Forelesning 8: Førsteordens logikk – kompletthet

Christian Mahesh Hansen - 12. mars 2007

1 Kompletthet av LK

1.1 Overblikk

- Vi skal nå bevise at LK er komplett.
- Ikke bare er LK sunn, den kan også vise *alle* gyldige sekventer.
- Det er ingen "hull" i mengden av LK-bevisbare formler.
- Det er to måter å forstå "fra φ følger ψ" på:
  1. Semantisk: $\varphi \vDash \psi$, hvis φ er sann, så er ψ sann.
  2. Syntaktisk: $\varphi \vdash \psi$, det fins et bevis for sekventen $\varphi \vdash \psi$ / fra antakelsen φ, så kan ψ bevises.
- Med sunnhet og kompletthet, så blir disse ekvivalente.

Kurt Gödel (1906-1978)

Kurt Gödel (1906-1978)

- En av de mest betydningsfulle logikere noensinne.
- Har hatt enorm innflytelse på logikk, matematikk og filosofi.
- Det er han som først viste kompletthet av førsteordens logikk (1929).
- Er mest kjent for ufullstendighetsteoremene (1931) og at kontinuumshypotesen er konsistent med mengdelæren (1937).

Teorem 1.1 (Kompletthet)**.** *Hvis* $\Gamma \vdash \Delta$ *er gyldig, så er den bevisbar i* LK.

For å vise *kompletthet*, viser vi den ekvivalente påstanden:

Lemma 1.1 (Modelleksistens)**.** *Hvis* $\Gamma \vdash \Delta$ ikke *er bevisbar i LK, så er den falsifiserbar.*

Dvs. det finnes en modell som gjør alle formler i Γ sanne og alle formler i Δ usanne.

Merk at vi uansett går fra en universell påstand ("for alle modeller") til en eksistensiell påstand ("det fins et bevis").

1.2 Strategier

- Hvis en formel eller sekvent er gyldig, kan vi ha en *garanti* for at vi finner et bevis ved å begynne med en rotsekvent og anvende LK-reglene gjentatte ganger?
- For å gjøre dette litt mer presist, innfører vi begrepet *strategi*.

Definisjon 1.1 (Strategi)**.** *En strategi for* LK *er en angivelse av hvordan* LK*-reglene systematisk skal anvendes på formler i* LK*-utledninger.*

- Med vilje litt vagt. Mye kan være en strategi.
- Vi er interessert i strategier som garanterer at vi får et bevis til slutt hvis det er slik at bevis fins. La oss kalle slike strategier for "gode".

Definisjon 1.2 (Formeltype)**.** *La φ være en formel i en utledning. Vi sier at φ er av type θ hvis φ kan være hovedformelen i en θ-slutning.*

Eksempel.

$$Pa \land Pb, Qa \lor Qb \vdash \exists x Px, \forall x Px$$

- $Pa \land Pb$ *er en α-formel*
- $Qa \lor Qb$ *er en β-formel*
- $\exists x Px$ *er en γ-formel*
- $\forall x Px$ *er en δ-formel*

En enkel strategi

1. Anvend α-regler så mange ganger som mulig, dvs. helt til ingen løvsekvent lenger inneholder en formel av type α. Gå til 2.
2. Anvend β-regler så mange ganger som mulig.

$$\dfrac{\dfrac{\overset{\times}{P, Q \vdash P} \qquad \overset{\times}{P, Q \vdash Q}}{P, Q \vdash P \land Q}\,2}{P \land Q \vdash P \land Q}\,1$$

- Denne strategien er ikke "god". Det kan hende at 1 må anvendes etter at 2 er anvendt.

En "god" strategi for utsagnslogikk.

1. Anvend α-regler så mange ganger som mulig. Gå til 2.
2. Anvend β-regler så mange ganger som mulig. Gå til 3.
3. Hvis det er mulig å anvende en α-regel, gå til 1.

