Forelesning 11: Automatisk bevissøk II – fri-variabel sekventkalkyle og sunnhet

Roger Antonsen - 23. april 2007

1 Automatisk bevissøk II

1.1 Fri-variabel sekventkalkyle

- Valg av term i γ-slutninger utsettes ved å sette inn en *fri* variabel.
- Introduksjon av frie variable i γ-slutninger gjør at vi må la δ-slutninger introdusere *Skolemtermer*.
- Ved unifisering finner vi en substitusjon som erstatter frie variable med termer slik at utledningen lukkes.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{u/a, v/fa}{Lufu \vdash Lav}}{\exists y Luy \vdash Lav}}{\forall x \exists y Lxy \vdash \exists x Lax}$$

Utvidet språk

- δ-slutningene introduserer *Skolemkonstanter* og *Skolemfunksjoner*.
- Disse symbolene er *nye* symboler som ikke forekommer i det språket som defineres av rotsekventen i en utledning.
- Språket som brukes i utledningene er *utvidet* med slike Skolemsymboler.

Definisjon 1.1 (Utvidet språk)**.** *La $\mathcal{L}$ være et førsteordens språk. La $\mathcal{S}$ være en mengde som består av*

- *tellbart uendelig mange* Skolemkonstanter*, og*
- *tellbart uendelig mange* Skolemfunksjoner *av hver aritet,*

slik at symbolene i $\mathcal{S}$ er forskjellig fra symbolene i $\mathcal{L}$. La $\mathcal{L}^{\text{sko}}$ være språket vi får ved å utvide $\mathcal{L}$ med konstant- og funksjonssymbolene i $\mathcal{S}$.

Sekventer

Definisjon 1.2 (Sekvent)**.** *La $\mathcal{L}$ være et førsteordens språk.*

- *En* sekvent *er et objekt på formen $\Gamma \vdash \Delta$ slik at Γ og Δ er multimengder av førsteordens formler i $\mathcal{L}^{\text{sko}}$.*
- *En sekvent $\Gamma \vdash \Delta$ er* lukket *hvis formlene i Γ og Δ er lukkede.*

Sekventer

1. $\forall x Px \vdash Pa$
2. $\forall x \exists y Lxy \vdash \exists x \forall y Lyx$
3. $\forall x Pxy \vdash Pufu$
4. $Pu \vdash Pa$
5. $Pu \vdash Pu, \exists x Px$

Lukkede sekventer

Nr. 1 og 2 er *lukkede* sekventer.

γ-reglene

Definisjon 1.3 (γ-regler i fri-variabel LK). *γ-reglene i fri-variabel* LK *er:*

$$\frac{\Gamma, \forall x\varphi, \varphi[u/x] \vdash \Delta}{\Gamma, \forall x\varphi \vdash \Delta}\,\mathrm{L}\forall \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, \exists x\varphi, \varphi[u/x]}{\Gamma \vdash \Delta, \exists x\varphi}\,\mathrm{R}\exists$$

u er en ny fri variabel

- Med *ny* mener vi her at u ikke må forekomme fritt i utledningen fra før.

δ-reglene

Definisjon 1.4 (δ-regler i fri-variabel LK). *δ-reglene i fri-variabel* LK *er:*

$$\frac{\Gamma, \varphi[f(\vec{u})/x] \vdash \Delta}{\Gamma, \exists x\varphi \vdash \Delta}\,\mathrm{L}\exists \qquad \frac{\Gamma \vdash \Delta, \varphi[f(\vec{u})/x]}{\Gamma \vdash \Delta, \forall x\varphi}\,\mathrm{R}\forall$$

f er en ny Skolemfunksjon
$\vec{u} = u_1, \ldots, u_n$ er de frie variablene i hovedformelen

- Med *ny* mener vi her at f ikke må forekomme i utledningen fra før.

Slutningsregler og utledninger

Definisjon 1.5 (Slutningsreglene i fri-variabel LK). *Slutningsreglene i fri-variabel* LK *er*

- *γ- og δ-reglene for frie variable, og*
- *α- og β-reglene fra utsagnslogisk* LK*.*

- Mengden av *fri-variabel utledninger* defineres induktivt:
  - *Basismengden* er mengden av lukkede sekventer.

- – Mengden er lukket under slutningsreglene i fri-variabel LK.

- Vi krever altså at rotsekventen i en utledning *kun* inneholder lukkede formler!
- Formlene i de andre sekventene i en utledning behøver imidlertid ikke være lukkede.

