INF3170 – Logikk

Forelesning 10: Automatisk bevissøk – introduksjon, substitusjoner og unifisering

Christian Mahesh Hansen

Institutt for informatikk, Universitetet i Oslo

16. april 2007

Dagens plan

Automatisk bevissøk i førsteordens logikk

- Sekventkalkylen LK tilbyr
  - et sett med regler for å bygge opp utledninger, og
  - en egenskap som skiller bevis fra utledninger.
- Sunnhet sikrer oss at enhver bevisbar sekvent er gyldig.
- Kompletthet sikrer oss at det *finnes* et bevis for enhver gyldig sekvent.
- Kalkylen sier imidlertid ingenting om hvordan man finner bevis for gyldige sekventer!
- Kompletthetsbeviset for LK gir hint om hvordan vi kan lage en søkealgoritme.
- La oss forsøke!

Noen begreper

- En utledning er lukket hvis alle grenene er lukket.
- En utledning er utvidbar hvis det er mulig å anvende en regel på en formel i en løvsekvent i utledningen.
- En søkealgoritme er komplett hvis den *finner* et bevis for enhver gyldig sekvent.

Algoritme: gyldig?($\Gamma \vdash \Delta$)

$\pi := \Gamma \vdash \Delta$;
while (π ikke er lukket) **do**
  if (π ikke er utvidbar) **then**
    return *"ikke gyldig"*;
  else
    $\varphi :=$ ikke-atomær formel i løvsekvent i π;
    utvid π ved å anvende riktig LK-regel på φ;
  end if
end while
return *"gyldig"*;

- Algoritmen er komplett hvis utvelgelsen av φ er rettferdig.

Effektivitet

- Effektiviteten til algoritmen avhenger av tre ting:
  1. Hvor effektivt er det å sjekke om utledningen er lukket?
  2. Strategi for valg av utvidelse av utledningen.
  3. Hvor effektiv er selve utvidelsen, dvs. regelanvendelsen?
- I første runde ser vi på punkt 1 og 3.
- Senere introduseres koblingskalkylen, som gir oppgav til en strategi for valg av utvidelser av utledningene.
- La oss starte med punkt 3 – effektiviteten til regelanvendelsene.

Hvor kostbare er regelanvendelsene?

- α- og β-reglene henter ut delformler fra en sammensatt formel:

$$\frac{\Gamma, A\ ,\ B \vdash \Delta}{\Gamma, A \wedge B \vdash \Delta}\ \mathrm{L}\wedge \qquad \frac{\Gamma \vdash A, \Delta \qquad \Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \wedge B, \Delta}\ \mathrm{R}\wedge$$

- All nødvendig informasjon tilgjengelig i hovedformelen: kan utføres i konstant tid.
- Riktignok får vi en del formelkopiering i β-regelen, men dette kan optimaliseres med f.eks. pekere i en objektorientert implementasjon.
- δ-regelen setter inn en ny parameter for den bundne variabelen:

$$\frac{\Gamma, \varphi[a/x] \vdash \Delta}{\Gamma, \exists x\varphi \vdash \Delta}\ \mathrm{L}\exists$$

- Parametrene kan nummereres: utføres i konstant tid.

γ-reglene

- La oss se på γ-reglene:

$$\frac{\Gamma, \forall x\varphi, \varphi[t/x] \vdash \Delta}{\Gamma, \forall x\varphi \vdash \Delta}\ \mathrm{L}\forall \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, \exists x\varphi, \varphi[t/x]}{\Gamma \vdash \Delta, \exists x\varphi}\ \mathrm{R}\exists$$

- Vi kan sette inn en vilkårlig lukket term t for x.
- For å få en komplett algoritme, må vi (før eller senere) instansiere hver γ-formel med alle termene i Herbranduniverset.
- Vi kan nummerere termene i Herbranduniverset og instansiere γ-formlene i denne rekkefølgen.
- Hvilken rekkefølge er gunstig med tanke på å finne bevis så tidlig som mulig?

