

INF3170 – Logikk

Forelesning 12: Automatisk bevissøk III –
fri-variabel kompletthet og repetisjon av sunnhet

Christian Mahesh Hansen

Institutt for informatikk, Universitetet i Oslo

30. april 2007



Dagens plan

- 1 Kompletthet av fri-variabel LK
- 2 Repetisjon: sannhet av fri-variabel LK

Kompletthet av fri-variabel LK

Teorem (Kompletthet)

Hvis $\Gamma \vdash \Delta$ er gyldig, så er den bevisbar i fri-variabel LK.

Kompletthet av fri-variabel LK

Teorem (Kompletthet)

Hvis $\Gamma \vdash \Delta$ er gyldig, så er den bevisbar i fri-variabel LK.

For å vise *kompletthet*, viser vi den ekvivalente påstanden:

Kompletthet av fri-variabel LK

Teorem (Kompletthet)

Hvis $\Gamma \vdash \Delta$ er gyldig, så er den bevisbar i fri-variabel LK.

For å vise *kompletthet*, viser vi den ekvivalente påstanden:

Lemma (Modelleksistens)

Hvis $\Gamma \vdash \Delta$ ikke er bevisbar i LK, så er den falsifiserbar.

Kompletthet av fri-variabel LK

Teorem (Kompletthet)

Hvis $\Gamma \vdash \Delta$ er gyldig, så er den bevisbar i fri-variabel LK.

For å vise *kompletthet*, viser vi den ekvivalente påstanden:

Lemma (Modelleksistens)

Hvis $\Gamma \vdash \Delta$ ikke er bevisbar i LK, så er den falsifiserbar.

Husk:

- En modell \mathcal{M} **falsifiserer** $\Gamma \vdash \Delta$ hvis ethvert valg av variabeltilordning for \mathcal{M} gjør alle formler i Γ sanne og alle formler i Δ usanne.

Kompletthet av fri-variabel LK

Teorem (Kompletthet)

Hvis $\Gamma \vdash \Delta$ er gyldig, så er den bevisbar i fri-variabel LK.

For å vise *kompletthet*, viser vi den ekvivalente påstanden:

Lemma (Modelleksistens)

Hvis $\Gamma \vdash \Delta$ ikke er bevisbar i LK, så er den falsifiserbar.

Husk:

- En modell \mathcal{M} **falsifiserer** $\Gamma \vdash \Delta$ hvis ethvert valg av variabeltilordning for \mathcal{M} gjør alle formler i Γ sanne og alle formler i Δ usanne.
- Hvis formlene i Γ og Δ er *lukkede*, vil sannhetsverdiene til formlene under \mathcal{M} være *uavhengig av variabeltilordning*.

Modelleksistens for grunn LK – repetisjon

Modelleksistens for grunn LK – repetisjon

Beviset for modelleksistens for fri-variabel LK bygger på beviset for grunn LK.

Modelleksistens for grunn LK – repetisjon

Beviset for modelleksistens for fri-variabel LK bygger på beviset for grunn LK. Hovedtrekkene i beviset for grunn LK:

Modelleksistens for grunn LK – repetisjon

Beviset for modelleksistens for fri-variabel LK bygger på beviset for grunn LK. Hovedtrekkene i beviset for grunn LK:

- Vi antar at en sekvent $\Gamma \vdash \Delta$ ikke er bevisbar i grunn LK.

Modelleksistens for grunn LK – repetisjon

Beviset for modelleksistens for fri-variabel LK bygger på beviset for grunn LK. Hovedtrekkene i beviset for grunn LK:

- Vi antar at en sekvent $\Gamma \vdash \Delta$ ikke er bevisbar i grunn LK.
 - Det betyr at alle utledninger med rotsekvent $\Gamma \vdash \Delta$ har en åpen gren.

Modelleksistens for grunn LK – repetisjon

Beviset for modelleksistens for fri-variabel LK bygger på beviset for grunn LK. Hovedtrekkene i beviset for grunn LK:

- Vi antar at en sekvent $\Gamma \vdash \Delta$ **ikke** er bevisbar i grunn LK.
 - Det betyr at alle utledninger med rotsekvent $\Gamma \vdash \Delta$ har en åpen gren.
- Vi bruker en **rettferdig strategi** til å konstruere en **grenseutledning** for $\Gamma \vdash \Delta$ der hver åpen gren G har følgende egenskaper:

Modelleksistens for grunn LK – repetisjon

Beviset for modelleksistens for fri-variabel LK bygger på beviset for grunn LK. Hovedtrekkene i beviset for grunn LK:

- Vi antar at en sekvent $\Gamma \vdash \Delta$ **ikke** er bevisbar i grunn LK.
 - Det betyr at alle utledninger med rotsekvent $\Gamma \vdash \Delta$ har en åpen gren.
- Vi bruker en **rettferdig strategi** til å konstruere en **grenseutledning** for $\Gamma \vdash \Delta$ der hver åpen gren G har følgende egenskaper:
 - enhver α -, β - og δ -formel på G er hovedformel i en slutning på G

Modelleksistens for grunn LK – repetisjon

Beviset for modelleksistens for fri-variabel LK bygger på beviset for grunn LK. Hovedtrekkene i beviset for grunn LK:

- Vi antar at en sekvent $\Gamma \vdash \Delta$ **ikke** er bevisbar i grunn LK.
 - Det betyr at alle utledninger med rotsekvent $\Gamma \vdash \Delta$ har en åpen gren.
- Vi bruker en **rettferdig strategi** til å konstruere en **grenseutledning** for $\Gamma \vdash \Delta$ der hver åpen gren G har følgende egenskaper:
 - enhver α -, β - og δ -formel på G er hovedformel i en slutning på G , og
 - hvis G inneholder en γ -formel på formen $Qx\varphi$, så er $\varphi[t/x]$ aktiv formel i en slutning på G for hver term t i Herbrand-universet til G .

Modelleksistens for grunn LK – repetisjon

Beviset for modelleksistens for fri-variabel LK bygger på beviset for grunn LK. Hovedtrekkene i beviset for grunn LK:

- Vi antar at en sekvent $\Gamma \vdash \Delta$ **ikke** er bevisbar i grunn LK.
 - Det betyr at alle utledninger med rotsekvent $\Gamma \vdash \Delta$ har en åpen gren.
- Vi bruker en **rettferdig strategi** til å konstruere en **grenseutledning** for $\Gamma \vdash \Delta$ der hver åpen gren G har følgende egenskaper:
 - enhver α -, β - og δ -formel på G er hovedformel i en slutning på G , og
 - hvis G inneholder en γ -formel på formen $Qx\varphi$, så er $\varphi[t/x]$ aktiv formel i en slutning på G for hver term t i Herbrand-universet til G .
 - *“Alle mulige regelanvendelser er forsøkt på alle åpne grener.”*

Modelleksistens for grunn LK – repetisjon

Beviset for modelleksistens for fri-variabel LK bygger på beviset for grunn LK. Hovedtrekkene i beviset for grunn LK:

- Vi antar at en sekvent $\Gamma \vdash \Delta$ **ikke** er bevisbar i grunn LK.
 - Det betyr at alle utledninger med rotsekvent $\Gamma \vdash \Delta$ har en åpen gren.
- Vi bruker en **rettferdig strategi** til å konstruere en **grenseutledning** for $\Gamma \vdash \Delta$ der hver åpen gren G har følgende egenskaper:
 - enhver α -, β - og δ -formel på G er hovedformel i en slutning på G , og
 - hvis G inneholder en γ -formel på formen $Qx\varphi$, så er $\varphi[t/x]$ aktiv formel i en slutning på G for hver term t i Herbrand-universet til G .
 - *“Alle mulige regelanvendelser er forsøkt på alle åpne grener.”*
- Siden $\Gamma \vdash \Delta$ ikke er bevisbar, så må grenseutledningen inneholde en **åpen** gren G (ved Königs lemma).

Modelleksistens for grunn LK – repetisjon II

- Vi benytter informasjonen i G til å konstruere en Herbrand-modell \mathcal{M} på følgende måte:

Modelleksistens for grunn LK – repetisjon II

- Vi benytter informasjonen i G til å konstruere en Herbrand-modell \mathcal{M} på følgende måte:
 - Domenet til \mathcal{M} er Herbrand-universet til G .

Modelleksistens for grunn LK – repetisjon II

- Vi benytter informasjonen i G til å konstruere en Herbrand-modell \mathcal{M} på følgende måte:
 - Domenet til \mathcal{M} er Herbrand-universet til G .
 - For lukkede termer t på G : $t^{\mathcal{M}} = t$

Modelleksistens for grunn LK – repetisjon II

- Vi benytter informasjonen i G til å konstruere en Herbrand-modell \mathcal{M} på følgende måte:
 - Domenet til \mathcal{M} er Herbrand-universet til G .
 - For lukkede termer t på G : $t^{\mathcal{M}} = t$
 - For n -ære relasjonssymboler P på G :
 $\langle t_1, \dots, t_n \rangle \in P^{\mathcal{M}} \Leftrightarrow P(t_1, \dots, t_n) \in G^T$

Modelleksistens for grunn LK – repetisjon II

- Vi benytter informasjonen i G til å konstruere en Herbrand-modell \mathcal{M} på følgende måte:
 - Domenet til \mathcal{M} er Herbrand-universet til G .
 - For lukkede termer t på G : $t^{\mathcal{M}} = t$
 - For n -ære relasjonssymboler P på G :
 $\langle t_1, \dots, t_n \rangle \in P^{\mathcal{M}} \Leftrightarrow P(t_1, \dots, t_n) \in G^{\top}$
- *Husk: Herbrand-universet til en gren er mengden av alle **grunne** termer som kan konstrueres fra konstant- og funksjonssymboler på grenen.*

Modelleksistens for grunn LK – repetisjon II

- Vi benytter informasjonen i G til å konstruere en Herbrand-modell \mathcal{M} på følgende måte:
 - Domenet til \mathcal{M} er Herbrand-universet til G .
 - For lukkede termer t på G : $t^{\mathcal{M}} = t$
 - For n -ære relasjonssymboler P på G :
 $\langle t_1, \dots, t_n \rangle \in P^{\mathcal{M}} \Leftrightarrow P(t_1, \dots, t_n) \in G^{\top}$
- *Husk: Herbrand-universet til en gren er mengden av alle grunne termer som kan konstrueres fra konstant- og funksjonssymboler på grenen.*
- Vi viser så ved strukturell induksjon på formler i G at \mathcal{M} oppfyller alle formler i G^{\top} og falsifiserer alle formler i G^{\perp} .