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{\times}{P, Q \vdash P, R, R} \qquad \overset{\times}{P, Q \vdash Q, R, R}}{P, Q \vdash P \land Q, R, R}\,2}{\neg(P \land Q), P, Q \vdash R, R}\,1 \qquad \overset{\times}{R, P, Q \vdash R, R}}{\neg(P \land Q) \lor R, P, Q \vdash R, R}\,2}{\neg(P \land Q) \lor R, P \vdash R, Q \to R}\,1}{\neg(P \land Q) \lor R \vdash P \to R, Q \to R}\,1}{\neg(P \land Q) \lor R \vdash (P \to R) \lor (Q \to R)}\,1
$$

- Hva skal til for at en strategi skal være "god"?

1. Alle formler må analyseres før eller senere.

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{Pffa, Pfa, Pa, \forall x Px, Qfa \land Qfa \vdash Qfa}{Pfa, Pa, \forall x Px, Qfa \land Qfa \vdash Qfa}}{Pa, \forall x Px, Qfa \land Qfa \vdash Qfa}}{\forall x Px, Qfa \land Qfa \vdash Qfa}
$$

2. Vi må forsøke å sette inn "alle termer" for γ-formler.

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{Pgga, Pga, Pa, \forall x Px \vdash Qga, Pfffb}{Pga, Pa, \forall x Px \vdash Qga, Pfffb}}{Pa, \forall x Px \vdash Qga, Pfffb}}{\forall x Px \vdash Qga, Pfffb}
$$

- Vi må kunne snakke om "alle termer" på en presis måte...

1.3 Herbranduniverset

Definisjon 1.3 (Herbranduniverset)**.** *La T være en mengde termer. Da er $\mathcal{H}(T)$,* Herbranduniverset til T*, den minste mengden slik at:*

- *$\mathcal{H}(T)$ inneholder alle konstanter fra T. Hvis det ikke er noen konstanter i T, så er en parameter o fra* par *(kalt en dummykonstant) med i $\mathcal{H}(T)$.*
- *Hvis f er et funksjonssymbol i T med aritet n og $t_1, \ldots, t_n$ er termer i $\mathcal{H}(T)$, så er $f(t_1, \ldots, t_n)$ i $\mathcal{H}(T)$.*

Herbranduniverset til en mengde formler er Herbranduniverset til mengden av termer som forekommer i formlene. Herbranduniverset til en gren er Herbranduniverset til mengden av formler som forekommer i grenen.

- Intuitivt, så er Herbranduniverset til T mengden av alle *lukkede* termer som kan genereres fra termer i T.

Eksempel. *La $T = \{f(x)\}$.Da er Herbranduniverset til T mengden*

$$\{o, fo, ffo, fffo, \ldots\}$$

Eksempel. *La $T = \{a, f(x)\}$.Da er Herbranduniverset til T mengden*

$$\{a, fa, ffa, fffa, \ldots\}$$

Eksempel. *La $F = \{\forall x H(f(g(x)))\}$.Da er Herbranduniverset til F mengden*

$$\{o, fo, go, fgo, gfo, ffo, ggo, , \ldots\}$$

1.4 Rettferdige strategier

- Enhver rettferdig strategi må gjøre at
  - alle formler blir analysert før eller senere, og
  - alle γ-formler blir instansiert med alle termer før eller senere.
- Hvis vi følger en rettferdig strategi, så skal én av to ting skje:
  1. Enten så klarer vi å lukke alle grener og får et bevis,
  2. eller så fins en åpen gren som vi kan lage en motmodell fra.
- For at dette skal gi mening må vi godta at utledninger kan være uendelig store, dvs. ha uendelig lange grener.
- Vi kan tenke at vi går til *grensen* i konstruksjonen av en utledning, enten ved at ingen regler lenger kan anvendes eller ved å fortsette med regelanvendelser i det uendelige. Vi kaller slike for *grenseutledninger*.
- Vi inkluderer altså uendelige trær når vi snakker om grenseutledninger.
- Merk: hvis alle grener i en utledning kan lukkes, så er utledningen endelig.

- Vi skal nå abstrahere over alle "gode" strategier.

