi$.
- $\mathcal{M}$ gjør alle formlene i Γ sanne og alle formlene i $\Delta \cup \{\forall x \varphi\}$ usanne.
- Vi må finne en modell som falsifiserer premisset.
- Men, vi kan ikke uten videre anta at $\mathcal{M} \not\models \varphi[a/x]$.
- Siden $\mathcal{M} \not\models \forall x \varphi$ har vi at $\mathcal{M} \not\models \varphi[\bar{d}/x]$ for en $d \in |\mathcal{M}|$.
- Fra modellen $\mathcal{M}$ lager vi en ny modell $\mathcal{M}'$ på følgende måte:
  - $\mathcal{M}'$ skal være helt lik $\mathcal{M}$ bortsett fra når det gjelder tolkningen av a.

Bevis for at R$\forall$ bevarer falsifiserbarhet

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, \varphi[a/x]}{\Gamma \vdash \Delta, \forall x \varphi}\,\mathrm{R}\forall$$

a er en parameter som ikke forekommer i konklusjonen

- Anta at modellen $\mathcal{M}$ falsifiserer konklusjonen $\Gamma \vdash \Delta, \forall x \varphi$.
- $\mathcal{M}$ gjør alle formlene i Γ sanne og alle formlene i $\Delta \cup \{\forall x \varphi\}$ usanne.
- Vi må finne en modell som falsifiserer premisset.
- Men, vi kan ikke uten videre anta at $\mathcal{M} \not\models \varphi[a/x]$.
- Siden $\mathcal{M} \not\models \forall x \varphi$ har vi at $\mathcal{M} \not\models \varphi[\bar{d}/x]$ for en $d \in |\mathcal{M}|$.
- Fra modellen $\mathcal{M}$ lager vi en ny modell $\mathcal{M}'$ på følgende måte:
  - $\mathcal{M}'$ skal være helt lik $\mathcal{M}$ bortsett fra når det gjelder tolkningen av a.
  - Parameteren a skal tolkes som elementet d, dvs. $a^{\mathcal{M}'} = d$.

Bevis for at R∀ bevarer falsifiserbarhet

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, \varphi[a/x]}{\Gamma \vdash \Delta, \forall x \varphi}\,\mathrm{R}\forall$$

a er en parameter som ikke forekommer i konklusjonen

- Anta at modellen $\mathcal{M}$ falsifiserer konklusjonen $\Gamma \vdash \Delta, \forall x \varphi$.
- $\mathcal{M}$ gjør alle formlene i Γ sanne og alle formlene i $\Delta \cup \{\forall x \varphi\}$ usanne.
- Vi må finne en modell som falsifiserer premisset.
- Men, vi kan ikke uten videre anta at $\mathcal{M} \not\models \varphi[a/x]$.
- Siden $\mathcal{M} \not\models \forall x \varphi$ har vi at $\mathcal{M} \not\models \varphi[\bar{d}/x]$ for en $d \in |\mathcal{M}|$.
- Fra modellen $\mathcal{M}$ lager vi en ny modell $\mathcal{M}'$ på følgende måte:
  - $\mathcal{M}'$ skal være helt lik $\mathcal{M}$ bortsett fra når det gjelder tolkningen av a.
  - Parameteren a skal tolkes som elementet d, dvs. $a^{\mathcal{M}'} = d$.
- Vi konkluderer med at $\mathcal{M}'$ falsifiserer premisset:

Bevis for at R∀ bevarer falsifiserbarhet

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, \varphi[a/x]}{\Gamma \vdash \Delta, \forall x\varphi}\,\mathrm{R}\forall$$