Modelleksistens for grunn LK – repetisjon II

- Vi benytter informasjonen i G til å konstruere en Herbrand-modell \mathcal{M} på følgende måte:
 - Domenet til \mathcal{M} er Herbrand-universet til G .
 - For lukkede termer t på G : $t^{\mathcal{M}} = t$
 - For n -ære relasjonssymboler P på G :
 $\langle t_1, \dots, t_n \rangle \in P^{\mathcal{M}} \Leftrightarrow P(t_1, \dots, t_n) \in G^{\top}$
- *Husk: Herbrand-universet til en gren er mengden av alle grunne termer som kan konstrueres fra konstant- og funksjonssymboler på grenen.*
- Vi viser så ved strukturell induksjon på formler i G at \mathcal{M} oppfyller alle formler i G^{\top} og falsifiserer alle formler i G^{\perp} .
 - Basissteget har to tilfeller: $P(t_1, \dots, t_n) \in G^{\top}$ og $P(t_1, \dots, t_n) \in G^{\perp}$.

Modelleksistens for grunn LK – repetisjon II

- Vi benytter informasjonen i G til å konstruere en Herbrand-modell \mathcal{M} på følgende måte:
 - Domenet til \mathcal{M} er Herbrand-universet til G .
 - For lukkede termer t på G : $t^{\mathcal{M}} = t$
 - For n -ære relasjonssymboler P på G :
 $\langle t_1, \dots, t_n \rangle \in P^{\mathcal{M}} \Leftrightarrow P(t_1, \dots, t_n) \in G^{\top}$
- *Husk: Herbrand-universet til en gren er mengden av alle grunne termer som kan konstrueres fra konstant- og funksjonssymboler på grenen.*
- Vi viser så ved strukturell induksjon på formler i G at \mathcal{M} oppfyller alle formler i G^{\top} og falsifiserer alle formler i G^{\perp} .
 - Basissteget har to tilfeller: $P(t_1, \dots, t_n) \in G^{\top}$ og $P(t_1, \dots, t_n) \in G^{\perp}$.
 - I induksjonssteget får vi ett hovedtilfelle for hvert konnektiv.

Modelleksistens for grunn LK – repetisjon II

- Vi benytter informasjonen i G til å konstruere en Herbrand-modell \mathcal{M} på følgende måte:
 - Domenet til \mathcal{M} er Herbrand-universet til G .
 - For lukkede termer t på G : $t^{\mathcal{M}} = t$
 - For n -ære relasjonssymboler P på G :
 $\langle t_1, \dots, t_n \rangle \in P^{\mathcal{M}} \Leftrightarrow P(t_1, \dots, t_n) \in G^{\top}$
- *Husk: Herbrand-universet til en gren er mengden av alle grunne termer som kan konstrueres fra konstant- og funksjonssymboler på grenen.*
- Vi viser så ved strukturell induksjon på formler i G at \mathcal{M} oppfyller alle formler i G^{\top} og falsifiserer alle formler i G^{\perp} .
 - Basissteget har to tilfeller: $P(t_1, \dots, t_n) \in G^{\top}$ og $P(t_1, \dots, t_n) \in G^{\perp}$.
 - I induksjonssteget får vi ett hovedtilfelle for hvert konnektiv.
 - I hvert hovedtilfelle må vi se på om formelen forekommer i G^{\top} eller G^{\perp} .

Modelleksistens for grunn LK – repetisjon II

- Vi benytter informasjonen i G til å konstruere en Herbrand-modell \mathcal{M} på følgende måte:
 - Domenet til \mathcal{M} er Herbrand-universet til G .
 - For lukkede termer t på G : $t^{\mathcal{M}} = t$
 - For n -ære relasjonssymboler P på G :
 $\langle t_1, \dots, t_n \rangle \in P^{\mathcal{M}} \Leftrightarrow P(t_1, \dots, t_n) \in G^{\top}$
- *Husk: Herbrand-universet til en gren er mengden av alle grunne termer som kan konstrueres fra konstant- og funksjonssymboler på grenen.*
- Vi viser så ved strukturell induksjon på formler i G at \mathcal{M} oppfyller alle formler i G^{\top} og falsifiserer alle formler i G^{\perp} .
 - Basissteget har to tilfeller: $P(t_1, \dots, t_n) \in G^{\top}$ og $P(t_1, \dots, t_n) \in G^{\perp}$.
 - I induksjonssteget får vi ett hovedtilfelle for hvert konnektiv.
 - I hvert hovedtilfelle må vi se på om formelen forekommer i G^{\top} eller G^{\perp} .
- Det følger at \mathcal{M} falsifiserer $\Gamma \vdash \Delta$, siden $\Gamma \subseteq G^{\top}$ og $\Delta \subseteq G^{\perp}$.

Modelleksistens for grunn LK – repetisjon III

- I argumentet for at \mathcal{M} oppfyller alle formler i G^\top og falsifiserer alle formler i G^\perp gjør vi strukturell induksjon på formlene i G .

Modelleksistens for grunn LK – repetisjon III

- I argumentet for at \mathcal{M} oppfyller alle formler i G^\top og falsifiserer alle formler i G^\perp gjør vi strukturell induksjon på formlene i G .
- Basissteget følger pr. definisjon av Herbrand-modellen \mathcal{M} .

Modelleksistens for grunn LK – repetisjon III

- I argumentet for at \mathcal{M} oppfyller alle formler i G^\top og falsifiserer alle formler i G^\perp gjør vi strukturell induksjon på formelene i G .
- Basissteget følger pr. definisjon av Herbrand-modellen \mathcal{M} .
- I induksjonssteget antar vi at en formel φ forekommer på den åpne grenen G og benytter oss av at grenseutledningen er konstruert med en rettferdig strategi:

Modelleksistens for grunn LK – repetisjon III

- I argumentet for at \mathcal{M} oppfyller alle formler i G^\top og falsifiserer alle formler i G^\perp gjør vi strukturell induksjon på formlene i G .
- Basissteget følger pr. definisjon av Herbrand-modellen \mathcal{M} .
- I induksjonssteget antar vi at en formel φ forekommer på den åpne grenen G og benytter oss av at grenseutledningen er konstruert med en rettferdig strategi:
 - For α -, β - og δ -formler bruker vi at φ er hovedformel i en slutning på G , og at de umiddelbare delformlene til φ derfor må være i G .

Modelleksistens for grunn LK – repetisjon III

- I argumentet for at \mathcal{M} oppfyller alle formler i G^\top og falsifiserer alle formler i G^\perp gjør vi strukturell induksjon på formlene i G .
- Basissteget følger pr. definisjon av Herbrand-modellen \mathcal{M} .
- I induksjonssteget antar vi at en formel φ forekommer på den åpne grenen G og benytter oss av at grenseutledningen er konstruert med en rettferdig strategi:
 - For α -, β - og δ -formler bruker vi at φ er hovedformel i en slutning på G , og at de umiddelbare delformlene til φ derfor må være i G .
 - For γ -formler bruker vi at den umiddelbare delformelen til φ er instansiert med alle termer i Herbrand-universet til G .

Modelleksistens for grunn LK – repetisjon III

- I argumentet for at \mathcal{M} oppfyller alle formler i G^\top og falsifiserer alle formler i G^\perp gjør vi strukturell induksjon på formlene i G .
- Basissteget følger pr. definisjon av Herbrand-modellen \mathcal{M} .
- I induksjonssteget antar vi at en formel φ forekommer på den åpne grenen G og benytter oss av at grenseutledningen er konstruert med en rettferdig strategi:
 - For α -, β - og δ -formler bruker vi at φ er hovedformel i en slutning på G , og at de umiddelbare delformlene til φ derfor må være i G .
 - For γ -formler bruker vi at den umiddelbare delformelen til φ er instansiert med alle termer i Herbrand-universet til G .
- Siden delformlene er av enklere struktur enn φ , kan vi anta at påstanden holder for disse, og bruke semantikken til å slutte at påstanden holder for φ .

Modelleksistens for fri-variabel LK

- I beviset for modelleksistens for fri-variabel LK skal vi

Modelleksistens for fri-variabel LK

- I beviset for modelleksistens for fri-variabel LK skal vi
 - bruke en **rettferdig strategi** til å konstruere en grenseutledning med en åpen gren for en ikke-bevisbar sekvent, og

Modelleksistens for fri-variabel LK

- I beviset for modelleksistens for fri-variabel LK skal vi
 - bruke en **rettferdig strategi** til å konstruere en grenseutledning med en åpen gren for en ikke-bevisbar sekvent, og
 - anvende en **grunn** substitusjon på alle formlene i den åpne grenen slik at alle frie variable blir instansiert med grunne termer.