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\forall xPx, Pa, \ldots, Pfffa \vdash Pfffa, Qga}{\vdots}}{\forall xPx, Pa \vdash Pfffa, Qga}}{\forall xPx \vdash Pfffa, Qga}$$

$\underset{1}{a}, \underset{2}{fa}, \underset{3}{ga}, \underset{4}{ffa}, \underset{5}{fga}, \ldots, \underset{i}{fffa}, \ldots$

Utsette valg av γ-term

- En bedre idé: Utsette valg av term i γ-reglene til et senere tidspunkt.
- La γ-reglene sette inn frie variable:

$$\dfrac{\dfrac{\forall xPx, Pu \vdash Pa}{\forall xPx \vdash Pa} \quad \dfrac{\forall xPx, Pv \vdash Pb}{\forall xPx \vdash Pb}}{\forall xPx \vdash Pa \wedge Pb}\ \begin{matrix} a/u \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \quad \begin{matrix} b/v \\ \\ \\ \\ \end{matrix}$$

- Substituere termer for variable slik at løvnodene blir aksiomer.
- Hvilke substitusjoner vi kan anvende på løvnoder med frie variable slik at de blir aksiomer?
- Problemet kan løses med unifiseringsalgoritmer.

δ-reglene

- Når vi setter inn variable i γ-reglene får vi imidlertid problemer med δ-reglene.
- Hvordan sikre at parameteren vi setter inn er ny når vi ennå ikke har satt inn termer for de frie variablene?

$$\dfrac{\dfrac{Lua \vdash Lbv}{\exists yLuy \vdash \forall yLyv}}{\forall x\exists yLxy \vdash \exists x\forall yLyx}\ b/u, a/v$$

kan ikke lukkes

$$\dfrac{\dfrac{Luf(u) \vdash Lg(v)v}{\exists yLuy \vdash \forall yLyv}}{\forall x\exists yLxy \vdash \exists x\forall yLyx}$$

- Vi lar δ-reglene introdusere en Skolemterm:

$$f(u_1, \ldots, u_n),$$

der f er et nytt funksjonssymbol, kalt en Skolemfunksjon, og $u_1, \ldots, u_n$ er alle variablene som forekommer fritt i δ-formelen.

- På den måten sikrer vi at termen introdusert av δ-regelen er ny uansett hva slags verdi vi velger å instansiere de frie variablene med.

Oppsummering

- Vi skal introdusere en fri-variabel sekventkalkyle og vise at den er sunn og komplett.
- γ-reglene introduserer nye frie variable og δ-reglene introduserer Skolemtermer.
- Ved hjelp av unifiseringsalgoritmer finner vi substitusjoner som lukker utledningen.

Substitusjoner

- Vi har tidligere definert $\varphi[s/x]$ som formelen vi får ved å erstatte alle frie forekomster av x i φ med s.
- I fri-variabel sekventkalkyle har vi behov for å erstatte flere forskjellige variable med termer samtidig.
- Vi skal nå definere en bestemt type funksjoner – substitusjoner – som generaliserer én-variabel substitusjon til flere variable.
- Notasjon: Når vi anvender en substitusjon σ på en formel φ eller en term t skriver vi $\varphi\sigma$ eller $t\sigma$ istedenfor $\sigma(\varphi)/\sigma(t)$.

Definisjon (Substitusjon)

En substitusjon er en funksjon σ fra mengden variable $\mathcal{V}$ til mengden av termer $\mathcal{T}$ i et gitt førsteordens språk.

- *Støtten (support) eller støttemengden (support set) til σ er mengden av variable x slik at $x\sigma \neq x$.*
- *σ er grunn dersom $x\sigma$ er en lukket term for alle variable x i støttemengden til σ.*

Notasjon

En substitusjon σ med endelig støtte $\{x_1, \ldots, x_n\}$ slik at $x_1\sigma = t_1, \ldots, x_n\sigma = t_n$ skriver vi ofte slik:

$$\sigma = \{t_1/x_1, \ldots, t_n/x_n\}$$

- Substitusjonen ϵ slik at $x\epsilon = x$ for alle variable x kalles identitetssubstitusjonen.
- Identitetssubstitusjonen kan skrives $\{\}$ siden den har tom støttemengde.