Definisjon 1.4 (Rettferdig strategi)**.** *En strategi er* rettferdig *hvis enhver grenseutledning som fås ved å følge strategien har følgende egenskaper:*

1. *Hvis φ er en α-, β- eller δ-formel i en gren som ikke er lukket, så er φ hovedformel i en slutning i grenen.*
2. *Hvis φ er en γ-formel på formen $\mathsf{Q}x\psi$ i en gren som ikke er lukket, så er $\psi[t/x]$ aktiv formel i en slutning i grenen, for alle termer t i Herbranduniverset til grenen.*

1.5 Königs lemma

Lemma 1.2 (Königs lemma)**.** *Hvis T er et uendelig tre, men hvor enhver forgrening er endelig, så fins det en uendelig lang gren.*

Bevis. *Vi definerer en uendelig lang gren induktivt. La u_0 være rotnoden i treet T. Siden T er uendelig og u_0 har endelig mange etterkommere, så må ett av de umiddelbare deltrærne fra u_0 være uendelig. (Ellers ville T ha vært et endelig tre.) La u_1 være rotnoden i et slikt deltre. Hvis grenen $u_0, u_1, \ldots, u_n$ er generert, så finner man neste node u_{n+1} ved samme type resonnering. Denne prosessen gir en uendelig gren.*

1.6 Bevis for modelleksistensteoremet

- Anta at $\Gamma \vdash \Delta$ ikke er bevisbar.
- La π være en utledning (muligens uendelig) av $\Gamma \vdash \Delta$ som fremkommer ved å følge en rettferdig strategi. "En maksimal utledning".
- Siden $\Gamma \vdash \Delta$ ikke er bevisbar, så må det finnes minst en gren som ikke er lukket. (Her bruker vi Königs lemma.) La G være en slik gren. La

$G^\top$ være mengden av alle formler som forekommer i en antecedent i G,

$G^\perp$ være mengden av alle formler som forekommer i en succedent i G, og

A være mengden av alle atomære formler som forekommer i $G^\top$.

- Vi konstruerer nå en motmodell $\mathcal{M}$ for $\Gamma \vdash \Delta$.
- La domenet til $\mathcal{M}$ være Herbranduniverset til grenen (dvs. mengden av alle lukkede termer som kan genereres fra termer som forekommer i grenen).
- La $a^\mathcal{M} = a$ for alle konstantsymboler a.
- Hvis f er et funksjonssymbol med aritet n, la $f^\mathcal{M}(t_1, \ldots, t_n) = f(t_1, \ldots, t_n)$.
  - Da vil $t^\mathcal{M} = t$ for alle lukkede termer t.
  - Alle termer tolkes som seg selv.
- Hvis R er et relasjonssymbol med aritet n, la $\langle t_1, \ldots, t_n \rangle \in R^\mathcal{M}$ hvis og bare hvis $R(t_1, \ldots, t_n) \in A$.
- En slik modell kalles ofte for en *Herbrandmodell* eller en *termmodell*.

- Vi viser ved induksjon på førsteordens formler (i språket $\mathcal{L}^{\mathsf{par}}$) at modellen $\mathcal{M}$ gjør *alle* formler i $G^\top$ sanne og alle formler i $G^\perp$ usanne.
- Påstandene som vi viser for førsteordens formler er:

  Hvis $\varphi \in G^\top$, så $\mathcal{M} \models \varphi$.
  Hvis $\varphi \in G^\perp$, så $\mathcal{M} \not\models \varphi$.

Basissteg 1: φ er en atomær formel $R(t_1, \ldots, t_n)$ i $G^\top$.

- Da må $R(t_1, \ldots, t_n) \in A$ og $\langle t_1, \ldots, t_n \rangle \in R^\mathcal{M}$ ved konstruksjon.
- Da må $\mathcal{M} \models R(t_1, \ldots, t_n)$.

Basissteg 2: φ er en atomær formel $R(t_1, \ldots, t_n)$ i $G^\perp$.

- Siden G ikke er lukket, må $R(t_1, \ldots, t_n) \notin A$ og $\langle t_1, \ldots, t_n \rangle \notin R^\mathcal{M}$.
- Da vil $\mathcal{M} \not\models R(t_1, \ldots, t_n)$.

Induksjonssteg: Fra antakelsen om at påstandene holder for mindre formler, så må vi vise at de holder for $\neg\varphi$, $(\varphi \land \psi)$, $(\varphi \lor \psi)$, $(\varphi \to \psi)$, $\forall x\varphi$ og $\exists x\varphi$.