Modelleksistens for fri-variabel LK

- I beviset for modelleksistens for fri-variabel LK skal vi
 - bruke en **rettferdig strategi** til å konstruere en grenseutledning med en åpen gren for en ikke-bevisbar sekvent, og
 - anvende en **grunn** substitusjon på alle formlene i den åpne grenen slik at alle frie variable blir instansiert med grunne termer.
- Vi kan så konstruere en Herbrand-modell fra den **grunnede** åpne grenen på samme måte som for grunn LK, og bruke det samme induksjonsargumentet.

Modelleksistens for fri-variabel LK

- I beviset for modelleksistens for fri-variabel LK skal vi
 - bruke en **rettferdig strategi** til å konstruere en grenseutledning med en åpen gren for en ikke-bevisbar sekvent, og
 - anvende en **grunn** substitusjon på alle formlene i den åpne grenen slik at alle frie variable blir instansiert med grunne termer.
- Vi kan så konstruere en Herbrand-modell fra den **grunnede** åpne grenen på samme måte som for grunn LK, og bruke det samme induksjonsargumentet.
- I fri-variabel LK introduserer γ -reglene imidlertid **frie variable** istedenfor termer, så vi trenger en ny definisjon av **rettferdig strategi**.

Modelleksistens for fri-variabel LK

- I beviset for modelleksistens for fri-variabel LK skal vi
 - bruke en **rettferdig strategi** til å konstruere en grenseutledning med en åpen gren for en ikke-bevisbar sekvent, og
 - anvende en **grunn** substitusjon på alle formlene i den åpne grenen slik at alle frie variable blir instansiert med grunne termer.
- Vi kan så konstruere en Herbrand-modell fra den **grunnede** åpne grenen på samme måte som for grunn LK, og bruke det samme induksjonsargumentet.
- I fri-variabel LK introduserer γ -reglene imidlertid **frie variable** istedenfor termer, så vi trenger en ny definisjon av **rettferdig strategi**.
- Vi må også velge den grunnende substitusjonen slik at den grunnede åpne grenen får samme egenskaper m.h.p. γ -formler som i grenseutledningen i grunn LK.

Rettferdig strategi for fri-variabel LK

Rettferdig strategi for fri-variabel LK

- En rettferdig strategi vil før eller senere anvende en regel på enhver ikke-atomær formel i en løvsekvent i utledningen.

Rettferdig strategi for fri-variabel LK

- En rettferdig strategi vil før eller senere anvende en regel på enhver ikke-atomær formel i en løvsekvent i utledningen.
- Siden hovedformelen i en γ -slutning kopieres, vil vi (hvis vi fortsetter å anvende regler i det uendelige) måtte introdusere uendelig mange frie variable for hver γ -formel på en gren.

Rettferdig strategi for fri-variabel LK

- En rettferdig strategi vil før eller senere anvende en regel på enhver ikke-atomær formel i en løvsekvent i utledningen.
- Siden hovedformelen i en γ -slutning kopieres, vil vi (hvis vi fortsetter å anvende regler i det uendelige) måtte introdusere uendelig mange frie variable for hver γ -formel på en gren.

Definisjon (Rettferdig strategi)

Rettferdig strategi for fri-variabel LK

- En rettferdig strategi vil før eller senere anvende en regel på enhver ikke-atomær formel i en løvsekvent i utledningen.
- Siden hovedformelen i en γ -slutning kopieres, vil vi (hvis vi fortsetter å anvende regler i det uendelige) måtte introdusere uendelig mange frie variable for hver γ -formel på en gren.

Definisjon (Rettferdig strategi)

*En strategi er **rettferdig** hvis enhver grenseutledning som fås ved å følge strategien har følgende egenskaper:*

Rettferdig strategi for fri-variabel LK

- En rettferdig strategi vil før eller senere anvende en regel på enhver ikke-atomær formel i en løvsekvent i utledningen.
- Siden hovedformelen i en γ -slutning kopieres, vil vi (hvis vi fortsetter å anvende regler i det uendelige) måtte introdusere uendelig mange frie variable for hver γ -formel på en gren.

Definisjon (Rettferdig strategi)

En strategi er *rettferdig* hvis enhver grenseutledning som fås ved å følge strategien har følgende egenskaper:

- 1 Hvis φ er en α -, β - eller δ -formel i en gren, så er φ hovedformel i en slutning i grenen.

Rettferdig strategi for fri-variabel LK

- En rettferdig strategi vil før eller senere anvende en regel på enhver ikke-atomær formel i en løvsekvent i utledningen.
- Siden hovedformelen i en γ -slutning kopieres, vil vi (hvis vi fortsetter å anvende regler i det uendelige) måtte introdusere uendelig mange frie variable for hver γ -formel på en gren.

Definisjon (Rettferdig strategi)

En strategi er *rettferdig* hvis enhver grenseutledning som fås ved å følge strategien har følgende egenskaper:

- 1 Hvis φ er en α -, β - eller δ -formel i en gren, så er φ hovedformel i en slutning i grenen.
- 2 Hvis φ er en γ -formel på formen $Qx\psi$ i en gren, så er $\psi[u/x]$ aktiv formel i en slutning i grenen, for *uendelig* mange variable u .

Rettferdig substitusjon

Rettferdig substitusjon

$$\begin{array}{c}
 \vdots \\
 \forall x P x, P u_1, P u_2, P u_3 \vdash Q f a \\
 \hline
 \forall x P x, P u_1, P u_2 \vdash Q f a \\
 \hline
 \forall x P x, P u_1 \vdash Q f a \\
 \hline
 \forall x P x \vdash Q f a
 \end{array}$$

Rettferdig substitusjon

- Grenseutledningen til høyre er generert med en rettferdig strategi.

$$\begin{array}{c}
 \vdots \\
 \frac{\forall xPx, Pu_1, Pu_2, Pu_3 \vdash Qfa}{\forall xPx, Pu_1, Pu_2 \vdash Qfa} \\
 \frac{\quad}{\forall xPx, Pu_1 \vdash Qfa} \\
 \frac{\quad}{\forall xPx \vdash Qfa}
 \end{array}$$

Rettferdig substitusjon

- Grenseutledningen til høyre er generert med en rettferdig strategi.
- Formelen $\forall xPx$ introduserer uendelig mange frie variable u_i .

$$\begin{array}{c}
 \vdots \\
 \forall xPx, Pu_1, Pu_2, Pu_3 \vdash Qfa \\
 \hline
 \forall xPx, Pu_1, Pu_2 \vdash Qfa \\
 \hline
 \forall xPx, Pu_1 \vdash Qfa \\
 \hline
 \forall xPx \vdash Qfa
 \end{array}$$

Rettferdig substitusjon

- Grenseutledningen til høyre er generert med en rettferdig strategi.
- Formelen $\forall xPx$ introduserer uendelig mange frie variable u_i .
- La substitusjonen σ være slik at $\sigma(u_i) = a$ for alle u_i .

$$\begin{array}{c}
 \vdots \\
 \forall xPx, Pu_1, Pu_2, Pu_3 \vdash Qfa \\
 \hline
 \forall xPx, Pu_1, Pu_2 \vdash Qfa \\
 \hline
 \forall xPx, Pu_1 \vdash Qfa \\
 \hline
 \forall xPx \vdash Qfa
 \end{array}$$

Rettferdig substitusjon

- Grenseutledningen til høyre er generert med en rettferdig strategi.
- Formelen $\forall xPx$ introduserer uendelig mange frie variable u_i .
- La substitusjonen σ være slik at $\sigma(u_i) = a$ for alle u_i .
- Utledningen har kun én gren, kall den G.

$$\begin{array}{c}
 \vdots \\
 \frac{\forall xPx, Pu_1, Pu_2, Pu_3 \vdash Qfa}{\forall xPx, Pu_1, Pu_2 \vdash Qfa} \\
 \frac{\quad}{\forall xPx, Pu_1 \vdash Qfa} \\
 \frac{\quad}{\forall xPx \vdash Qfa}
 \end{array}$$

Rettferdig substitusjon

- Grenseutledningen til høyre er generert med en rettferdig strategi.
- Formelen $\forall xPx$ introduserer uendelig mange frie variable u_i .
- La substitusjonen σ være slik at $\sigma(u_i) = a$ for alle u_i .
- Utledningen har kun én gren, kall den G . Hvis vi anvender σ på formlene i G , så vil alle Pu_i -formlene bli til Pa .

$$\begin{array}{c}
 \vdots \\
 \forall xPx, Pu_1, Pu_2, Pu_3 \vdash Qfa \\
 \hline
 \forall xPx, Pu_1, Pu_2 \vdash Qfa \\
 \hline
 \forall xPx, Pu_1 \vdash Qfa \\
 \hline
 \forall xPx \vdash Qfa
 \end{array}$$

Rettferdig substitusjon

- Grenseutledningen til høyre er generert med en rettferdig strategi.
- Formelen $\forall xPx$ introduserer uendelig mange frie variable u_i .
- La substitusjonen σ være slik at $\sigma(u_i) = a$ for alle u_i .
- Utledningen har kun én gren, kall den G. Hvis vi anvender σ på formlene i G, så vil alle Pu_i -formlene bli til Pa .