Eksempler på fri-variabel utledninger

$$\dfrac{\dfrac{\forall x Px, Pu \vdash \exists x Px, Pv}{\forall x Px, Pu \vdash \exists x Px}\,\mathsf{R}\exists}{\forall x Px \vdash \exists x Px}\,\mathsf{L}\forall$$

R∃ kan *ikke* introdusere u, siden denne allerede forekommer fri i utledningen.

$$\dfrac{\dfrac{\forall x Px, Pu \vdash Pa}{\forall x Px \vdash Pa}\,\mathsf{L}\forall \qquad \dfrac{\forall x Px, Pv \vdash Pb}{\forall x Px \vdash Pb}\,\mathsf{L}\forall}{\forall x Px \vdash Pa \land Pb}\,\mathsf{R}\land$$

L∀ i høyre og venstre gren kan *ikke* introdusere den samme variabelen, av samme grunn som over.

Eksempler på fri-variabel utledninger

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\forall x(Px \lor Qx), Pu \vdash Pa, \forall x Qx}{\forall x(Px \lor Qx), Pu \vdash \forall x Px, \forall x Qx}\,\mathsf{R}\forall \qquad \dfrac{\forall x(Px \lor Qx), Qu \vdash \forall x Px, Qb}{\forall x(Px \lor Qx), Qu \vdash \forall x Px, \forall x Qx}\,\mathsf{R}\forall}{\forall x(Px \lor Qx), Pu \lor Qu \vdash \forall x Px, \forall x Qx}\,\mathsf{L}\lor}{\forall x(Px \lor Qx) \vdash \forall x Px, \forall x Qx}\,\mathsf{L}\forall$$

- Vi krever at hver δ-slutning introduserer et *nytt* Skolemsymbol, dvs. et som *ikke* forekommer i utledningen fra før.
- Derfor kan R∀ i høyre gren *ikke* introdusere den samme Skolemkonstanten som R∀ i venstre gren.
- Dette er et *strengere* krav enn for δ-reglene i LK uten frie variable, der den introduserte parameteren ikke må forekomme i *konklusjonen*.
- I utledningen over vet vi ikke hvilke symboler som forekommer i konklusjonen før vi har instansiert u!

Eksempel på objekter som ikke er utledninger

$$\dfrac{\dfrac{Px \vdash Pa}{Px \vdash \forall x Px}\,\mathsf{R}\forall}{\vdash Px \to \forall x Px}\,\mathsf{R}{\to}$$

Rotsekventen er ikke lukket.

$$\begin{array}{cl}
\forall x\exists y Pxy, Puf(u) \vdash Pf(v)v, \exists x\forall y Pyx & \\
\hline
\forall x\exists y Pxy, Puf(u) \vdash \forall y Pyv, \exists x\forall y Pyx & \mathsf{R}\forall \\
\hline
\forall x\exists y Pxy, Puf(u) \vdash \exists x\forall y Pyx & \mathsf{R}\exists \\
\hline
\forall x\exists y Pxy, \exists y Puy \vdash \exists x\forall y Pyx & \mathsf{L}\exists \\
\hline
\forall x\exists y Pxy \vdash \exists x\forall y Pyx & \mathsf{L}\forall
\end{array}$$

De to δ-slutningene introduserer det samme Skolemfunksjonssymbolet.

Lukkede utledninger

- For at en fri-variabel LK-utledning skal være et bevis, må vi instansiere de frie variablene i utledningen slik at løvsekventene blir aksiomer.
- Dette kalles å *lukke* en utledning.

Definisjon 1.6 (Lukking)**.** *La π være en fri-variabel utledning, og la σ være en substitusjon.*

- *σ* lukker *en løvsekvent $\Gamma \vdash \Delta$ i π hvis det finnes* atomære *formler $\varphi \in \Gamma$ og $\psi \in \Delta$ slik at $\varphi\sigma = \psi\sigma$.*
- *σ* lukker *π hvis σ lukker alle løvsekventene i π.*

Bevis

Definisjon 1.7 (Bevis)**.** *Et* fri-variabel LK-bevis *for en sekvent $\Gamma \vdash \Delta$ er par $\langle \pi, \sigma \rangle$ der*

- *π er en utledning med $\Gamma \vdash \Delta$ som rotsekvent, og*
- *σ er en grunn substitusjon som lukker π.*

- Vi krever at den lukkende substitusjonen skal være *grunn*, siden dette gjør sunnhetsbeviset *litt* lettere.
- Senere skal vi se at vi kan lempe på dette kravet og tillate lukkende substitusjoner som ikke er grunne.

Eksempel (1)**.** *La π være utledningen*

$$\begin{array}{cl}
\forall x Px, Pu \vdash \exists x Px, Pv & \\
\hline
\forall x Px, Pu \vdash \exists x Px & \mathsf{R}\exists \\
\hline
\forall x Px \vdash \exists x Px & \mathsf{L}\forall
\end{array}$$

og la $\sigma = \{a/u, a/v\}$.