I beviset for kompletthet av utsagnslogisk LK gjorde vi mesteparten.

F.eks. anta at $\varphi \land \psi \in G^\top$.

- Ved antakelsen om at strategien var rettferdig, så har $\varphi \land \psi$ vært hovedformel i en slutning i grenen G.
- Da vil $\varphi \in G^\top$ *og* $\psi \in G^\top$.

- Ved induksjonshypotesen vil $\mathcal{M} \models \varphi$ *og* $\mathcal{M} \models \psi$.
- Ved definisjonen av oppfyllbarhet har vi $\mathcal{M} \models \varphi \land \psi$.

Formler med kvantorer gjenstår.

Anta at $\exists x\varphi \in G^{\top}$.

- Ved antakelsen om at strategien var rettferdig, så har $\exists x\varphi$ vært hovedformel i en slutning i grenen.
- Da fins en parameter a slik at $\varphi[a/x] \in G^{\top}$.
- Ved induksjonshypotesen vil $\mathcal{M} \models \varphi[a/x]$.
- Siden $a^{\mathcal{M}} = a$, så vil også $\mathcal{M} \models \varphi[\bar{a}/x]$.
- Ved definisjonen av oppfyllbarhet vil $\mathcal{M} \models \exists x\varphi$.

Anta at $\exists x\varphi \in G^{\perp}$.

- Ved antakelsen om at strategien var rettferdig, så har $\varphi[t/x]$ vært aktiv formel for alle termer t i Herbranduniverset til grenen.
- Vi har dermed for alle termer t i Herbranduniverset til grenen følgende
  - $\varphi[t/x] \in G^{\perp}$
  - $\mathcal{M} \not\models \varphi[t/x]$ (fra induksjonshypotesen)
  - $\mathcal{M} \not\models \varphi[\bar{t}/x]$ (siden $t^{\mathcal{M}} = t$)
- Husk at domenet til $\mathcal{M}$ er Herbranduniverset til grenen.
- Ved definisjonen av oppfyllbarhet vil $\mathcal{M} \not\models \exists x\varphi$.

Anta at $\forall x\varphi \in G^{\perp}$.

- Ved antakelsen om at strategien var rettferdig, så har $\forall x\varphi$ vært hovedformel i en slutning i grenen.
- Da fins en parameter a slik at $\varphi[a/x] \in G^{\perp}$.
- Ved induksjonshypotesen vil $\mathcal{M} \not\models \varphi[a/x]$.
- Siden $a^{\mathcal{M}} = a$, så vil også $\mathcal{M} \not\models \varphi[\bar{a}/x]$.
- Ved definisjonen av oppfyllbarhet vil $\mathcal{M} \not\models \forall x\varphi$.

Anta at $\forall x\varphi \in G^{\top}$.

- Ved antakelsen om at strategien var rettferdig, så har $\varphi[t/x]$ vært aktiv formel for alle termer t i Herbranduniverset til grenen.
- Vi har dermed for alle termer t i Herbranduniverset til grenen følgende
  - $\varphi[t/x] \in G^{\top}$

- $\mathcal{M} \models \varphi[t/x]$ (fra induksjonshypotesen)
- $\mathcal{M} \models \varphi[\bar{t}/x]$ (siden $t^{\mathcal{M}} = t$)

- Husk at domenet til $\mathcal{M}$ er Herbranduniverset til grenen.
- Ved definisjonen av oppfyllbarhet vil $\mathcal{M} \models \forall x\varphi$.

Noen kommentarer

- Vi kan se på konstruksjonen av en utledning som en tilnærming/approksimasjon til en motmodell for $\Gamma \vdash \Delta$.
- Jo flere ganger vi anvender regler (ved å følge en rettferdig strategi), jo nærmere kommer vi en eventuell motmodell.
- For å lage en motmodell på denne måten, kan det være nødvendig å anvende reglene uendelig mange ganger.
- Ofte fins det endelige motmodeller der hvor denne metoden gir en uendelig motmodell. Å finne endelige motmodeller der hvor det fins er ikke lett. Dette er noe det forskes på.
- Idéen i kompletthetsbeviset er viktig. Konstruksjonen av modeller fra noe rent syntaktisk. Et filosofisk spørsmål: Er det egentlig et skille mellom syntaks og semantikk?