$$\begin{array}{c}
 \vdots \\
 \forall xPx, Pa, Pa, Pa \vdash Qfa \\
 \hline
 \forall xPx, Pa, Pa \vdash Qfa \\
 \hline
 \forall xPx, Pa \vdash Qfa \\
 \hline
 \forall xPx \vdash Qfa
 \end{array}$$

Rettferdig substitusjon

- Grenseutledningen til høyre er generert med en rettferdig strategi.
- Formelen $\forall xPx$ introduserer uendelig mange frie variable u_i .
- La substitusjonen σ være slik at $\sigma(u_i) = a$ for alle u_i .
- Utledningen har kun én gren, kall den G . Hvis vi anvender σ på formlene i G , så vil alle Pu_i -formlene bli til Pa .
- Vi ser at Herbrand-universet til $G\sigma$ er $a, fa, ffa, fffa, \dots$

$$\begin{array}{c}
 \vdots \\
 \forall xPx, Pa, Pa, Pa \vdash Qfa \\
 \hline
 \forall xPx, Pa, Pa \vdash Qfa \\
 \hline
 \forall xPx, Pa \vdash Qfa \\
 \hline
 \forall xPx \vdash Qfa
 \end{array}$$

Rettferdig substitusjon

- Grenseutledningen til høyre er generert med en rettferdig strategi.
- Formelen $\forall xPx$ introduserer uendelig mange frie variable u_i .
- La substitusjonen σ være slik at $\sigma(u_i) = a$ for alle u_i .
- Utledningen har kun én gren, kall den G . Hvis vi anvender σ på formlene i G , så vil alle Pu_i -formlene bli til Pa .
- Vi ser at Herbrand-universet til $G\sigma$ er $a, fa, ffa, fffa, \dots$. Det finnes nå termer t i Herbrand-universet slik at Pt **ikke** er i $G\sigma$, f.eks. $t = fa$.

$$\frac{\frac{\frac{\vdots}{\forall xPx, Pa, Pa, Pa \vdash Qfa}}{\forall xPx, Pa, Pa \vdash Qfa}}{\forall xPx, Pa \vdash Qfa}}{\forall xPx \vdash Qfa}$$

Rettferdig substitusjon

- Grenseutledningen til høyre er generert med en rettferdig strategi.
- Formelen $\forall xPx$ introduserer uendelig mange frie variable u_i .
- La substitusjonen σ være slik at $\sigma(u_i) = a$ for alle u_i .
- Utledningen har kun én gren, kall den G . Hvis vi anvender σ på formlene i G , så vil alle Pu_i -formlene bli til Pa .
- Vi ser at Herbrand-universet til $G\sigma$ er $a, fa, ffa, fffa, \dots$. Det finnes nå termer t i Herbrand-universet slik at Pt **ikke** er i $G\sigma$, f.eks. $t = fa$.
- Herbrand-modellen generert fra $G\sigma$ vil derfor **ikke** gjøre $\forall xPx$ sann.

$$\frac{\frac{\frac{\vdots}{\forall xPx, Pa, Pa, Pa \vdash Qfa}}{\forall xPx, Pa, Pa \vdash Qfa}}{\forall xPx, Pa \vdash Qfa}}{\forall xPx \vdash Qfa}$$

Rettferdig substitusjon II

- La substitusjonen τ være definert rekursivt slik at

$$\frac{\frac{\frac{\vdots}{\forall x P x, P u_1, P u_2, P u_3 \vdash Q f a}}{\forall x P x, P u_1, P u_2 \vdash Q f a}}{\forall x P x, P u_1 \vdash Q f a}}{\forall x P x \vdash Q f a}$$

Rettferdig substitusjon II

- La substitusjonen τ være definert rekursivt slik at
 - $\tau(u_1) = a$

$$\begin{array}{c}
 \vdots \\
 \frac{\forall x P x, P u_1, P u_2, P u_3 \vdash Q f a}{\forall x P x, P u_1, P u_2 \vdash Q f a} \\
 \frac{\quad}{\forall x P x, P u_1 \vdash Q f a} \\
 \frac{\quad}{\forall x P x \vdash Q f a}
 \end{array}$$

Rettferdig substitusjon II

- La substitusjonen τ være definert rekursivt slik at
 - $\tau(u_1) = a$, og
 - $\tau(u_{i+1}) = f\tau(u_i)$.

$$\begin{array}{c}
 \vdots \\
 \frac{\forall xPx, Pu_1, Pu_2, Pu_3 \vdash Qfa}{\forall xPx, Pu_1, Pu_2 \vdash Qfa} \\
 \frac{\quad}{\forall xPx, Pu_1 \vdash Qfa} \\
 \frac{\quad}{\forall xPx \vdash Qfa}
 \end{array}$$

Rettferdig substitusjon II

- La substitusjonen τ være definert rekursivt slik at
 - $\tau(u_1) = a$, og
 - $\tau(u_{i+1}) = f\tau(u_i)$.
- Vi anvender τ på formlene i grenen G.

$$\begin{array}{c}
 \vdots \\
 \hline
 \forall x P x, P u_1, P u_2, P u_3 \vdash Q f a \\
 \hline
 \forall x P x, P u_1, P u_2 \vdash Q f a \\
 \hline
 \forall x P x, P u_1 \vdash Q f a \\
 \hline
 \forall x P x \vdash Q f a
 \end{array}$$

Rettferdig substitusjon II

- La substitusjonen τ være definert rekursivt slik at
 - $\tau(u_1) = a$, og
 - $\tau(u_{i+1}) = f\tau(u_i)$.
- Vi anvender τ på formlene i grenen G.

$$\begin{array}{c}
 \vdots \\
 \hline
 \forall x P x, Pa, Pfa, Pffa \vdash Qfa \\
 \hline
 \forall x P x, Pa, Pfa \vdash Qfa \\
 \hline
 \forall x P x, Pa \vdash Qfa \\
 \hline
 \forall x P x \vdash Qfa
 \end{array}$$

Rettferdig substitusjon II

- La substitusjonen τ være definert rekursivt slik at

- $\tau(u_1) = a$, og
- $\tau(u_{i+1}) = f\tau(u_i)$.

- Vi anvender τ på formlene i grenen G.

- Vi har nå at $Pt \in G_\tau$ for alle termer t i Herbrand-universet til G_τ .

$$\frac{\begin{array}{c} \vdots \\ \forall x P_x, Pa, Pfa, Pffa \vdash Qfa \end{array}}{\forall x P_x, Pa, Pfa \vdash Qfa} \quad \frac{\forall x P_x, Pa, Pfa \vdash Qfa}{\forall x P_x, Pa \vdash Qfa}$$

Rettferdig substitusjon II

- La substitusjonen τ være definert rekursivt slik at

- $\tau(u_1) = a$, og
- $\tau(u_{i+1}) = f\tau(u_i)$.

- Vi anvender τ på formlene i grenen G .

- Vi har nå at $Pt \in G_\tau$ for alle termer t i Herbrand-universet til G_τ .

- Derfor vil Herbrand-modellen generert fra G_τ oppfylle $\forall xPx$.

$$\frac{\begin{array}{c} \vdots \\ \forall xPx, Pa, Pfa, Pffa \vdash Qfa \end{array}}{\forall xPx, Pa, Pfa \vdash Qfa}}{\forall xPx, Pa \vdash Qfa}}{\forall xPx \vdash Qfa}}$$

Rettferdig substitusjon II

- La substitusjonen τ være definert rekursivt slik at

- $\tau(u_1) = a$, og
- $\tau(u_{i+1}) = f\tau(u_i)$.

- Vi anvender τ på formlene i grenen G .

- Vi har nå at $Pt \in G_\tau$ for alle termer t i Herbrand-universet til G_τ .

- Derfor vil Herbrand-modellen generert fra G_τ oppfylle $\forall xPx$.

- Vi kaller τ en **rettferdig substitusjon**.

$$\frac{\begin{array}{c} \vdots \\ \forall xPx, Pa, Pfa, Pffa \vdash Qfa \end{array}}{\forall xPx, Pa, Pfa \vdash Qfa}}{\forall xPx, Pa \vdash Qfa}}{\forall xPx \vdash Qfa}}$$

Rettferdig substitusjon III

Definisjon (Rettferdig substitusjon)

Rettferdig substitusjon III

Definisjon (Rettferdig substitusjon)

La π være en grenseutledning generert med en rettferdig strategi

Rettferdig substitusjon III

Definisjon (Rettferdig substitusjon)

La π være en grenseutledning generert med en rettferdig strategi, og la G være en gren i π .

Rettferdig substitusjon III

Definisjon (Rettferdig substitusjon)

La π være en grenseutledning generert med en rettferdig strategi, og la G være en gren i π . La σ være en substitusjon.

Rettferdig substitusjon III

Definisjon (Rettferdig substitusjon)

La π være en grenseutledning generert med en rettferdig strategi, og la G være en gren i π . La σ være en substitusjon.

- σ er *rettferdig m.h.p. en γ -formel* $Qx\varphi$ i G hvis

Rettferdig substitusjon III

Definisjon (Rettferdig substitusjon)

La π være en grenseutledning generert med en rettferdig strategi, og la G være en gren i π . La σ være en substitusjon.

- σ er *rettferdig m.h.p. en γ -formel* $Qx\varphi$ i G hvis for alle termer t i Herbrand-universet til G

Rettferdig substitusjon III

Definisjon (Rettferdig substitusjon)

La π være en grenseutledning generert med en rettferdig strategi, og la G være en gren i π . La σ være en substitusjon.