$\sigma = \{a/x, fa/y\}$

- er en substitusjon slik at
  - $x\sigma = a$
  - $y\sigma = fa$
  - $z\sigma = z$ for alle andre variable
- er en grunn substitusjon

$\tau = \{a/y, fx/z\}$

- er en substitusjon slik at
  - $y\sigma = a$
  - $z\sigma = fx$
  - $v\sigma = v$ for alle andre variable
- er ikke en grunn substitusjon

Substitusjon på termer

- Vi definerer substitusjon på termer som tidligere.

Definisjon (Substitusjon på termer)

Vi definerer resultatet av å anvende en substitusjon σ på vilkårlige termer rekursivt ved:

- $c\sigma = c$ *for et konstantsymbol* c.
- $f(t_1, \ldots, t_n)\sigma = f(t_1\sigma, \ldots, t_n\sigma)$ *for en funksjonsterm* $f(t_1, \ldots, t_n)$.

La $\sigma = \{gy/x, y/z\}$.

- $f(x, a)\sigma = f(gy, a)$
- $h(y, z)\sigma = h(y, y)$
- $x\sigma = gy$

La $\tau = \{y/x, x/y\}$.

- $x\tau = y$
- $f(x, y)\tau = f(y, x)$

Substitusjon på formler

- Som tidligere, ønsker vi at substitusjoner ikke skal endre bundne variable.
- Eksempel: for $\sigma = \{a/x, b/y\}$ så vil $\forall x(Px \to Qy)\sigma = \forall xPx \to Qb$.
- Vi begrenser substitusjonen på den bundne variabelen:

Definisjon (Begrenset substitusjon)

La σ være en substitusjon. Substitusjonen σ begrenset på x, skrevet σ_x, er definert slik at

$$y\sigma_x = \begin{cases} y & \text{hvis } y = x \\ y\sigma & \text{ellers} \end{cases}$$

for enhver variabel y.

Definisjon (Substitusjon på formler)

$\varphi\sigma$ er definert rekursivt ved:

1. $R(t_1, \ldots, t_n)\sigma = R(t_1\sigma, \ldots, t_n\sigma)$
2. $\neg\psi\sigma = \neg(\psi\sigma)$
3. $(\varphi_1 \circ \varphi_2)\sigma = (\varphi_1\sigma \circ \varphi_2\sigma)$, *hvor* $\circ \in \{\wedge, \vee, \to\}$
4. $(\mathrm{Q}x\psi)\sigma = \mathrm{Q}x(\psi\sigma_x)$, *hvor* $\mathrm{Q} \in \{\forall, \exists\}$

- Vi antar, som tidligere, at ingen variable blir bundet som resultat av å anvende en substitusjon.
- Dette kan vi unngå ved å omdøpe bundne variable.

La $\sigma = \{fx/x, a/y, y/z\}$

- $\sigma_x = \{ \cancel{fx/x}\ , a/y, y/z\}$
- $\sigma_y = \{fx/x, \cancel{a/y}\ , y/z\}$
- $\sigma_z = \{fx/x, a/y, \cancel{y/z}\ \}$
- $P(x, y)\sigma = P(fx, a)$
- $\forall xP(x, y)\sigma = \forall x(P(x, y)\sigma_x) = \forall xP(x, a)$
- $\exists z(Px \to Qz)\sigma = \exists z((Px \to Qz)\sigma_z) = \exists z(Pfx \to Qz)$

Komposisjon av substitusjoner

- La σ og τ være substitusjoner.
- Anta at vi først anvender σ og så τ på en formel φ: $(\varphi\sigma)\tau$.
- Vi har av og til bruk for å snakke om den substitusjonen som tilsvarer å anvende σ etterfulgt av τ.

Definisjon (Komposisjon av substitusjoner)

La σ og τ være substitusjoner. Komposisjonen av σ og τ er en substitusjon skrevet $\sigma\tau$ slik at $x(\sigma\tau) = (x\sigma)\tau$ for hver variabel x.