- *σ lukker løvsekventen: $(Pu)\sigma = Pa = (Pv)\sigma$.*
- *σ lukker π, siden den lukker den eneste løvsekventen.*
- *Da er $\langle \pi, \sigma \rangle$ et bevis for sekventen $\forall x Px \vdash \exists x Px$.*

Merk:

Slik vi har definert fri-variabel LK vil f.eks. $\langle \pi, \sigma' \rangle$ der $\sigma' = \{v/u\}$ *ikke* være et bevis, siden σ' ikke er grunn.

Eksempel (2)**.** *La π være utledningen*

$$\dfrac{\dfrac{\forall x Px, Pu \vdash Pa}{\forall x Px \vdash Pa}\,\mathrm{L}\forall \qquad \dfrac{\forall x Px, Pv \vdash Pb}{\forall x Px \vdash Pb}\,\mathrm{L}\forall}{\forall x Px \vdash Pa \land Pb}\,\mathrm{R}\land$$

og la $\sigma = \{a/u, b/v\}$.

- *σ lukker venstre løvsekvent: $(Pu)\sigma = Pa$.*
- *σ lukker høyre løvsekvent: $(Pv)\sigma = Pb$.*
- *σ lukker π, siden den lukker begge løvsekventene.*
- *Da er $\langle \pi, \sigma \rangle$ et bevis for sekventen $\forall x Px \vdash Pa \land Pb$.*

Eksempel (3)**.** *La π være utledningen*

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\forall x(Px \lor Qx), Pu \vdash Pa, \forall x Qx}{\forall x(Px \lor Qx), Pu \vdash \forall x Px, \forall x Qx}\,\mathrm{R}\forall \qquad \dfrac{\forall x(Px \lor Qx), Qu \vdash \forall x Px, Qb}{\forall x(Px \lor Qx), Qu \vdash \forall x Px, \forall x Qx}\,\mathrm{R}\forall}{\forall x(Px \lor Qx), Pu \lor Qu \vdash \forall x Px, \forall x Qx}\,\mathrm{L}\lor}{\forall x(Px \lor Qx) \vdash \forall x Px, \forall x Qx}\,\mathrm{L}\forall$$

- *Det finnes ingen substitusjon som lukker begge løvsekventene, siden u ikke kan instansieres med både a og b* samtidig*.*
- *Derfor finnes ikke noe bevis for sekventen $\forall x(Px \lor Qx) \vdash \forall x Px, \forall x Qx$ basert på utledningen π.*
- *Er rotsekventen gyldig...?*

1.2 Semantikk

- For å kunne vise at kalkylen er sunn må vi ha klart for oss hvordan vi tolker formlene i utledningene.
- Vi har tidligere definert hvordan vi bruker modeller for å tilordne sannhetsverdier til *lukkede* førsteordens formler.
- Men hvordan skal vi tolke formler med frie variable?
- Vi kan bruke *variabeltilordninger* for å tolke frie variable som elementer i domenet til en gitt modell.
- Vi definerer så rekursivt hvordan vi kan tolke en vilkårlig førsteordens formel i en modell under en gitt variabeltilordning.

Variabeltilordninger

Definisjon 1.8 (Variabeltilordning)**.** *La $\mathcal{M}$ være en modell. En* variabeltilordning *for $\mathcal{M}$ er en funksjon fra mengen av variable til $|\mathcal{M}|$.*

- En variabeltilordning er alltid gitt relativ til en modell $\mathcal{M}$ siden den tolker variable som elementer i domenet til $\mathcal{M}$.
- For en gitt modell kan vi ha mange variabeltilordninger.
- Hvis $|\mathcal{M}| = \{1, 2, 3\}$, så kan vi ha
  - μ_1 slik at $\mu_1(x_1) = 1$, $\mu_1(x_2) = 1$, $\mu_1(x_3) = 1$, ...
  - μ_2 slik at $\mu_2(x_1) = 2$, $\mu_2(x_2) = 2$, $\mu_2(x_3) = 2$, ...
  - μ_3 slik at $\mu_3(x_1) = 1$, $\mu_3(x_2) = 2$, $\mu_3(x_3) = 3$, ...
  - ...

Tolkning av termer med frie variable

- Vi bruker tolkningsfunksjonen i modellen til å tolke konstant- og funksjonssymboler på samme måte som i semantikken for lukkede formler.
- Tolkningen av frie variable overlates til variabeltilordningen.