- σ er **rettferdig m.h.p. en γ -formel** $Qx\varphi$ i G hvis for alle termer t i Herbrand-universet til G så finnes en formel $\varphi[u/x]$ aktiv i en γ -slutning i G

Rettferdig substitusjon III

Definisjon (Rettferdig substitusjon)

La π være en grenseutledning generert med en rettferdig strategi, og la G være en gren i π . La σ være en substitusjon.

- σ er **rettferdig m.h.p. en γ -formel** $Qx\varphi$ i G hvis for alle termer t i Herbrand-universet til G så finnes en formel $\varphi[u/x]$ aktiv i en γ -slutning i G slik at $\sigma(u) = t$.

Rettferdig substitusjon III

Definisjon (Rettferdig substitusjon)

La π være en grenseutledning generert med en rettferdig strategi, og la G være en gren i π . La σ være en substitusjon.

- σ er **rettferdig m.h.p. en γ -formel** $Qx\varphi$ i G hvis for alle termer t i Herbrand-universet til G så finnes en formel $\varphi[u/x]$ aktiv i en γ -slutning i G slik at $\sigma(u) = t$.
- σ er **rettferdig m.h.p. grenen** G hvis

Rettferdig substitusjon III

Definisjon (Rettferdig substitusjon)

La π være en grenseutledning generert med en rettferdig strategi, og la G være en gren i π . La σ være en substitusjon.

- σ er **rettferdig m.h.p. en γ -formel** $Qx\varphi$ i G hvis for alle termer t i Herbrand-universet til G så finnes en formel $\varphi[u/x]$ aktiv i en γ -slutning i G slik at $\sigma(u) = t$.
- σ er **rettferdig m.h.p. grenen** G hvis σ er rettferdig m.h.p. alle γ -formlene i G .

Rettferdig substitusjon III

Definisjon (Rettferdig substitusjon)

La π være en grenseutledning generert med en rettferdig strategi, og la G være en gren i π . La σ være en substitusjon.

- σ er **rettferdig m.h.p. en γ -formel** $Qx\varphi$ i G hvis for alle termer t i Herbrand-universet til G så finnes en formel $\varphi[u/x]$ aktiv i en γ -slutning i G slik at $\sigma(u) = t$.
- σ er **rettferdig m.h.p. grenen** G hvis σ er rettferdig m.h.p. alle γ -formlene i G .
- σ er **rettferdig m.h.p. utledningen** π hvis

Rettferdig substitusjon III

Definisjon (Rettferdig substitusjon)

La π være en grenseutledning generert med en rettferdig strategi, og la G være en gren i π . La σ være en substitusjon.

- σ er **rettferdig m.h.p. en γ -formel** $Qx\varphi$ i G hvis for alle termer t i Herbrand-universet til G så finnes en formel $\varphi[u/x]$ aktiv i en γ -slutning i G slik at $\sigma(u) = t$.
- σ er **rettferdig m.h.p. grenen** G hvis σ er rettferdig m.h.p. alle γ -formlene i G .
- σ er **rettferdig m.h.p. utledningen** π hvis σ er rettferdig m.h.p. hver gren i π .

Modelleksistens for fri-variabel LK – bevis

Modelleksistens for fri-variabel LK – bevis

- Anta at sekventen $\Gamma \vdash \Delta$ ikke er bevisbar i fri-variabel LK.

Modelleksistens for fri-variabel LK – bevis

- Anta at sekventen $\Gamma \vdash \Delta$ ikke er bevisbar i fri-variabel LK.
 - Det betyr at for alle utledninger med $\Gamma \vdash \Delta$ som rotsekvent, så finnes ingen substitusjon som lukker utledningen.

Modelleksistens for fri-variabel LK – bevis

- Anta at sekventen $\Gamma \vdash \Delta$ **ikke** er bevisbar i fri-variabel LK.
 - Det betyr at for alle utledninger med $\Gamma \vdash \Delta$ som rotsekvent, så finnes **ingen** substitusjon som lukker utledningen.
- Vi bruker en **rettferdig strategi** til å lage en **grenseutledning** med $\Gamma \vdash \Delta$ som rotsekvent.

Modelleksistens for fri-variabel LK – bevis

- Anta at sekventen $\Gamma \vdash \Delta$ ikke er bevisbar i fri-variabel LK.
 - Det betyr at for alle utledninger med $\Gamma \vdash \Delta$ som rotsekvent, så finnes ingen substitusjon som lukker utledningen.
- Vi bruker en rettferdig strategi til å lage en grenseutledning med $\Gamma \vdash \Delta$ som rotsekvent.
- Vi velger en substitusjon σ som er rettferdig m.h.p. grenseutledningen

Modelleksistens for fri-variabel LK – bevis

- Anta at sekventen $\Gamma \vdash \Delta$ **ikke** er bevisbar i fri-variabel LK.
 - Det betyr at for alle utledninger med $\Gamma \vdash \Delta$ som rotsekvent, så finnes **ingen** substitusjon som lukker utledningen.
- Vi bruker en **rettferdig strategi** til å lage en **grenseutledning** med $\Gamma \vdash \Delta$ som rotsekvent.
- Vi velger en substitusjon σ som er **rettferdig** m.h.p. grenseutledningen og som instansierer alle frie variable i utledningen med grunne termer.

Modelleksistens for fri-variabel LK – bevis

- Anta at sekventen $\Gamma \vdash \Delta$ **ikke** er bevisbar i fri-variabel LK.
 - Det betyr at for alle utledninger med $\Gamma \vdash \Delta$ som rotsekvent, så finnes **ingen** substitusjon som lukker utledningen.
- Vi bruker en **rettferdig strategi** til å lage en **grenseutledning** med $\Gamma \vdash \Delta$ som rotsekvent.
- Vi velger en substitusjon σ som er **rettferdig** m.h.p. grenseutledningen og som instansierer alle frie variable i utledningen med grunne termer.
- Siden σ ikke lukker grenseutledningen, så vil det finnes en gren G i grenseutledningen som ikke er lukket av σ (ved Königs lemma).

Modelleksistens for fri-variabel LK – bevis

- Anta at sekventen $\Gamma \vdash \Delta$ ikke er bevisbar i fri-variabel LK.
 - Det betyr at for alle utledninger med $\Gamma \vdash \Delta$ som rotsekvent, så finnes ingen substitusjon som lukker utledningen.
- Vi bruker en rettferdig strategi til å lage en grenseutledning med $\Gamma \vdash \Delta$ som rotsekvent.
- Vi velger en substitusjon σ som er rettferdig m.h.p. grenseutledningen og som instansierer alle frie variable i utledningen med grunne termer.
- Siden σ ikke lukker grenseutledningen, så vil det finnes en gren G i grenseutledningen som ikke er lukket av σ (ved Königs lemma).
- Vi anvender σ på alle formlene i G.

Modelleksistens for fri-variabel LK – bevis

- Anta at sekventen $\Gamma \vdash \Delta$ **ikke** er bevisbar i fri-variabel LK.
 - Det betyr at for alle utledninger med $\Gamma \vdash \Delta$ som rotsekvent, så finnes **ingen** substitusjon som lukker utledningen.
- Vi bruker en **rettferdig strategi** til å lage en **grenseutledning** med $\Gamma \vdash \Delta$ som rotsekvent.
- Vi velger en substitusjon σ som er **rettferdig** m.h.p. grenseutledningen og som instansierer alle frie variable i utledningen med grunne termer.
- Siden σ ikke lukker grenseutledningen, så vil det finnes en gren G i grenseutledningen som ikke er lukket av σ (ved Königs lemma).
- Vi anvender σ på alle formlene i G . Merk at $G\sigma$ kun inneholder **lukkede** formler.

Modelleksistens for fri-variabel LK – bevis

- Anta at sekventen $\Gamma \vdash \Delta$ **ikke** er bevisbar i fri-variabel LK.
 - Det betyr at for alle utledninger med $\Gamma \vdash \Delta$ som rotsekvent, så finnes **ingen** substitusjon som lukker utledningen.
- Vi bruker en **rettferdig strategi** til å lage en **grenseutledning** med $\Gamma \vdash \Delta$ som rotsekvent.
- Vi velger en substitusjon σ som er **rettferdig** m.h.p. grenseutledningen og som instansierer alle frie variable i utledningen med grunne termer.
- Siden σ ikke lukker grenseutledningen, så vil det finnes en gren G i grenseutledningen som ikke er lukket av σ (ved Königs lemma).
- Vi anvender σ på alle formlene i G . Merk at $G\sigma$ kun inneholder **lukkede** formler. Vi kan derfor gjøre resten av beviset på samme måte som for grunn LK.

Modelleksistens for fri-variabel LK – bevis

- Anta at sekventen $\Gamma \vdash \Delta$ **ikke** er bevisbar i fri-variabel LK.
 - Det betyr at for alle utledninger med $\Gamma \vdash \Delta$ som rotsekvent, så finnes **ingen** substitusjon som lukker utledningen.
- Vi bruker en **rettferdig strategi** til å lage en **grenseutledning** med $\Gamma \vdash \Delta$ som rotsekvent.
- Vi velger en substitusjon σ som er **rettferdig** m.h.p. grenseutledningen og som instansierer alle frie variable i utledningen med grunne termer.
- Siden σ ikke lukker grenseutledningen, så vil det finnes en gren G i grenseutledningen som ikke er lukket av σ (ved Königs lemma).
- Vi anvender σ på alle formlene i G . Merk at $G\sigma$ kun inneholder **lukkede** formler. Vi kan derfor gjøre resten av beviset på samme måte som for grunn LK.
- Merk at $\Gamma \vdash \Delta$ er **lukket**.