- Oppgave: vis at $\varphi(\sigma\tau) = (\varphi\sigma)\tau$ for alle formler φ og alle substitusjoner σ og τ.

Komposisjon av substitusjoner med endelig støtte

Påstand

La $\sigma_1 = \{s_1/x_1, \ldots, s_n/x_n\}$ og $\sigma_2 = \{t_1/y_1, \ldots, t_k/y_k\}$. Da er

$$\sigma_1\sigma_2 = \{(s_1\sigma_2)/x_1, \ldots, (s_n\sigma_2)/x_n, (z_1\sigma_2)/z_1, \ldots, (z_m\sigma_2)/z_m\}$$

der $z_1, \ldots, z_m$ er de variablene blant $y_1, \ldots, y_k$ som ikke er blant $x_1, \ldots, x_n$.

La $\sigma = \{z/x, a/y\}$ og $\tau = \{b/y, a/z\}$.

Da er $\sigma\tau = \{(z\tau)/x, (a\tau)/y, (z\tau)/z\} = \{a/x, a/y, a/z\}$.

La $\sigma = \{y/x\}$ og $\tau = \{x/y\}$.

Da er $\sigma\tau = \{(y\tau)/x, (y\tau)/y\} = \{x/x, x/y\} = \{x/y\}$.

Unifisering

- I fri-variabel sekventkalkyle kan vi ha løvsekventer på formen
$$\Gamma, P(s_1, \ldots, s_n) \vdash P(t_1, \ldots, t_n), \Delta$$
der hver s_i og t_i er termer som kan inneholde variable.
- For å lukke løvsekventen må vi finne en substitusjon σ slik at $s_i\sigma = t_i\sigma$ for hver i.
- Det er ikke sikkert at noen slik substitusjon finnes!

Unifiseringsproblemet

La s og t være termer. Finn *alle* substitusjoner som gjør s og t syntaktisk like, dvs. alle σ slik at $s\sigma = t\sigma$.

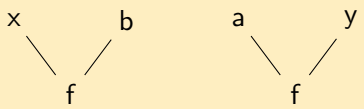
- En substitusjon som gjør termene s og t syntaktisk like, kalles en unifikator for s og t.
- To termer er unifiserbare hvis de har en unifikator.

Er $f(x)$ og $f(a)$ unifiserbare?

Ja. Vi ser at $\sigma = \{a/x\}$ er en *unifikator*: $f(x)\sigma = f(a)$

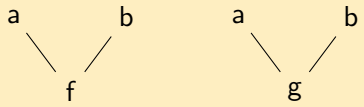
Er $f(x, b)$ og $f(a, y)$ unifiserbare?

Kan være lettere å se hvis vi skriver termene som *trær*:



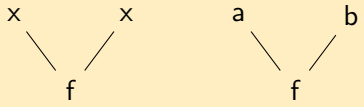
- Symbolene i posisjon 0 (rotposisjonen) er like.
- Symbolene i venstre barn er ulike, men kan unifiseres med $\{a/x\}$.
- Symbolene i høyre barn er ulike, men kan unifiseres med $\{b/y\}$.

Er $f(a, b)$ og $g(a, b)$ unifiserbare?



- Symbolene i posisjon 0 er ulike, og kan *ikke* unifiseres!

Er $f(x, x)$ og $f(a, b)$ unifiserbare?



- Symbolene i posisjon 0 er like.
- Symbolene i venstre barn er ulike, men kan unifiseres med $\{a/x\}$.
- Vi må anvende $\{a/x\}$ på x i både venstre og høyre barn.
- Symbolene i høyre barn er nå ulike, og kan *ikke* unifiseres!

Er x og $f(x)$ unifiserbare?

- Symbolene i posisjon 0 er ulike, men kan unifiseres med $\{f(x)/x\}$.
- Vi må samtidig anvende $\{f(x)/x\}$ på x i høyre tre.
- På posisjon 1 ser vi nå at symbolene x og f er ulike.
- Hvis vi unifiserer med $\{f(x)/x\}$, må vi igjen erstatte x i høyre tre.
- Sånn kan vi holde på en stund...