Definisjon 1.9 (Tolkning av termer med frie variable)**.** *La $\mathcal{L}$ være et førsteordens språk og $\mathcal{M}$ en modell for $\mathcal{L}$. Anta at $\mathcal{M}$ er en $\mathcal{L}(\mathcal{M})$-modell. La μ være en variabeltilordning for $\mathcal{M}$. Tolkningen av en term t i $\mathcal{M}$ under μ, skrevet $t^{\mathcal{M},\mu}$, defineres rekursivt.*

- $x^{\mathcal{M},\mu} = \mu(x)$ *for en variabel x*
- $c^{\mathcal{M},\mu} = c^{\mathcal{M}}$ *for et konstantsymbol c*
- $f(t_1, \ldots, t_n)^{\mathcal{M},\mu} = f^{\mathcal{M}}(t_1^{\mathcal{M},\mu}, \ldots, t_n^{\mathcal{M},\mu})$ *for en funksjonsterm*

Tolkning av formler med frie variable

Definisjon 1.10 (Tolkning av formler med frie variable)**.** *La $\mathcal{L}$ være et førsteordens språk og $\mathcal{M}$ en modell for $\mathcal{L}$. Anta at $\mathcal{M}$ er en $\mathcal{L}(\mathcal{M})$-modell. La μ være en variabeltilordning for $\mathcal{M}$. Vi definerer ved rekursjon hva det vil si at en formel φ er* sann *i $\mathcal{M}$ under μ; vi skriver $\mathcal{M}, \mu \models \varphi$ når φ er sann i $\mathcal{M}$ under μ.*

- *Atomære fml: $\mathcal{M}, \mu \models R(t_1, \ldots, t_n)$ hvis $\langle t_1^{\mathcal{M},\mu}, \ldots, t_n^{\mathcal{M},\mu} \rangle \in R^{\mathcal{M}}$.*
- *$\mathcal{M}, \mu \models \neg\varphi$ hvis det ikke er tilfelle at $\mathcal{M}, \mu \models \varphi$.*
- *$\mathcal{M}, \mu \models \varphi \land \psi$ hvis $\mathcal{M}, \mu \models \varphi$ og $\mathcal{M}, \mu \models \psi$.*
- *$\mathcal{M}, \mu \models \varphi \lor \psi$ hvis $\mathcal{M}, \mu \models \varphi$ eller $\mathcal{M}, \mu \models \psi$.*
- *$\mathcal{M}, \mu \models \varphi \to \psi$ hvis $\mathcal{M}, \mu \models \varphi$ impliserer $\mathcal{M}, \mu \models \psi$.*
- *$\mathcal{M}, \mu \models \forall x\varphi$ hvis $\mathcal{M}, \mu \models \varphi[\bar{a}/x]$ for alle a i $|\mathcal{M}|$.*
- *$\mathcal{M}, \mu \models \exists x\varphi$ hvis $\mathcal{M}, \mu \models \varphi[\bar{a}/x]$ for minst en a i $|\mathcal{M}|$.*

Eksempel I

Modellen $\mathcal{M}$

$|\mathcal{M}| = \{$, , $\}$

$\mathsf{Liker}^{\mathcal{M}} =$

$\{\langle$, $\rangle$, $\langle$, $\rangle$,

$\langle$, $\rangle$, $\langle$, $\rangle\}$

Variabeltilordningen μ_1

$\mu_1(x) =$ 

- *Er det slik at* $\mathcal{M}, \mu_1 \models \exists y \mathsf{Liker}(y, x)$*?*
- Fra fri-variabel semantikken:

$$\mathcal{M}, \mu_1 \models \exists y \mathsf{Liker}(y, x)$$
$$\Updownarrow$$
$$\text{finnes } e \in |\mathcal{M}| \text{ slik at } \mathcal{M}, \mu_1 \models \mathsf{Liker}(\bar{e}, x)$$
$$\Updownarrow$$
$$\text{finnes } e \in |\mathcal{M}| \text{ slik at } \langle \bar{e}^{\mathcal{M},\mu_2}, x^{\mathcal{M},\mu_1} \rangle \in \mathsf{Liker}^{\mathcal{M}}$$
$$\Updownarrow$$
$$\text{finnes } e \in |\mathcal{M}| \text{ slik at } \langle \bar{e}^{\mathcal{M}}, \mu_1(x) \rangle \in \mathsf{Liker}^{\mathcal{M}}$$
$$\Updownarrow$$

finnes $e \in |\mathcal{M}|$ slik at $\langle e,$$\rangle \in \mathsf{Liker}^{\mathcal{M}}$

- **Ja**, både $e =$  og $e =$ .