Modelleksistens for fri-variabel LK – bevis

- Anta at sekventen $\Gamma \vdash \Delta$ **ikke** er bevisbar i fri-variabel LK.
 - Det betyr at for alle utledninger med $\Gamma \vdash \Delta$ som rotsekvent, så finnes **ingen** substitusjon som lukker utledningen.
- Vi bruker en **rettferdig strategi** til å lage en **grenseutledning** med $\Gamma \vdash \Delta$ som rotsekvent.
- Vi velger en substitusjon σ som er **rettferdig** m.h.p. grenseutledningen og som instansierer alle frie variable i utledningen med grunne termer.
- Siden σ ikke lukker grenseutledningen, så vil det finnes en gren G i grenseutledningen som ikke er lukket av σ (ved Königs lemma).
- Vi anvender σ på alle formlene i G . Merk at $G\sigma$ kun inneholder **lukkede** formler. Vi kan derfor gjøre resten av beviset på samme måte som for grunn LK.
- Merk at $\Gamma \vdash \Delta$ er **lukket**. Herbrand-modellen generert fra $G\sigma$ vil derfor falsifisere $\Gamma \vdash \Delta$ uavhengig av variabeltilordning.

Sunnhet

Vi viste forrige gang at sekventkalkylen fri-variabel LK er **sunn**.

Sannhet

Vi viste forrige gang at sekventkalkylen fri-variabel LK er **sunn**.

Teorem (Sannhet)

Hvis en sekvent er bevisbar i fri-variabel LK, så er den gyldig.

Sannhet

Vi viste forrige gang at sekventkalkylen fri-variabel LK er **sunn**.

Teorem (Sannhet)

Hvis en sekvent er bevisbar i fri-variabel LK, så er den gyldig.

Sentralt i beviset står argumentet for at det å anvende en LK-regel på en falsifiserbar utledning gir en falsifiserbar utledning.

Sannhet

Vi viste forrige gang at sekventkalkylen fri-variabel LK er **sunn**.

Teorem (Sannhet)

Hvis en sekvent er bevisbar i fri-variabel LK, så er den gyldig.

Sentralt i beviset står argumentet for at det å anvende en LK-regel på en falsifiserbar utledning gir en falsifiserbar utledning.

Lemma

Enhver utledning med falsifiserbar rotsekvent er falsifiserbar.

Sunnhet

Vi viste forrige gang at sekventkalkylen fri-variabel LK er **sunn**.

Teorem (Sunnhet)

Hvis en sekvent er bevisbar i fri-variabel LK, så er den gyldig.

Sentralt i beviset står argumentet for at det å anvende en LK-regel på en falsifiserbar utledning gir en falsifiserbar utledning.

Lemma

Enhver utledning med falsifiserbar rotsekvent er falsifiserbar.

Vi skal ta en kort repetisjon av sunnhetsargumentet.

Falsifiserbarhet

- I sannhetsbeviset for *grunn* LK viste vi at alle reglene bevarer falsifiserbarhet oppover.

Falsifiserbarhet

- I sannhetsbeviset for *grunn* LK viste vi at alle reglene bevarer falsifiserbarhet oppover.
- I fri-variabel LK utvidet vi semantikken med variabeltilordninger for å tolke formler med frie variable.

Falsifiserbarhet

- I sunnhetsbeviset for *grunn* LK viste vi at alle reglene bevarer falsifiserbarhet oppover.
- I fri-variabel LK utvidet vi semantikken med variabeltilordninger for å tolke formler med frie variable.
- Vi måtte også innføre et nytt falsifiseringsbegrep for sekvenser med frie variable.

Falsifiserbarhet

- I sunnhetsbeviset for *grunn* LK viste vi at alle reglene bevarer falsifiserbarhet oppover.
- I fri-variabel LK utvidet vi semantikken med variabeltilordninger for å tolke formler med frie variable.
- Vi måtte også innføre et nytt falsifiseringsbegrep for sekventer med frie variable.
- β -reglene i fri-variabel LK bevarer **ikke** falsifiserbarhet oppover.

Falsifiserbarhet

- I sunnhetsbeviset for *grunn* LK viste vi at alle reglene bevarer falsifiserbarhet oppover.
- I fri-variabel LK utvidet vi semantikken med variabeltilordninger for å tolke formler med frie variable.
- Vi måtte også innføre et nytt falsifiseringsbegrep for sekvenser med frie variable.
- β -reglene i fri-variabel LK bevarer **ikke** falsifiserbarhet oppover.
- Vi innførte derfor falsifiserbarhet for *utledninger*.

Falsifiserbarhet

- I sunnhetsbeviset for *grunn* LK viste vi at alle reglene bevarer falsifiserbarhet oppover.
- I fri-variabel LK utvidet vi semantikken med variabeltilordninger for å tolke formler med frie variable.
- Vi måtte også innføre et nytt falsifiseringsbegrep for sekventer med frie variable.
- β -reglene i fri-variabel LK bevarer **ikke** falsifiserbarhet oppover.
- Vi innførte derfor falsifiserbarhet for *utledninger*.
- En modell **falsifiserer** en utledning hvis ethvert valg av variabeltilordning for modellen gir en falsifisert gren.

β -regelen bevarer ikke falsifiserbarhet oppover

β -regelen bevarer ikke falsifiserbarhet oppover

- Se på slutningen

$$\frac{Pu \vdash Pa, Qb \quad Qu \vdash Pa, Qb}{Pu \vee Qu \vdash Pa, Qb}$$

β -regelen bevarer ikke falsifiserbarhet oppover

- Se på slutningen

$$\frac{Pu \vdash Pa, Qb \quad Qu \vdash Pa, Qb}{Pu \vee Qu \vdash Pa, Qb}$$

- La \mathcal{M} være en modell slik at $|\mathcal{M}| = \{a, b\}$

β -regelen bevarer ikke falsifiserbarhet oppover

- Se på slutningen

$$\frac{Pu \vdash Pa, Qb \quad Qu \vdash Pa, Qb}{Pu \vee Qu \vdash Pa, Qb}$$

- La \mathcal{M} være en modell slik at $|\mathcal{M}| = \{a, b\}$, $a^{\mathcal{M}} = a$

β -regelen bevarer ikke falsifiserbarhet oppover

- Se på slutningen

$$\frac{Pu \vdash Pa, Qb \quad Qu \vdash Pa, Qb}{Pu \vee Qu \vdash Pa, Qb}$$

- La \mathcal{M} være en modell slik at $|\mathcal{M}| = \{a, b\}$, $a^{\mathcal{M}} = a$, $b^{\mathcal{M}} = b$

β -regelen bevarer ikke falsifiserbarhet oppover

- Se på slutningen

$$\frac{Pu \vdash Pa, Qb \quad Qu \vdash Pa, Qb}{Pu \vee Qu \vdash Pa, Qb}$$

- La \mathcal{M} være en modell slik at $|\mathcal{M}| = \{a, b\}$, $a^{\mathcal{M}} = a$, $b^{\mathcal{M}} = b$, $P^{\mathcal{M}} = \{b\}$

β -regelen bevarer ikke falsifiserbarhet oppover

- Se på slutningen

$$\frac{Pu \vdash Pa, Qb \quad Qu \vdash Pa, Qb}{Pu \vee Qu \vdash Pa, Qb}$$

- La \mathcal{M} være en modell slik at $|\mathcal{M}| = \{a, b\}$, $a^{\mathcal{M}} = a$, $b^{\mathcal{M}} = b$, $P^{\mathcal{M}} = \{b\}$ og $Q^{\mathcal{M}} = \{a\}$.

β -regelen bevarer ikke falsifiserbarhet oppover

- Se på slutningen

$$\frac{Pu \vdash Pa, Qb \quad Qu \vdash Pa, Qb}{Pu \vee Qu \vdash Pa, Qb}$$

- La \mathcal{M} være en modell slik at $|\mathcal{M}| = \{a, b\}$, $a^{\mathcal{M}} = a$, $b^{\mathcal{M}} = b$, $P^{\mathcal{M}} = \{b\}$ og $Q^{\mathcal{M}} = \{a\}$.
- Vi har to aktuelle variabeltilordninger for \mathcal{M} : $\mu_1(u) = a$ og $\mu_2(u) = b$.

β -regelen bevarer ikke falsifiserbarhet oppover

- Se på slutningen

$$\frac{Pu \vdash Pa, Qb \quad Qu \vdash Pa, Qb}{Pu \vee Qu \vdash Pa, Qb}$$

- La \mathcal{M} være en modell slik at $|\mathcal{M}| = \{a, b\}$, $a^{\mathcal{M}} = a$, $b^{\mathcal{M}} = b$, $P^{\mathcal{M}} = \{b\}$ og $Q^{\mathcal{M}} = \{a\}$.
- Vi har to aktuelle variabeltilordninger for \mathcal{M} : $\mu_1(u) = a$ og $\mu_2(u) = b$.
- \mathcal{M} falsifiserer konklusjonen:

β -regelen bevarer ikke falsifiserbarhet oppover

- Se på slutningen

$$\frac{Pu \vdash Pa, Qb \quad Qu \vdash Pa, Qb}{Pu \vee Qu \vdash Pa, Qb}$$

- La \mathcal{M} være en modell slik at $|\mathcal{M}| = \{a, b\}$, $a^{\mathcal{M}} = a$, $b^{\mathcal{M}} = b$, $P^{\mathcal{M}} = \{b\}$ og $Q^{\mathcal{M}} = \{a\}$.
- Vi har to aktuelle variabeltilordninger for \mathcal{M} : $\mu_1(u) = a$ og $\mu_2(u) = b$.
- \mathcal{M} falsifiserer konklusjonen:
 - \mathcal{M} falsifiserer begge formlene i succedenten.