Generelt har vi:

- To *ulike* konstantsymboler eller funksjonssymboler er ikke unifiserbare.
- En variabel x er ikke unifiserbar med en term som *inneholder* x.

- Vi skal lage en unifiseringsalgoritme, som finner alle unifikatorer for to termer.
- Problem: To termer har potensielt uendelig mange unifikatorer! Vi kan ikke returnere alle...
- Løsning: Finne en representant σ for mengden av unifikatorer slik at alle andre unifikatorer kan konstrueres fra σ.
- En slik unifikator kalles en mest generell unifikator.

Definisjon (Mer generell substitusjon)

La σ_1 og σ_2 være substitusjoner. Vi sier at σ_2 er mer generell enn σ_1 hvis det finnes en substitusjon τ slik at $\sigma_1 = \sigma_2\tau$.

Er $\{f(y)/x\}$ mer generell enn $\{f(a)/x\}$?

Ja, siden $\{f(a)/x\} = \{f(y)/x\}\{a/y\}$.

Er $\{f(a)/x\}$ mer generell enn $\{f(y)/x\}$?

Nei, for det finnes ingen substitusjon σ slik at $\{f(y)/x\} = \{f(a)/x\}\sigma$.

Er $\{f(y)/x\}$ mer generell enn $\{f(y)/x\}$?

Ja, siden $\{f(y)/x\} = \{f(y)/x\}\epsilon$. (Husk: ϵ er identitetssubstitusjonen.)

Definisjon (Unifikator)

La s og t være termer. En substitusjon σ er

- *en unifikator for s og t hvis $s\sigma = t\sigma$.*
- *en mest generell unifikator (mgu) for s og t hvis*
  - *den er en unifikator for s og t, og*
  - *den er mer generell enn alle andre unifikatorer for s og t.*

Vi sier at s og t er unifiserbare hvis de har en unifikator.

La $s = f(x)$ og $t = f(y)$.

- $\sigma_1 = \{a/x, a/y\}$ er en unifikator for s og t
- $\sigma_2 = \{y/x\}$ og $\sigma_3 = \{x/y\}$ er også unifikatorer for s og t
- σ_2 og σ_3 er de mest generelle unifikatorene for s og t

Variabelomdøping

- Fra det foregående eksempelet ser vi at to termer kan ha flere forskjellige mest generelle unifikatorer.
- Disse mgu-ene er imidlertid like opp til omdøping av variable.

Definisjon (Variabelomdøping)

En substitusjon η er en variabelomdøping hvis

1. *$x\eta$ er en variabel for alle $x \in \mathcal{V}$, og*
2. *$x\eta \neq y\eta$ for alle $x, y \in \mathcal{V}$ slik at $x \neq y$.*

Er disse substitusjonene variabelomdøpinger?

- $\sigma_1 = \{z/x, x/y, y/z\}$ Ja.
- $\sigma_2 = \{z/x, y/z\}$ Nei, siden $y\sigma_2 = z\sigma_2$.
- $\sigma_3 = \{z/x, x/y, y/z, a/u\}$ Nei, siden $u\sigma_3$ ikke er en variabel.

Unikhet "opp til omdøping av variable"

Påstand

Hvis σ_1 og σ_2 er mest generelle unifikatorer for to termer s og t, så finnes en variableomdøping η slik at $\sigma_1\eta = \sigma_2$.

- Bevis som oppgave?

Deltermer

Definisjon (Deltermer)

Mengden av deltermer av en term t er den minste mengden T slik at

- *$t \in T$, og*
- *hvis $f(t_1, \ldots, t_n) \in T$, så er hver $t_i \in T$.*

Alle termer i T utenom t er ekte deltermer av t.

La $s = gx$.