1.7 Eksempler på eksistens av motmodell

$$\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}\times \\ \varphi, Pa \vdash \forall x Qx, Pa\end{array} \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\begin{array}{c}G \\ Qa, \varphi, Pa \vdash Qb, Pb\end{array} \qquad \begin{array}{c}\times \\ Qb, Qa, \varphi, Pa \vdash Qb\end{array}}{Qa, \varphi, Pb \to Qb, Pa \vdash Qb}}{Qa, \varphi, Pa \vdash Qb}}{Qa, \varphi, Pa \vdash \forall x Qx}}{\varphi, Pa \to Qa, Pa \vdash \forall x Qx}}{\underbrace{\forall x(Px \to Qx)}_{\varphi}, Pa \vdash \forall x Qx}$$

- Herbranduniverset til grenen G, og domenet til $\mathcal{M}$, er $\{a, b\}$.
- Siden $Pa \in G^{\top}$ vil $a \in P^{\mathcal{M}}$ og $\mathcal{M} \models Pa$.
- Siden $Qa \in G^{\top}$ vil $a \in Q^{\mathcal{M}}$ og $\mathcal{M} \models Qa$ og $\mathcal{M} \models Pa \to Qa$.
- Siden $Qb \in G^{\perp}$ vil $b \notin Q^{\mathcal{M}}$ og $\mathcal{M} \not\models Qb$ og $\mathcal{M} \not\models \forall x Qx$.
- Siden $Pb \in G^{\perp}$ vil $b \notin P^{\mathcal{M}}$ og $\mathcal{M} \not\models Pb$ og $\mathcal{M} \models Pb \to Qb$.
- Dermed har vi også $\mathcal{M} \models \forall x(Px \to Qx)$.
- $\mathcal{M}$ oppfyller alle formlene i $G^{\top}$ og falsifiserer alle formlene i $G^{\perp}$.

$$
\dfrac{
\dfrac{\dfrac{\text{(Greit. Begge grener lukkes.)}}{\varphi, Paa \to Pab, Paa \vdash Pab}}{\varphi, Paa \vdash Pab}
\qquad
\dfrac{\dfrac{
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\times}{\varphi, Pba \vdash Pab, Paa, Pba} \quad \dfrac{G}{Pbb, \varphi, Pba \vdash Pab, Paa}}{\varphi, Pba \to Pbb, Pba \vdash Pab, Paa}}{\varphi, Pba \vdash Pab, Paa}
\qquad
\dfrac{\times}{Pab, \varphi, Pba \vdash Pab}
}{\varphi, Paa \to Pab, Pba \vdash Pab}}{\varphi, Pba \vdash Pab}
}{\underbrace{\forall x(Pxa \to Pxb)}_{\varphi}, Paa \vee Pba \vdash Pab}
$$

- Herbranduniverset til grenen G - og domenet til $\mathcal{M}$ - er $\{a, b\}$.
- Siden $Pab \in G^{\perp}$ vil $\langle a, b\rangle \notin P^{\mathcal{M}}$ og $\mathcal{M} \not\models Pab$.
- Siden $Pba \in G^{\top}$ vil $\langle b, a\rangle \in P^{\mathcal{M}}$ og $\mathcal{M} \models Pba$ og $\mathcal{M} \models Paa \vee Pba$.
- Siden $Paa \in G^{\perp}$ vil $\langle a, a\rangle \notin P^{\mathcal{M}}$ og $\mathcal{M} \not\models Paa$ og $\mathcal{M} \models Paa \to Pab$.
- Siden $Pbb \in G^{\top}$ vil $\langle b, b\rangle \in P^{\mathcal{M}}$ og $\mathcal{M} \models Pbb$ og $\mathcal{M} \models Pba \to Pbb$.
- Dermed har vi også $\mathcal{M} \models \forall x(Pxa \to Pxb)$.
- $\mathcal{M}$ oppfyller alle formlene i $G^{\top}$ og falsifiserer alle formlene i $G^{\perp}$.