β -regelen bevarer ikke falsifiserbarhet oppover

- Se på slutningen

$$\frac{Pu \vdash Pa, Qb \quad Qu \vdash Pa, Qb}{Pu \vee Qu \vdash Pa, Qb}$$

- La \mathcal{M} være en modell slik at $|\mathcal{M}| = \{a, b\}$, $a^{\mathcal{M}} = a$, $b^{\mathcal{M}} = b$, $P^{\mathcal{M}} = \{b\}$ og $Q^{\mathcal{M}} = \{a\}$.
- Vi har to aktuelle variabeltilordninger for \mathcal{M} : $\mu_1(u) = a$ og $\mu_2(u) = b$.
- \mathcal{M} falsifiserer konklusjonen:
 - \mathcal{M} falsifiserer begge formlene i succedenten.
 - $\mathcal{M}, \mu_1 \models Qu$ og $\mathcal{M}, \mu_2 \models Pu$, så \mathcal{M} gjør formelen i antecedenten sann uavhengig av variabeltilordning.

β -regelen bevarer ikke falsifiserbarhet oppover

- Se på slutningen

$$\frac{Pu \vdash Pa, Qb \quad Qu \vdash Pa, Qb}{Pu \vee Qu \vdash Pa, Qb}$$

- La \mathcal{M} være en modell slik at $|\mathcal{M}| = \{a, b\}$, $a^{\mathcal{M}} = a$, $b^{\mathcal{M}} = b$, $P^{\mathcal{M}} = \{b\}$ og $Q^{\mathcal{M}} = \{a\}$.
- Vi har to aktuelle variabeltilordninger for \mathcal{M} : $\mu_1(u) = a$ og $\mu_2(u) = b$.
- \mathcal{M} falsifiserer konklusjonen:
 - \mathcal{M} falsifiserer begge formlene i succedenten.
 - $\mathcal{M}, \mu_1 \models Qu$ og $\mathcal{M}, \mu_2 \models Pu$, så \mathcal{M} gjør formelen i antecedenten sann uavhengig av variabeltilordning.
- Premissene er **ikke** falsifiserbare. (Prøv!)

β -regelen bevarer ikke falsifiserbarhet oppover

- Se på slutningen

$$\frac{Pu \vdash Pa, Qb \quad Qu \vdash Pa, Qb}{Pu \vee Qu \vdash Pa, Qb}$$

- La \mathcal{M} være en modell slik at $|\mathcal{M}| = \{a, b\}$, $a^{\mathcal{M}} = a$, $b^{\mathcal{M}} = b$, $P^{\mathcal{M}} = \{b\}$ og $Q^{\mathcal{M}} = \{a\}$.
- Vi har to aktuelle variabeltilordninger for \mathcal{M} : $\mu_1(u) = a$ og $\mu_2(u) = b$.
- \mathcal{M} falsifiserer konklusjonen:
 - \mathcal{M} falsifiserer begge formlene i succedenten.
 - $\mathcal{M}, \mu_1 \models Qu$ og $\mathcal{M}, \mu_2 \models Pu$, så \mathcal{M} gjør formelen i antecedenten sann uavhengig av variabeltilordning.
- Premissene er **ikke** falsifiserbare. (Prøv!)
- Konklusjonen er falsifiserbar, mens premissene **ikke** er det!

Beviset for falsifiserbarhetslemmaet

- Beviset for falsifiserbarhetslemmaet går ved strukturell induksjon på utledninger.

Beviset for falsifiserbarhetslemmaet

- Beviset for falsifiserbarhetslemmaet går ved strukturell induksjon på utledninger.
- I induksjonssteget

Beviset for falsifiserbarhetslemmaet

- Beviset for falsifiserbarhetslemmaet går ved strukturell induksjon på utledninger.
- I induksjonssteget
 - antar vi at en utledning π er falsifiserbar, og

Beviset for falsifiserbarhetslemmaet

- Beviset for falsifiserbarhetslemmaet går ved strukturell induksjon på utledninger.
- I induksjonssteget
 - antar vi at en utledning π er falsifiserbar, og
 - viser at utledningen vi får når vi utvider π med en fri-variabel LK-regel også er falsifiserbar.

Beviset for falsifiserbarhetslemmaet

- Beviset for falsifiserbarhetslemmaet går ved strukturell induksjon på utledninger.
- I induksjonssteget
 - antar vi at en utledning π er falsifiserbar, og
 - viser at utledningen vi får når vi utvider π med en fri-variabel LK-regel også er falsifiserbar.
- Vi får ett tilfelle for hver LK-regel.

Beviset for falsifiserbarhetslemmaet

- Beviset for falsifiserbarhetslemmaet går ved strukturell induksjon på utledninger.
- I induksjonssteget
 - antar vi at en utledning π er falsifiserbar, og
 - viser at utledningen vi får når vi utvider π med en fri-variabel LK-regel også er falsifiserbar.
- Vi får ett tilfelle for hver LK-regel.
- Antagelsen om at π er falsifiserbar gir oss en falsifiserende modell \mathcal{M} .

Beviset for falsifiserbarhetslemmaet

- Beviset for falsifiserbarhetslemmaet går ved strukturell induksjon på utledninger.
- I induksjonssteget
 - antar vi at en utledning π er falsifiserbar, og
 - viser at utledningen vi får når vi utvider π med en fri-variabel LK-regel også er falsifiserbar.
- Vi får ett tilfelle for hver LK-regel.
- Antagelsen om at π er falsifiserbar gir oss en falsifiserende modell \mathcal{M} .
- For α -, β - og γ -reglene kan vi vise at \mathcal{M} også falsifiserer den utvidete utledningen.

Beviset for falsifiserbarhetslemmaet

- Beviset for falsifiserbarhetslemmaet går ved strukturell induksjon på utledninger.
- I induksjonssteget
 - antar vi at en utledning π er falsifiserbar, og
 - viser at utledningen vi får når vi utvider π med en fri-variabel LK-regel også er falsifiserbar.
- Vi får ett tilfelle for hver LK-regel.
- Antagelsen om at π er falsifiserbar gir oss en falsifiserende modell \mathcal{M} .
- For α -, β - og γ -reglene kan vi vise at \mathcal{M} også falsifiserer den utvidete utledningen.
- Det holder ikke for δ -reglene. Her konstruerer vi en ny modell (basert på \mathcal{M}) som falsifiserer den utvidete utledningen.

Beviset for falsifiserbarhetslemmaet – δ -regelen

$$\frac{\Gamma, \varphi[f(u_1, \dots, u_n)/x] \vdash \Delta}{\Gamma, \exists x \varphi \vdash \Delta} \text{L}\exists$$

Beviset for falsifiserbarhetslemmaet – δ -regelen

$$\frac{\Gamma, \varphi[f(u_1, \dots, u_n)/x] \vdash \Delta}{\Gamma, \exists x \varphi \vdash \Delta} \text{L}\exists$$

- Hvis vi utvider med en δ -slutning, så vil den nye løvsekventen inneholder Skolemtermen $f(u_1, \dots, u_n)$.

Beviset for falsifiserbarhetslemmaet – δ -regelen

$$\frac{\Gamma, \varphi[f(u_1, \dots, u_n)/x] \vdash \Delta}{\Gamma, \exists x \varphi \vdash \Delta} \text{L}\exists$$

- Hvis vi utvider med en δ -slutning, så vil den nye løvsekventen inneholde Skolemtermen $f(u_1, \dots, u_n)$.
- Vi lager en ny modell \mathcal{M}' som er lik \mathcal{M} bortsett fra tolkningen av f .

Beviset for falsifiserbarhetslemmaet – δ -regelen

$$\frac{\Gamma, \varphi[f(u_1, \dots, u_n)/x] \vdash \Delta}{\Gamma, \exists x \varphi \vdash \Delta} \text{L}\exists$$

- Hvis vi utvider med en δ -slutning, så vil den nye løvsekventen inneholde Skolemtermen $f(u_1, \dots, u_n)$.
- Vi lager en ny modell \mathcal{M}' som er lik \mathcal{M} bortsett fra tolkningen av f .
- For hver variabeltilordning μ for \mathcal{M}' spesifiserer vi \mathcal{M}', μ sin tolkning av den introduserte Skolemtermen

Beviset for falsifiserbarhetslemmaet – δ -regelen

$$\frac{\Gamma, \varphi[f(u_1, \dots, u_n)/x] \vdash \Delta}{\Gamma, \exists x \varphi \vdash \Delta} \text{L}\exists$$

- Hvis vi utvider med en δ -slutning, så vil den nye løvsekventen inneholde Skolemtermen $f(u_1, \dots, u_n)$.
- Vi lager en ny modell \mathcal{M}' som er lik \mathcal{M} bortsett fra tolkningen av f .
- For hver variabeltilordning μ for \mathcal{M}' spesifiserer vi \mathcal{M}', μ sin tolkning av den introduserte Skolemtermen slik at \mathcal{M}', μ gjør $\varphi[f(u_1, \dots, u_n)/x]$ sann dersom \mathcal{M}, μ gjør $\exists x \varphi$ sann.