Eksempel II

Modellen $\mathcal{M}$

$|\mathcal{M}| = \{$, , $\}$

$\mathsf{Liker}^{\mathcal{M}} =$

$\{\langle$, $\rangle$, $\langle$, $\rangle$,

$\langle$, $\rangle$, $\langle$, $\rangle\}$

Variabeltilordningen μ_2

$\mu_2(x) =$ 

- *Er det slik at* $\mathcal{M}, \mu_2 \models \exists y \mathsf{Liker}(y, x)$*?*
- Fra fri-variabel semantikken:

$$\mathcal{M}, \mu_2 \models \exists y \mathsf{Liker}(y, x)$$
$$\Updownarrow$$
$$\text{finnes } e \in |\mathcal{M}| \text{ slik at } \mathcal{M}, \mu_2 \models \mathsf{Liker}(\bar{e}, x)$$
$$\Updownarrow$$
$$\text{finnes } e \in |\mathcal{M}| \text{ slik at } \langle \bar{e}^{\mathcal{M},\mu_2}, x^{\mathcal{M},\mu_2} \rangle \in \mathsf{Liker}^{\mathcal{M}}$$
$$\Updownarrow$$
$$\text{finnes } e \in |\mathcal{M}| \text{ slik at } \langle \bar{e}^{\mathcal{M}}, \mu_2(x) \rangle \in \mathsf{Liker}^{\mathcal{M}}$$
$$\Updownarrow$$

finnes $e \in |\mathcal{M}|$ slik at $\langle e,$$\rangle \in \mathsf{Liker}^{\mathcal{M}}$

- **Nei**, ingen slik $e \in |\mathcal{M}|$ finnes.

Falsifiserbarhet

- Vi har tidligere definert gyldighet av en *lukket* sekvent $\Gamma \vdash \Delta$ slik:
  - Enhver modell som oppfyller alle formlene i Γ må oppfylle minst én formel i Δ.

- Vi kan også definere en gyldig sekvent som en sekvent som *ikke* er falsifiserbar.
- En sekvent $\Gamma \vdash \Delta$ er falsifiserbar hvis den har en *motmodell*, dvs. en modell som oppfyller alle formlene i Γ og gjør alle formlene i Δ usanne.
- I fri-variabel LK kan Γ og Δ inneholde formler som *ikke* er lukket.
- Vi ønsker at en motmodell til en sekvent skal være en motmodell *uavhengig* av hvordan vi tolker de frie variablene.

Falsifiserbarhet II

Se på sekventen $Qx \vdash Px$

- En motmodell vil f.eks. være modellen $\mathcal{M}$ slik at $|\mathcal{M}| = \{a, b\}$, $Q^{\mathcal{M}} = \{a, b\}$ og $P^{\mathcal{M}} = \emptyset$.
- Her finnes to aktuelle variabeltilordninger: $\mu_1(x) = a$ og $\mu_2(x) = b$.
- Uansett hvilken av disse vi bruker til å tolke de frie variablene, så vil $\mathcal{M}$ være en motmodell til sekventen.

Se på sekventen $Px \vdash Pa$

- Et forsøk på lage en motmodell kan være $\mathcal{M}'$ slik at $|\mathcal{M}'| = \{a, b\}$ og $P^{\mathcal{M}'} = \{b\}$.
- Hvis vi tolker x som b, ser vi at $\mathcal{M}'$ oppfyller Px og falsifiserer Pa.
- Men hvis vi tolker x som a, ser vi at $\mathcal{M}'$ ikke lenger er en motmodell.
- Her finnes en variabeltilordning som gjør at $\mathcal{M}'$ ikke er en motmodell til sekventen.

Falsifiserbarhet III

- Hvorvidt en modell $\mathcal{M}$ er en motmodell til en sekvent $\Gamma \vdash \Delta$ avhenger altså av hvilke sannhetsverdier formlene i Γ og Δ får for *hver enkelt* variabeltilordning for $\mathcal{M}$.
- Det leder til følgende definisjon.

Definisjon 1.11 (Falsifiserbar sekvent)**.** *En modell $\mathcal{M}$ er en* motmodell *til en sekvent $\Gamma \vdash \Delta$ hvis følgende holder for* alle *variabeltilordninger μ for $\mathcal{M}$:*

- *$\mathcal{M}, \mu$ gjør alle formlene i Γ sanne, og*
- *$\mathcal{M}, \mu$ gjør alle formlene i Δ usanne.*

En sekvent er

- falsifiserbar *hvis den har en motmodell*
- gyldig *hvis den ikke er falsifiserbar*

1.3 Sunnhet

Definisjon 1.12 (Sunnhet)**.** *En sekventkalkyle er* sunn *dersom enhver bevisbar sekvent er gyldig.*

- Kjernen i sunnhetsbeviset for utsagnslogisk LK og grunn LK er at slutningsreglene bevarer falsifiserbarhet oppover.
- Reglene i fri-variabel LK har *ikke* denne egenskapen!

