

Forelesning 12: Automatisk bevissøk III – fri-variabel kompletthet og repetisjon av sunnhet

Christian Mahesh Hansen - 30. april 2007

1 Kompletthet av fri-variabel LK

Teorem 1.1 (Kompletthet). *Hvis $\Gamma \vdash \Delta$ er gyldig, så er den bevisbar i fri-variabel LK.*

For å vise *kompletthet*, viser vi den ekvivalente påstanden:

Lemma 1.1 (Modelleksistens). *Hvis $\Gamma \vdash \Delta$ ikke er bevisbar i LK, så er den falsifiserbar.*

Husk:

- En modell \mathcal{M} *falsifiserer* $\Gamma \vdash \Delta$ hvis ethvert valg av variabeltilordning for \mathcal{M} gjør alle formler i Γ sanne og alle formler i Δ usanne.
- Hvis formlene i Γ og Δ er *lukkede*, vil sannhetsverdiene til formlene under \mathcal{M} være *uavhengig av variabeltilordning*.

Modelleksistens for grunn LK – repetisjon

Beviset for modelleksistens for fri-variabel LK bygger på beviset for grunn LK. Hovedtrekkene i beviset for grunn LK:

- Vi antar at en sekvent $\Gamma \vdash \Delta$ *ikke* er bevisbar i grunn LK.
 - Det betyr at alle utledninger med rotsekvent $\Gamma \vdash \Delta$ har en åpen gren.
- Vi bruker en *rettfærdig strategi* til å konstruere en *grenseutledning* for $\Gamma \vdash \Delta$ der hver åpen gren G har følgende egenskaper:
 - enhver α -, β - og δ -formel på G er hovedformel i en slutning på G , og
 - hvis G inneholder en γ -formel på formen $Qx\varphi$, så er $\varphi[t/x]$ aktiv formel i en slutning på G for hver term t i Herbrand-universet til G .
 - “Alle mulige regelanvendelser er forsøkt på alle åpne grener.”
- Siden $\Gamma \vdash \Delta$ ikke er bevisbar, så må grenseutledningen inneholde en *åpen* gren G (ved Königs lemma).

Modelleksistens for grunn LK – repetisjon II

- Vi benytter informasjonen i G til å konstruere en Herbrand-modell \mathcal{M} på følgende måte:
 - Domenet til \mathcal{M} er Herbrand-universet til G .
 - For lukkede termer t på G : $t^{\mathcal{M}} = t$
 - For n -ære relasjonssymboler P på G : $\langle t_1, \dots, t_n \rangle \in P^{\mathcal{M}} \Leftrightarrow P(t_1, \dots, t_n) \in G^{\top}$

- *Husk: Herbrand-universet til en gren er mengden av alle grunne termer som kan konstrueres fra konstant- og funksjonssymboler på grenen.*
- Vi viser så ved strukturell induksjon på formler i G at \mathcal{M} oppfyller alle formler i G^{\top} og falsifiserer alle formler i G^{\perp} .
 - Basissteget har to tilfeller: $P(t_1, \dots, t_n) \in G^{\top}$ og $P(t_1, \dots, t_n) \in G^{\perp}$.
 - I induksjonssteget får vi ett hovedtilfelle for hvert konnektiv.
 - I hvert hovedtilfelle må vi se på om formelen forekommer i G^{\top} eller G^{\perp} .
- Det følger at \mathcal{M} falsifiserer $\Gamma \vdash \Delta$, siden $\Gamma \subseteq G^{\top}$ og $\Delta \subseteq G^{\perp}$.