a er en parameter som ikke forekommer i konklusjonen

- Anta at modellen $\mathcal{M}$ falsifiserer konklusjonen $\Gamma \vdash \Delta, \forall x\varphi$.
- $\mathcal{M}$ gjør alle formlene i Γ sanne og alle formlene i $\Delta \cup \{\forall x\varphi\}$ usanne.
- Vi må finne en modell som falsifiserer premisset.
- Men, vi kan ikke uten videre anta at $\mathcal{M} \not\models \varphi[a/x]$.
- Siden $\mathcal{M} \not\models \forall x\varphi$ har vi at $\mathcal{M} \not\models \varphi[\bar{d}/x]$ for en $d \in |\mathcal{M}|$.
- Fra modellen $\mathcal{M}$ lager vi en ny modell $\mathcal{M}'$ på følgende måte:
  - $\mathcal{M}'$ skal være helt lik $\mathcal{M}$ bortsett fra når det gjelder tolkningen av a.
  - Parameteren a skal tolkes som elementet d, dvs. $a^{\mathcal{M}'} = d$.
- Vi konkluderer med at $\mathcal{M}'$ falsifiserer premisset:
  - Siden a ikke forekommer i konklusjonen, så må $\mathcal{M}'$ og $\mathcal{M}$ tolke formlene i Γ og Δ likt.

Bevis for at R$\forall$ bevarer falsifiserbarhet

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, \varphi[a/x]}{\Gamma \vdash \Delta, \forall x \varphi} \mathrm{R}\forall$$

a er en parameter som ikke forekommer i konklusjonen

- Anta at modellen $\mathcal{M}$ falsifiserer konklusjonen $\Gamma \vdash \Delta, \forall x \varphi$.
- $\mathcal{M}$ gjør alle formlene i Γ sanne og alle formlene i $\Delta \cup \{\forall x \varphi\}$ usanne.
- Vi må finne en modell som falsifiserer premisset.
- Men, vi kan ikke uten videre anta at $\mathcal{M} \not\models \varphi[a/x]$.
- Siden $\mathcal{M} \not\models \forall x \varphi$ har vi at $\mathcal{M} \not\models \varphi[\bar{d}/x]$ for en $d \in |\mathcal{M}|$.
- Fra modellen $\mathcal{M}$ lager vi en ny modell $\mathcal{M}'$ på følgende måte:
  - $\mathcal{M}'$ skal være helt lik $\mathcal{M}$ bortsett fra når det gjelder tolkningen av a.
  - Parameteren a skal tolkes som elementet d, dvs. $a^{\mathcal{M}'} = d$.
- Vi konkluderer med at $\mathcal{M}'$ falsifiserer premisset:
  - Siden a ikke forekommer i konklusjonen, så må $\mathcal{M}'$ og $\mathcal{M}$ tolke formlene i Γ og Δ likt. $\mathcal{M}'$ gjør derfor alle formlene i Γ sanne og alle formlene i Δ usanne.

Bevis for at R$\forall$ bevarer falsifiserbarhet

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, \varphi[a/x]}{\Gamma \vdash \Delta, \forall x \varphi}\, \mathrm{R}\forall$$

a er en parameter som ikke forekommer i konklusjonen

- Anta at modellen $\mathcal{M}$ falsifiserer konklusjonen $\Gamma \vdash \Delta, \forall x \varphi$.
- $\mathcal{M}$ gjør alle formlene i Γ sanne og alle formlene i $\Delta \cup \{\forall x \varphi\}$ usanne.
- Vi må finne en modell som falsifiserer premisset.
- Men, vi kan ikke uten videre anta at $\mathcal{M} \not\models \varphi[a/x]$.
- Siden $\mathcal{M} \not\models \forall x \varphi$ har vi at $\mathcal{M} \not\models \varphi[\bar{d}/x]$ for en $d \in |\mathcal{M}|$.
- Fra modellen $\mathcal{M}$ lager vi en ny modell $\mathcal{M}'$ på følgende måte:
  - $\mathcal{M}'$ skal være helt lik $\mathcal{M}$ bortsett fra når det gjelder tolkningen av a.
  - Parameteren a skal tolkes som elementet d, dvs. $a^{\mathcal{M}'} = d$.
- Vi konkluderer med at $\mathcal{M}'$ falsifiserer premisset:
  - Siden a ikke forekommer i konklusjonen, så må $\mathcal{M}'$ og $\mathcal{M}$ tolke formlene i Γ og Δ likt. $\mathcal{M}'$ gjør derfor alle formlene i Γ sanne og alle formlene i Δ usanne.
  - Siden a og $\bar{d}$ må tolkes likt (som elementet d), må $\mathcal{M}' \not\models \varphi[a/x]$.