β-regelen bevarer ikke falsifiserbarhet oppover

- Se på slutningen

$$\frac{Pu \vdash Pa, Qb \qquad Qu \vdash Pa, Qb}{Pu \vee Qu \vdash Pa, Qb}$$

- La $\mathcal{M}$ være en modell slik at $|\mathcal{M}| = \{a, b\}$, $a^{\mathcal{M}} = a$, $b^{\mathcal{M}} = b$, $P^{\mathcal{M}} = \{b\}$ og $Q^{\mathcal{M}} = \{a\}$.
- Vi har to aktuelle variabeltilordninger for $\mathcal{M}$: $\mu_1(u) = a$ og $\mu_2(u) = b$.
- $\mathcal{M}$ falsifiserer konklusjonen:
  - $\mathcal{M}$ falsifiserer begge formlene i succedenten.
  - $\mathcal{M}, \mu_1 \models Qu$ og $\mathcal{M}, \mu_2 \models Pu$, så $\mathcal{M}$ gjør formelen i antecedenten sann uavhengig av variabeltilordning.
- Premissene er *ikke* falsifiserbare. (Prøv!)
- Konklusjonen er falsifiserbar, mens premissene *ikke* er det!

Sunnhet – alternativ framgangsmåte

- På grunn av β-slutningene vil en fri variabel kunne forekomme i flere *forskjellige* grener i en utledning.
- De forskjellige forekomstene er *avhengige* av hverandre i den forstand at de må tildeles den samme verdien av en variabeltilordning.
- Vi skal definere hva det vil si at en utledning er *falsifiserbar*.
- Vi skal så vise at alle utledninger med falsifiserbar rotsekvent er falsifiserbare.
- Når vi har denne egenskapen, er resten av sunnhetsbeviset for fri-variabel LK tilsvarende beviset for den grunne kalkylen.

Falsifiserbarhet

- Husk at hvis G er en gren i en utledning, så er
  - $G^{\top}$ alle formler som forekommer i en antecedent på G, og
  - $G^{\perp}$ alle formler som forekommer i en succedent på G.

Definisjon 1.13 (Falsifiserbarhet)**.** *La π være en fri-variabel utledning, og la $\mathcal{M}$ være en modell.*

- *Anta at μ er en variabeltilordning for $\mathcal{M}$. En gren* G *i π er* falsifisert *av $\mathcal{M}$ under μ hvis*
  - *$\mathcal{M}, \mu$ gjør alle formlene i $G^{\top}$ sanne, og*
  - *$\mathcal{M}, \mu$ gjør alle formlene i $G^{\perp}$ usanne.*
- *$\mathcal{M}$* falsifiserer *π hvis for alle variabeltilordninger μ for $\mathcal{M}$ så finnes en gren i π som er falsifisert av $\mathcal{M}$ under μ.*

En utledning er falsifiserbar hvis det finnes en modell som falsifiserer den.

Falsifisert gren avhenger av variabeltilordningen

La π være følgende utledning (der γ-kopiene ikke vises):

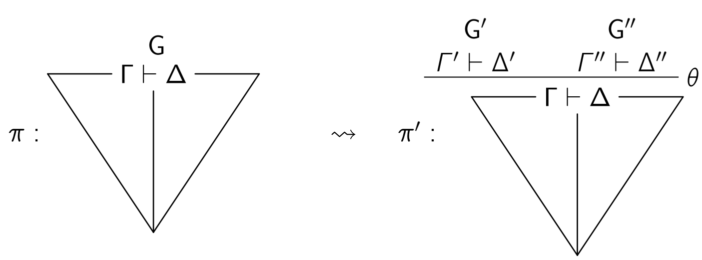
$$\dfrac{\dfrac{Pu \vdash Pa, Qb \qquad Qu \vdash Pa, Qb}{Pu \vee Qu \vdash Pa, Qb}}{\forall x(Px \vee Qx) \vdash Pa, Qb}$$

- La $\mathcal{M}$ være en modell slik at $|\mathcal{M}| = \{a, b\}$, $a^{\mathcal{M}} = a$, $b^{\mathcal{M}} = b$, $P^{\mathcal{M}} = \{b\}$ og $Q^{\mathcal{M}} = \{a\}$.
- $\mathcal{M}$ falsifiserer π:
  - Hvis $\mu_1(u) = a$, så har vi at den høyre grenen er falsifisert av $\mathcal{M}$ under μ_1.
  - Hvis $\mu_2(u) = b$, så har vi at den venstre grenen er falsifisert av $\mathcal{M}$ under μ_2.