- Deltermer er: x, gx
- Ekte deltermer er: x

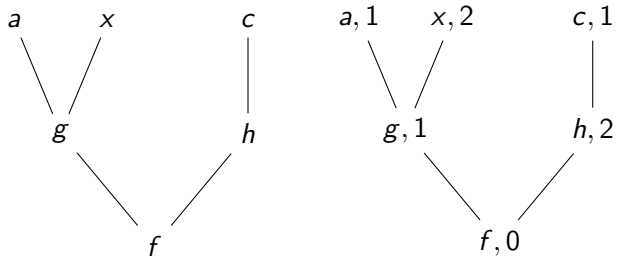
La $t = f(x, a)$.

- Deltermer er: x, a, $f(x, a)$
- Ekte deltermer er: x, a

- En term er altså en delterm av seg selv.

Nummererte termtrær

- Vi har sett at termer kan representeres med trær.
- Når vi unifiserer er det gunstig å nummerere barna til noder i termtreet:



- Slike trær kalles nummererte termtrær.
- Vi referer til roten til det nummererte termtreet til en term t som $\text{rot}(t)$.

Kritisk par

- Når vi skal unifisere to termer t_1 og t_2 er vi interessert i å finne par av deltermer som er ulike.
- Samtidig er det ønskelig å se på ulike deltermer så nærme roten som mulig.

Definisjon (Kritisk par)

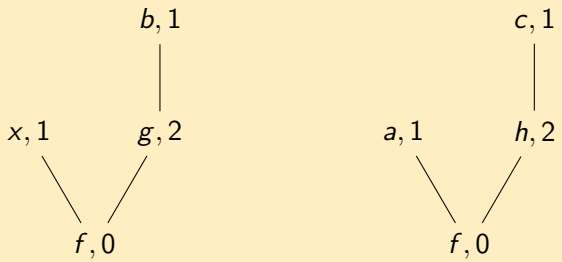
Et kritisk par for to termer t_1 og t_2 er et par $\langle k_1, k_2 \rangle$ slik at

- *k_1 er en delterm av t_1*
- *k_2 er en delterm av t_2*
- *når vi tenker på termer som nummererte termtrær så er*
  - *$\text{rot}(k_1)$ forskjellig fra $\text{rot}(k_2)$*
  - *stien fra $\text{rot}(t_1)$ til $\text{rot}(k_1)$ er lik stien fra $\text{rot}(t_2)$ til $\text{rot}(k_2)$*

- Merk: stiene kan være tomme, dvs. at termene er ulike allerede i rotsymbolet. Tomme stier er trivielt like...

Eksempel

La $s = f(x, gb)$ og $t = f(a, hc)$. Vi får følgende nummererte termtrær:



- *Er $\langle b, c \rangle$ kritisk par for s og t?*
  - *Nei, stien fra rot(s) til rot(b) er ulik stien fra rot(t) til rot(c).*
- *Er $\langle x, a \rangle$ kritisk par for s og t? Ja.*
- *Er $\langle gb, hc \rangle$ kritisk par for s og t? Ja.*

Algoritme: unifiser(t_1, t_2)

$\sigma := \epsilon$;
while $(t_1\sigma \neq t_2\sigma)$ **do**
  velg et kritisk par $\langle k_1, k_2 \rangle$ for $t_1\sigma, t_2\sigma$;
  if (hverken k_1 eller k_2 er en variabel) **then**
    return *"ikke unifiserbare"*;
  end if
  $x :=$ den av k_1, k_2 som er variabel (hvis begge er, så velg én);
  $t :=$ den av k_1, k_2 som ikke er x;
  if (x forekommer i t) **then**
    return *"ikke unifiserbare"*;
  end if
  $\sigma := \sigma\{t/x\}$;
end while
return σ;

Egenskaper ved unifiseringsalgoritmen

- Hvis termene t_1 og t_2 er unifiserbare, så returnerer algoritmen en mest generell unifikator for t_1 og t_2.
- Denne mgu-en er en representant for alle andre unifikatorer for t_1 og t_2.
- Hvis t_1 og t_2 ikke er unifiserbare, så returnerer algoritmen *"ikke unifiserbare"*.