Strukturen i beviset for sunnhet

Vi viser følgende lemmaer:

1. Alle LK-reglene bevarer falsifiserbarhet oppover.
2. En LK-utledning med falsifiserbar rotsekvent har minst én falsifiserbar løvsekvent.
3. Alle aksiomer er gyldige.

Til slutt vises sunnhetsteoremet ved hjelp av lemmaene.

Reglene bevarer falsifiserbarhet

Reglene bevarer falsifiserbarhet

Lemma

Hvis rotsekventen i en LK*-utledning* π *er falsifiserbar, så er minst én av løvsekventene i* π *falsifiserbar.*

Reglene bevarer falsifiserbarhet

Lemma

Hvis rotsekventen i en LK-*utledning* π *er falsifiserbar, så er minst én av løvsekventene i* π *falsifiserbar.*

- Beviset går likt som for utsagnslogikk ved strukturell induksjon på LK-utledningen π.

Reglene bevarer falsifiserbarhet

Lemma

Hvis rotsekventen i en LK*-utledning* π *er falsifiserbar, så er minst én av løvsekventene i* π *falsifiserbar.*

- Beviset går likt som for utsagnslogikk ved strukturell induksjon på LK-utledningen π.
- Basissteget (π er en sekvent $\Gamma \vdash \Delta$) er trivielt, siden eneste sekvent $\Gamma \vdash \Delta$ er både rot- og løvsekvent.

Reglene bevarer falsifiserbarhet

Lemma

Hvis rotsekventen i en LK*-utledning* π *er falsifiserbar, så er minst én av løvsekventene i* π *falsifiserbar.*

- Beviset går likt som for utsagnslogikk ved strukturell induksjon på LK-utledningen π.
- Basissteget (π er en sekvent $\Gamma \vdash \Delta$) er trivielt, siden eneste sekvent $\Gamma \vdash \Delta$ er både rot- og løvsekvent.
- To induksjonssteg: ettpremiss- og topremissutvidelse.

Reglene bevarer falsifiserbarhet

Lemma

Hvis rotsekventen i en LK-*utledning* π *er falsifiserbar, så er minst én av løvsekventene i* π *falsifiserbar.*

- Beviset går likt som for utsagnslogikk ved strukturell induksjon på LK-utledningen π.
- Basissteget (π er en sekvent $\Gamma \vdash \Delta$) er trivielt, siden eneste sekvent $\Gamma \vdash \Delta$ er både rot- og løvsekvent.
- To induksjonssteg: ettpremiss- og topremissutvidelse.
- Begge bruker lemmaet om falsifiserbarhetsbevaring (oppover).

Strukturen i beviset for sunnhet

Vi viser følgende lemmaer:

1. Alle LK-reglene bevarer falsifiserbarhet oppover.
2. En LK-utledning med falsifiserbar rotsekvent har minst én falsifiserbar løvsekvent.
3. Alle aksiomer er gyldige.

Til slutt vises sunnhetsteoremet ved hjelp av lemmaene.

Alle aksiomer er gyldige

Alle aksiomer er gyldige

Lemma

Alle aksiomer er gyldige.

Alle aksiomer er gyldige

Lemma

Alle aksiomer er gyldige.

- Beviset går likt som for utsagnslogikk.

Alle aksiomer er gyldige

Lemma

Alle aksiomer er gyldige.

- Beviset går likt som for utsagnslogikk.
- Et aksiom er på formen:

$$\Gamma, P(s_1, \ldots, s_n) \vdash P(t_1, \ldots, t_n), \Delta$$

slik at termene s_i og t_i er like for $1 \leq i \leq n$.

Alle aksiomer er gyldige

Lemma

Alle aksiomer er gyldige.

- Beviset går likt som for utsagnslogikk.
- Et aksiom er på formen:

$$\Gamma, P(s_1, \ldots, s_n) \vdash P(t_1, \ldots, t_n), \Delta$$

  slik at termene s_i og t_i er like for $1 \leq i \leq n$.
- Enhver modell som oppfyller antecedenten må oppfylle $P(s_1, \ldots, s_n)$.

Alle aksiomer er gyldige

Lemma

Alle aksiomer er gyldige.