Modelleksistens for grunn LK – repetisjon III

- I argumentet for at \mathcal{M} oppfyller alle formler i G^{\top} og falsifiserer alle formler i G^{\perp} gjør vi strukturell induksjon på formlene i G .
- Basissteget følger pr. definisjon av Herbrand-modellen \mathcal{M} .
- I induksjonssteget antar vi at en formel φ forekommer på den åpne grenen G og benytter oss av at grenseutledningen er konstruert med en rettfærdig strategi:
 - For α -, β - og δ -formler bruker vi at φ er hovedformel i en slutning på G , og at de umiddelbare delformlene til φ derfor må være i G .
 - For γ -formler bruker vi at den umiddelbare delformelen til φ er instansiert med alle termer i Herbrand-universet til G .
- Siden delformlene er av enklere struktur enn φ , kan vi anta at påstanden holder for disse, og bruke semantikken til å slutte at påstanden holder for φ .

Modelleksistens for fri-variabel LK

- I beviset for modelleksistens for fri-variabel LK skal vi
 - bruke en *rettfærdig strategi* til å konstruere en grenseutledning med en åpen gren for en ikke-bevisbar sekvent, og
 - anvende en *grunn* substitusjon på alle formlene i den åpne grenen slik at alle frie variable blir instansiert med grunne termer.
- Vi kan så konstruere en Herbrand-modell fra den *grunnede* åpne grenen på samme måte som for grunn LK, og bruke det samme induksjonsargumentet.
- I fri-variabel LK introduserer γ -reglene imidlertid *frie variable* istedenfor termer, så vi trenger en ny definisjon av *rettfærdig strategi*.
- Vi må også velge den grunnende substitusjonen slik at den grunnede åpne grenen får samme egenskaper m.h.p. γ -formler som i grenseutledningen i grunn LK.

Rettferdig strategi for fri-variabel LK

- En rettferdig strategi vil før eller senere anvende en regel på enhver ikke-atomær formel i en løvsekvent i utledningen.
- Siden hovedformelen i en γ -slutning kopieres, vil vi (hvis vi fortsetter å anvende regler i det uendelige) måtte introdusere uendelig mange frie variable for hver γ -formel på en gren.

Definisjon 1.1 (Rettferdig strategi). *En strategi er rettferdig hvis enhver grenseutledning som fås ved å følge strategien har følgende egenskaper:*

1. Hvis φ er en α -, β - eller δ -formel i en gren, så er φ hovedformel i en slutning i grenen.
2. Hvis φ er en γ -formel på formen $Qx\psi$ i en gren, så er $\psi[u/x]$ aktiv formel i en slutning i grenen, for uendelig mange variable u .

Rettferdig substitusjon

- Grenseutledningen til høyre er generert med en rettferdig strategi.
- Formelen $\forall xPx$ introduserer uendelig mange frie variable u_j .
- La substitusjonen σ være slik at $\sigma(u_i) = a$ for alle u_i .

$$\frac{\frac{\frac{\frac{\vdots}{\forall xPx, Pu_1, Pu_2, Pu_3 \vdash Qfa}}{\forall xPx, Pu_1, Pu_2 \vdash Qfa}}{\forall xPx, Pu_1 \vdash Qfa}}{\forall xPx \vdash Qfa}}$$

- Utledningen har kun én gren, kall den G . Hvis vi anvender σ på formlene i G , så vil alle Pu_i -formlene bli til Pa .
- Vi ser at Herbrand-universet til $G\sigma$ er $a, fa, ffa, fffa, \dots$. Det finnes nå termer t i Herbrand-universet slik at Pt ikke er i $G\sigma$, f.eks. $t = fa$.
- Herbrand-modellen generert fra $G\sigma$ vil derfor ikke gjøre $\forall xPx$ sann.

Rettferdig substitusjon II

- La substitusjonen τ være definert rekursivt slik at
 - $\tau(u_1) = a$, og
 - $\tau(u_{i+1}) = f\tau(u_i)$.

$$\frac{\frac{\frac{\frac{\vdots}{\forall xPx, Pu_1, Pu_2, Pu_3 \vdash Qfa}}{\forall xPx, Pu_1, Pu_2 \vdash Qfa}}{\forall xPx, Pu_1 \vdash Qfa}}{\forall xPx \vdash Qfa}}$$

- Vi anvender τ på formlene i grenen G .
- Vi har nå at $Pt \in G\tau$ for alle termer t i Herbrand-universet til $G\tau$.
- Derfor vil Herbrand-modellen generert fra $G\tau$ oppfylle $\forall xPx$.
- Vi kaller τ en *rettferdig substitusjon*.