Lemma 1.1. *Hvis en slutningsregel fra fri-variabel* LK *anvendes på en falsifiserbar utledning, så får vi en ny falsifiserbar utledning.*

- Vi skal med andre ord vise at reglene *bevarer falsifiserbarhet*.
- Vi får ett tilfelle for hver regel.
- Alle tilfellene bortsett fra δ-reglene (L$\exists$ og R$\forall$) går på samme måte.
- Vi viser først hvordan beviset går for disse og tar δ-reglene til slutt.

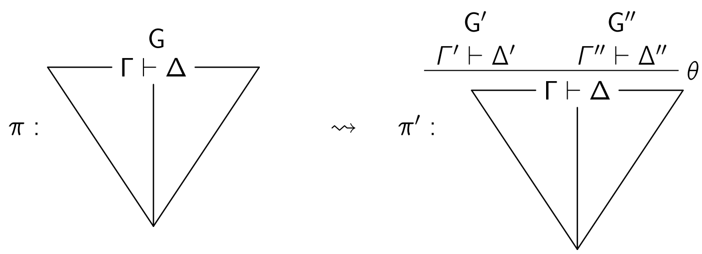
Bevis. Overblikk:



- Anta at π er falsifiserbar.
- Skal vise at π' er falsifiserbar.
- La $\mathcal{M}$ være en modell som falsifiserer π.
- Velg en vilkårlig variabeltilordning μ for $\mathcal{M}$.
- Vi får to tilfeller:
  1. Den grenen i π som er falsifisert av $\mathcal{M}$ under μ er en annen enn G.
  2. Den falsifiserte grenen er G.

□

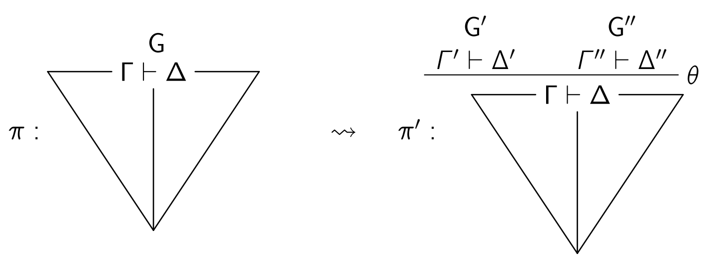
Bevis (tilfelle 1).



- Har antatt at π er falsifiserbar.
- Har valgt en modell $\mathcal{M}$ som falsifiserer π og en variabeltilordning μ for $\mathcal{M}$.
- Har antatt at grenen i π som er falsifisert av $\mathcal{M}$ under μ *ikke* er G.
- Da er den falsifiserte grenen i π også en gren i π'.

□

Bevis (tilfelle 2).



- Har antatt at π er falsifiserbar.
- Har en modell $\mathcal{M}$ som falsifiserer π og en variabeltilordning μ for $\mathcal{M}$.
- Har antatt at G i π er falsifisert av $\mathcal{M}$ under μ.
- Må vise at enten G′ eller G″ er falsifisert i π'.
- Vi får ett tilfelle for hver LK-regel.
- Vi viser argumentet for L$\vee$ og L$\forall$.

□

Bevis (tilfelle 2 – L$\vee$).

$$\cfrac{\begin{matrix} \mathsf{G}' \\ \Gamma, A \vdash \Delta \end{matrix} \qquad \begin{matrix} \mathsf{G}'' \\ \Gamma, B \vdash \Delta \end{matrix}}{\Gamma, A \vee B \vdash \Delta}\ \mathsf{L}\vee$$

$$\Big|\ \mathsf{G}$$

- Siden konklusjonen er på G og G er falsifisert av $\mathcal{M}$ under μ, så har vi at $\mathcal{M}, \mu \models \Gamma \cup \{A \vee B\}$ og at $\mathcal{M}, \mu$ gjør alle i Δ usanne.
- Fra fri-variabel semantikken har vi at $\mathcal{M}, \mu \models A$ *eller* $\mathcal{M}, \mu \models B$.
- Hvis $\mathcal{M}, \mu \models A$, så er G$'$ falsifisert av $\mathcal{M}$ under μ.
- Hvis $\mathcal{M}, \mu \models B$, så er G$''$ falsifisert av $\mathcal{M}$ under μ.