- Beviset går likt som for utsagnslogikk.
- Et aksiom er på formen:

$$\Gamma, P(s_1, \dots, s_n) \vdash P(t_1, \dots, t_n), \Delta$$

  slik at termene s_i og t_i er like for $1 \leq i \leq n$.
- Enhver modell som oppfyller antecedenten må oppfylle $P(s_1, \dots, s_n)$.
- Dermed oppfylles en formel i succedenten, $P(t_1, \dots, t_n)$.

Sunnhetsbeviset

Sunnhetsbeviset

Teorem (Sunnhet)

Sekventkalkylen LK *for førsteordens logikk er sunn.*

Sunnhetsbeviset

Teorem (Sunnhet)

Sekventkalkylen LK *for førsteordens logikk er sunn.*

Bevis.

□

Sunnhetsbeviset

Teorem (Sunnhet)

Sekventkalkylen LK *for førsteordens logikk er sunn.*

Bevis.

- Anta at $\Gamma \vdash \Delta$ er LK-bevisbar.

□

Sunnhetsbeviset

Teorem (Sunnhet)

Sekventkalkylen LK *for førsteordens logikk er sunn.*

Bevis.

- Anta at $\Gamma \vdash \Delta$ er LK-bevisbar.
- La π være et LK-bevis med rotsekvent $\Gamma \vdash \Delta$.

$\square$

Sunnhetsbeviset

Teorem (Sunnhet)

Sekventkalkylen LK *for førsteordens logikk er sunn.*

Bevis.

- Anta at $\Gamma \vdash \Delta$ er LK-bevisbar.
- La π være et LK-bevis med rotsekvent $\Gamma \vdash \Delta$.
- Anta for motsigelse at $\Gamma \vdash \Delta$ ikke er gyldig, men er falsifiserbar.

□

Sunnhetsbeviset

Teorem (Sunnhet)

Sekventkalkylen LK *for førsteordens logikk er sunn.*

Bevis.

- Anta at $\Gamma \vdash \Delta$ er LK-bevisbar.
- La π være et LK-bevis med rotsekvent $\Gamma \vdash \Delta$.
- Anta for motsigelse at $\Gamma \vdash \Delta$ ikke er gyldig, men er falsifiserbar.
- Ved Lemma fins det minst én løvsekvent i π som er falsifiserbar.

□

Sunnhetsbeviset

Teorem (Sunnhet)

Sekventkalkylen LK *for førsteordens logikk er sunn.*

Bevis.

- Anta at $\Gamma \vdash \Delta$ er LK-bevisbar.
- La π være et LK-bevis med rotsekvent $\Gamma \vdash \Delta$.
- Anta for motsigelse at $\Gamma \vdash \Delta$ ikke er gyldig, men er falsifiserbar.
- Ved Lemma fins det minst én løvsekvent i π som er falsifiserbar.
- Siden π er et bevis, må løvsekventen være et aksiom.

$\square$

Sunnhetsbeviset

Teorem (Sunnhet)

Sekventkalkylen LK *for førsteordens logikk er sunn.*

Bevis.

- Anta at $\Gamma \vdash \Delta$ er LK-bevisbar.
- La π være et LK-bevis med rotsekvent $\Gamma \vdash \Delta$.
- Anta for motsigelse at $\Gamma \vdash \Delta$ ikke er gyldig, men er falsifiserbar.
- Ved Lemma fins det minst én løvsekvent i π som er falsifiserbar.
- Siden π er et bevis, må løvsekventen være et aksiom.
- Ved Lemma må løvsekventen være gyldig. Det gir en motsigelse.

$\square$

Sunnhetsbeviset

Teorem (Sunnhet)

Sekventkalkylen LK *for førsteordens logikk er sunn.*

Bevis.

- Anta at $\Gamma \vdash \Delta$ er LK-bevisbar.
- La π være et LK-bevis med rotsekvent $\Gamma \vdash \Delta$.
- Anta for motsigelse at $\Gamma \vdash \Delta$ ikke er gyldig, men er falsifiserbar.
- Ved Lemma fins det minst én løvsekvent i π som er falsifiserbar.
- Siden π er et bevis, må løvsekventen være et aksiom.
- Ved Lemma må løvsekventen være gyldig. Det gir en motsigelse.
- Da må $\Gamma \vdash \Delta$ være gyldig.

$\square$