Rettferdig substitusjon III

Definisjon 1.2 (Rettferdig substitusjon). La π være en grenseutledning generert med en rettferdig strategi, og la G være en gren i π . La σ være en substitusjon.

- σ er **rettferdig m.h.p. en γ -formel** $Qx\varphi$ i G hvis for alle termer t i Herbrand-universet til G så finnes en formel $\varphi[u/x]$ aktiv i en γ -slutning i G slik at $\sigma(u) = t$.
- σ er **rettferdig m.h.p. grenen** G hvis σ er rettferdig m.h.p. alle γ -formlene i G .
- σ er **rettferdig m.h.p. utledningen** π hvis σ er rettferdig m.h.p. hver gren i π .

Modelleksistens for fri-variabel LK – bevis

- Anta at sekventen $\Gamma \vdash \Delta$ ikke er bevisbar i fri-variabel LK.
 - Det betyr at for alle utledninger med $\Gamma \vdash \Delta$ som rotsekvent, så finnes *ingen* substitusjon som lukker utledningen.
- Vi bruker en *rettferdig strategi* til å lage en *grenseutledning* med $\Gamma \vdash \Delta$ som rotsekvent.
- Vi velger en substitusjon σ som er *rettferdig* m.h.p. grenseutledningen og som instansierer alle frie variable i utledningen med grunne termer.
- Siden σ ikke lukker grenseutledningen, så vil det finnes en gren G i grenseutledningen som ikke er lukket av σ (ved Königs lemma).
- Vi anvender σ på alle formlene i G . Merk at $G\sigma$ kun inneholder *lukkede* formler. Vi kan derfor gjøre resten av beviset på samme måte som for grunn LK.
- Merk at $\Gamma \vdash \Delta$ er *lukket*. Herbrand-modellen generert fra $G\sigma$ vil derfor falsifisere $\Gamma \vdash \Delta$ uavhengig av variabeltilordning.

2 Repetisjon: sunnhet av fri-variabel LK

Sunnhet

Vi viste forrige gang at sekventkalkylen fri-variabel LK er *sunn*.

Teorem 2.1 (Sunnhet). Hvis en sekvent er bevisbar i fri-variabel LK, så er den gyldig.

Sentralt i beviset står argumentet for at det å anvende en LK-regel på en falsifiserbar utledning gir en falsifiserbar utledning.

Lemma 2.1. Enhver utledning med falsifiserbar rotsekvent er falsifiserbar.

Vi skal ta en kort repetisjon av sunnhetsargumentet.

Falsifiserbarhet

- I sunnhetsbeviset for *grunn* LK viste vi at alle reglene bevarer falsifiserbarhet oppover.
- I fri-variabel LK utvidet vi semantikken med variabeltilordninger for å tolke formler med frie variable.
- Vi måtte også innføre et nytt falsifiseringsbegrep for sekventer med frie variable.
- β -reglene i fri-variabel LK bevarer *ikke* falsifiserbarhet oppover.
- Vi innførte derfor falsifiserbarhet for *utledninger*.
- En modell *falsifiserer* en utledning hvis ethvert valg av variabeltilordning for modellen gir en falsifisert gren.