□

Bevis (tilfelle 2 – L$\forall$).

$$\cfrac{\begin{matrix} \mathsf{G}' \\ \Gamma, \forall x\varphi, \varphi[u/x] \vdash \Delta \end{matrix}}{\Gamma, \forall x\varphi \vdash \Delta}\ \mathsf{L}\forall$$

$$\Big|\ \mathsf{G}$$

- Siden konklusjonen er på G og G er falsifisert av $\mathcal{M}$ under μ, så har vi at $\mathcal{M}, \mu \models \Gamma \cup \{\forall x\varphi\}$ og at $\mathcal{M}, \mu$ gjør alle i Δ usanne.
- Anta at $\mu(u) = e$ (der $e \in |\mathcal{M}|$).
- Siden $\mathcal{M}, \mu \models \forall x\varphi$ har vi fra fri-variabel semantikken at $\mathcal{M}, \mu \models \varphi[\bar{a}/x]$ for *alle* $a \in |\mathcal{M}|$.
- Spesielt vil $\mathcal{M}, \mu \models \varphi[\bar{e}/x]$, men da vil $\mathcal{M}, \mu \models \varphi[u/x]$.
- Da er G$'$ falsifisert av $\mathcal{M}$ under μ.

□

Steget fra $\mathcal{M}, \mu \models \varphi[\bar{e}/x]$ til $\mathcal{M}, \mu \models \varphi[u/x]$ kan vises ved strukturell induksjon på formler. Mulig ukeoppgave...

Bevis (δ-regler). Når en δ-regel anvendes, må vi vise lemmaet på en annen måte. Vi gjør tilfellet for L$\exists$.

$$\cfrac{\begin{matrix} \mathsf{G}' \\ \Gamma, \varphi[f(u_1, \ldots, u_n)/x] \vdash \Delta \end{matrix}}{\Gamma, \exists x\varphi \vdash \Delta}\ \mathsf{L}\exists$$

$$\Big|\ \mathsf{G}$$

- La $\mathcal{M}'$ være en modell som er *lik* $\mathcal{M}$ bortsett fra tolkningen av f, som defineres som følger:
  - La $a_1, \ldots, a_n \in |\mathcal{M}'|$ og la μ' være en variabeltilordning slik at $\mu'(u_i) = a_i$ for $1 \leq i \leq n$.

  - Hvis $\mathcal{M}, \mu' \models \exists x \varphi$, så finnes $e \in |\mathcal{M}|$ slik at $\mathcal{M}, \mu' \models \varphi[\bar{e}/x]$. La $f^{\mathcal{M}'}(a_1, \ldots, a_n) = e$.
  - Hvis $\mathcal{M}, \mu' \not\models \exists x \varphi$, så la $f^{\mathcal{M}'}(a_1, \ldots, a_n)$ være et vilkårlig element i $|\mathcal{M}'|$.

- Påstand: $\mathcal{M}'$ falsifiserer π'. Oppgave!

$\square$

Lemma 1.2. *Enhver utledning med falsifiserbar rotsekvent er falsifiserbar.*

Bevis. Ved strukturell induksjon på utledninger.

- Basistilfellet: rotsekventen er falsifiserbar.
- Induksjonssteget: følger fra Lemma.

$\square$

Lemma 1.3. *La $\mathcal{M}$ være en modell, og la σ være en grunn substitusjon. La μ være en variabeltilordning slik at $\mu(x) = (x\sigma)^{\mathcal{M}}$ for hver variabel x i støtten til σ. Hvis φ er en formel slik at de frie variablene i φ er med i støtten til σ, så holder $\mathcal{M}, \mu \models \varphi$ hvis og bare hvis $\mathcal{M} \models \varphi\sigma$.*

Bevis. Ukeoppgave. $\square$

Teorem 1.1 (Sunnhet)**.** *Sekventkalkylen fri-variabel* LK *er sunn.*

Bevis.

- Anta at $\langle \pi, \sigma \rangle$ er et bevis for $\Gamma \vdash \Delta$.
- Anta for motsigelse at $\Gamma \vdash \Delta$ *ikke* er gyldig, men er falsifiserbar.
- Ved Lemma finnes en modell $\mathcal{M}$ som falsifiserer π.
- La μ være en variabeltilordning slik at $\mu(x) = (x\sigma)^{\mathcal{M}}$ for hver variabel x i støtten til σ.
- Da finnes en gren G i π som er falsifisert av $\mathcal{M}$ under μ.
- Siden σ lukker løvsekventen på G, så finnes atomære formler $\varphi \in \mathsf{G}^\top$ og $\psi \in \mathsf{G}^\perp$ slik at $\varphi\sigma = \psi\sigma$.
- Siden G er falsifisert av $\mathcal{M}$ under μ, så $\mathcal{M}, \mu \models \varphi$ og $\mathcal{M}, \mu \not\models \psi$.
- Fra Lemma har vi $\mathcal{M} \models \varphi\sigma$ og $\mathcal{M} \not\models \psi\sigma$. Men $\varphi\sigma = \psi\sigma$, motsigelse.

$\square$