Beviset for falsifiserbarhetslemmaet – δ -regelen

$$\frac{\Gamma, \varphi[f(u_1, \dots, u_n)/x] \vdash \Delta}{\Gamma, \exists x \varphi \vdash \Delta} \text{L}\exists$$

- Hvis vi utvider med en δ -slutning, så vil den nye løvsekventen inneholde Skolemtermen $f(u_1, \dots, u_n)$.
- Vi lager en ny modell \mathcal{M}' som er lik \mathcal{M} bortsett fra tolkningen av f .
- For hver variabeltilordning μ for \mathcal{M}' spesifiserer vi \mathcal{M}', μ sin tolkning av den introduserte Skolemtermen slik at \mathcal{M}', μ gjør $\varphi[f(u_1, \dots, u_n)/x]$ sann dersom \mathcal{M}, μ gjør $\exists x \varphi$ sann.
- Siden f ikke forekommer i π og \mathcal{M} er lik \mathcal{M}' utenom f , så er π falsifisert av \mathcal{M}' .

Beviset for falsifiserbarhetslemmaet – δ -regelen

$$\frac{\Gamma, \varphi[f(u_1, \dots, u_n)/x] \vdash \Delta}{\Gamma, \exists x \varphi \vdash \Delta} \text{L}\exists$$

- Hvis vi utvider med en δ -slutning, så vil den nye løvsekventen inneholde Skolemtermen $f(u_1, \dots, u_n)$.
- Vi lager en ny modell \mathcal{M}' som er lik \mathcal{M} bortsett fra tolkningen av f .
- For hver variabeltilordning μ for \mathcal{M}' spesifiserer vi \mathcal{M}', μ sin tolkning av den introduserte Skolemtermen slik at \mathcal{M}', μ gjør $\varphi[f(u_1, \dots, u_n)/x]$ sann dersom \mathcal{M}, μ gjør $\exists x \varphi$ sann.
- Siden f ikke forekommer i π og \mathcal{M} er lik \mathcal{M}' utenom f , så er π falsifisert av \mathcal{M}' .
- Ved å bruke de semantiske definisjonene, viser vi så at \mathcal{M}' falsifiserer den utvidete utledningen.

Teorem (Sunnhet)

Hvis $\Gamma \vdash \Delta$ er bevisbar i fri-variabel LK, så er $\Gamma \vdash \Delta$ gyldig.

Teorem (Sunnhet)

Hvis $\Gamma \vdash \Delta$ er bevisbar i fri-variabel LK, så er $\Gamma \vdash \Delta$ gyldig.

Bevis.

- Anta at $\langle \pi, \sigma \rangle$ er et bevis for $\Gamma \vdash \Delta$.

Teorem (Sunnhet)

Hvis $\Gamma \vdash \Delta$ er bevisbar i fri-variabel LK, så er $\Gamma \vdash \Delta$ gyldig.

Bevis.

- Anta at $\langle \pi, \sigma \rangle$ er et bevis for $\Gamma \vdash \Delta$.
- Anta for motsigelse at $\Gamma \vdash \Delta$ **ikke** er gyldig, men er falsifiserbar.

Teorem (Sunnhet)

Hvis $\Gamma \vdash \Delta$ er bevisbar i fri-variabel LK, så er $\Gamma \vdash \Delta$ gyldig.

Bevis.

- Anta at $\langle \pi, \sigma \rangle$ er et bevis for $\Gamma \vdash \Delta$.
- Anta for motsigelse at $\Gamma \vdash \Delta$ **ikke** er gyldig, men er falsifiserbar.
- Ved Lemma finnes en modell \mathcal{M} som falsifiserer π .

Teorem (Sunnhet)

Hvis $\Gamma \vdash \Delta$ er bevisbar i fri-variabel LK, så er $\Gamma \vdash \Delta$ gyldig.

Bevis.

- Anta at $\langle \pi, \sigma \rangle$ er et bevis for $\Gamma \vdash \Delta$.
- Anta for motsigelse at $\Gamma \vdash \Delta$ **ikke** er gyldig, men er falsifiserbar.
- Ved Lemma finnes en modell \mathcal{M} som falsifiserer π .
- La μ være en variabeltilordning slik at $\mu(x) = (x\sigma)^{\mathcal{M}}$ for hver variabel x i støtten til σ .

Teorem (Sunnhet)

Hvis $\Gamma \vdash \Delta$ er bevisbar i fri-variabel LK, så er $\Gamma \vdash \Delta$ gyldig.

Bevis.

- Anta at $\langle \pi, \sigma \rangle$ er et bevis for $\Gamma \vdash \Delta$.
- Anta for motsigelse at $\Gamma \vdash \Delta$ **ikke** er gyldig, men er falsifiserbar.
- Ved Lemma finnes en modell \mathcal{M} som falsifiserer π .
- La μ være en variabeltilordning slik at $\mu(x) = (x\sigma)^{\mathcal{M}}$ for hver variabel x i støtten til σ .
- Da finnes en gren G i π som er falsifisert av \mathcal{M} under μ .

Teorem (Sunnhet)

Hvis $\Gamma \vdash \Delta$ er bevisbar i fri-variabel LK, så er $\Gamma \vdash \Delta$ gyldig.

Bevis.

- Anta at $\langle \pi, \sigma \rangle$ er et bevis for $\Gamma \vdash \Delta$.
- Anta for motsigelse at $\Gamma \vdash \Delta$ **ikke** er gyldig, men er falsifiserbar.
- Ved Lemma finnes en modell \mathcal{M} som falsifiserer π .
- La μ være en variabeltilordning slik at $\mu(x) = (x\sigma)^{\mathcal{M}}$ for hver variabel x i støtten til σ .
- Da finnes en gren G i π som er falsifisert av \mathcal{M} under μ .
- Siden σ lukker løvsekventen på G , så finnes atomære formler $\varphi \in G^{\top}$ og $\psi \in G^{\perp}$ slik at $\varphi\sigma = \psi\sigma$.

Teorem (Sunnhet)

Hvis $\Gamma \vdash \Delta$ er bevisbar i fri-variabel LK, så er $\Gamma \vdash \Delta$ gyldig.

Bevis.

- Anta at $\langle \pi, \sigma \rangle$ er et bevis for $\Gamma \vdash \Delta$.
- Anta for motsigelse at $\Gamma \vdash \Delta$ **ikke** er gyldig, men er falsifiserbar.
- Ved Lemma finnes en modell \mathcal{M} som falsifiserer π .
- La μ være en variabeltilordning slik at $\mu(x) = (x\sigma)^{\mathcal{M}}$ for hver variabel x i støtten til σ .
- Da finnes en gren G i π som er falsifisert av \mathcal{M} under μ .
- Siden σ lukker løvsekventen på G , så finnes atomære formler $\varphi \in G^{\top}$ og $\psi \in G^{\perp}$ slik at $\varphi\sigma = \psi\sigma$.
- Siden G er falsifisert av \mathcal{M} under μ , så $\mathcal{M}, \mu \models \varphi$ og $\mathcal{M}, \mu \not\models \psi$.

Teorem (Sunnhet)

Hvis $\Gamma \vdash \Delta$ er bevisbar i fri-variabel LK, så er $\Gamma \vdash \Delta$ gyldig.

Bevis.

- Anta at $\langle \pi, \sigma \rangle$ er et bevis for $\Gamma \vdash \Delta$.
- Anta for motsigelse at $\Gamma \vdash \Delta$ **ikke** er gyldig, men er falsifiserbar.
- Ved Lemma finnes en modell \mathcal{M} som falsifiserer π .
- La μ være en variabeltilordning slik at $\mu(x) = (x\sigma)^{\mathcal{M}}$ for hver variabel x i støtten til σ .
- Da finnes en gren G i π som er falsifisert av \mathcal{M} under μ .
- Siden σ lukker løvsekventen på G , så finnes atomære formler $\varphi \in G^{\top}$ og $\psi \in G^{\perp}$ slik at $\varphi\sigma = \psi\sigma$.
- Siden G er falsifisert av \mathcal{M} under μ , så $\mathcal{M}, \mu \models \varphi$ og $\mathcal{M}, \mu \not\models \psi$.
- Fra Lemma har vi $\mathcal{M} \models \varphi\sigma$ og $\mathcal{M} \not\models \psi\sigma$.

Teorem (Sunnhet)

Hvis $\Gamma \vdash \Delta$ er bevisbar i fri-variabel LK, så er $\Gamma \vdash \Delta$ gyldig.

Bevis.

- Anta at $\langle \pi, \sigma \rangle$ er et bevis for $\Gamma \vdash \Delta$.
- Anta for motsigelse at $\Gamma \vdash \Delta$ **ikke** er gyldig, men er falsifiserbar.
- Ved Lemma finnes en modell \mathcal{M} som falsifiserer π .
- La μ være en variabeltilordning slik at $\mu(x) = (x\sigma)^{\mathcal{M}}$ for hver variabel x i støtten til σ .
- Da finnes en gren G i π som er falsifisert av \mathcal{M} under μ .
- Siden σ lukker løvsekventen på G , så finnes atomære formler $\varphi \in G^{\top}$ og $\psi \in G^{\perp}$ slik at $\varphi\sigma = \psi\sigma$.
- Siden G er falsifisert av \mathcal{M} under μ , så $\mathcal{M}, \mu \models \varphi$ og $\mathcal{M}, \mu \not\models \psi$.
- Fra Lemma har vi $\mathcal{M} \models \varphi\sigma$ og $\mathcal{M} \not\models \psi\sigma$. Men $\varphi\sigma = \psi\sigma$, motsigelse.