β -regelen bevarer ikke falsifiserbarhet oppover

- Se på slutningen

$$\frac{Pu \vdash Pa, Qb \quad Qu \vdash Pa, Qb}{Pu \vee Qu \vdash Pa, Qb}$$

- La \mathcal{M} være en modell slik at $|\mathcal{M}| = \{a, b\}$, $a^{\mathcal{M}} = a$, $b^{\mathcal{M}} = b$, $P^{\mathcal{M}} = \{b\}$ og $Q^{\mathcal{M}} = \{a\}$.
- Vi har to aktuelle variabeltilordninger for \mathcal{M} : $\mu_1(u) = a$ og $\mu_2(u) = b$.
- \mathcal{M} falsifiserer konklusjonen:
 - \mathcal{M} falsifiserer begge formlene i succedenten.
 - $\mathcal{M}, \mu_1 \models Qu$ og $\mathcal{M}, \mu_2 \models Pu$, så \mathcal{M} gjør formelen i antecedenten sann uavhengig av variabeltilordning.
- Premissene er *ikke* falsifiserbare. (Prøv!)
- Konklusjonen er falsifiserbar, mens premissene *ikke* er det!

Beviset for falsifiserbarhetslemmaet

- Beviset for falsifiserbarhetslemmaet går ved strukturell induksjon på utledninger.
- I induksjonssteget
 - antar vi at en utledning π er falsifiserbar, og
 - viser at utledningen vi får når vi utvider π med en fri-variabel LK-regel også er falsifiserbar.
- Vi får ett tilfelle for hver LK-regel.
- Antagelsen om at π er falsifiserbar gir oss en falsifiserende modell \mathcal{M} .
- For α -, β - og γ -reglene kan vi vise at \mathcal{M} også falsifiserer den utvidete utledningen.
- Det holder ikke for δ -reglene. Her konstruerer vi en ny modell (basert på \mathcal{M}) som falsifiserer den utvidete utledningen.

Beviset for falsifiserbarhetslemmaet – δ -regelen

$$\frac{\Gamma, \varphi[f(u_1, \dots, u_n)/x] \vdash \Delta}{\Gamma, \exists x \varphi \vdash \Delta} \text{L}\exists$$

- Hvis vi utvider med en δ -slutning, så vil den nye løvsekventen inneholde Skolemtermen $f(u_1, \dots, u_n)$.
- Vi lager en ny modell \mathcal{M}' som er lik \mathcal{M} bortsett fra tolkningen av f .
- For hver variabeltilordning μ for \mathcal{M}' spesifiserer vi \mathcal{M}', μ sin tolkning av den introduserte Skolemtermen slik at \mathcal{M}', μ gjør $\varphi[f(u_1, \dots, u_n)/x]$ sann dersom \mathcal{M}, μ gjør $\exists x \varphi$ sann.
- Siden f ikke forekommer i π og \mathcal{M} er lik \mathcal{M}' utenom f , så er π falsifisert av \mathcal{M}' .
- Ved å bruke de semantiske definisjonene, viser vi så at \mathcal{M}' falsifiserer den utvidete utledningen.

Teorem 2.2 (Sunnhet). Hvis $\Gamma \vdash \Delta$ er bevisbar i fri-variabel LK, så er $\Gamma \vdash \Delta$ gyldig.

Bevis. • Anta at $\langle \pi, \sigma \rangle$ er et bevis for $\Gamma \vdash \Delta$.

- Anta for motsigelse at $\Gamma \vdash \Delta$ ikke er gyldig, men er falsifiserbar.
- Ved Lemma finnes en modell \mathcal{M} som falsifiserer π .
- La μ være en variabeltilordning slik at $\mu(x) = (x\sigma)^{\mathcal{M}}$ for hver variabel x i støtten til σ .
- Da finnes en gren G i π som er falsifisert av \mathcal{M} under μ .
- Siden σ lukker løvsekventen på G , så finnes atomære formler $\varphi \in G^{\top}$ og $\psi \in G^{\perp}$ slik at $\varphi\sigma = \psi\sigma$.
- Siden G er falsifisert av \mathcal{M} under μ , så $\mathcal{M}, \mu \models \varphi$ og $\mathcal{M}, \mu \not\models \psi$.
- Fra Lemma har vi $\mathcal{M} \models \varphi\sigma$ og $\mathcal{M} \not\models \psi\sigma$. Men $\varphi\sigma = \psi\sigma$, motsigelse.

□