# Forelesning 15: Oppgaveløsing

Christian Mahesh Hansen - 21. mai 2007

# 1 Generelle eksamenstips

## 1.1 Disponér tiden!

- Sett opp et grovt tidsbudsjett.
- En tre timers eksamen har 3 * 60 = 180 minutter.
- Oppgavene er vektet med %.
- Beregn 15-30 minutter til å se gjennom og fullføre ubesvarte oppgaver på slutten av eksamenstiden.
- Fordel de resterende minuttene prosentvis på hver oppgave.
- Ikke bli sittende med en oppgave lengre enn oppgavens prosentsats tilsier. Hopp heller videre til neste oppgave!
- Gjør gjerne oppgaver du er sikker på tidlig, og bruk heller tid på slutten til usikre oppgaver og "nøtter".

## 1.2 Forstå teksten og begrepene!

- Sørg for at du har forstått oppgaven!!
- Er du usikker, spør faglærer!
- Skriv gjerne ned definisjonene av sentrale begreper i oppgaveteksten.
- Finn ut hva oppgaven spør etter!
- Hva slags svar kreves av deg? Sørg for å besvare oppgaven!
- Hvordan må du gå fram for å vise det du blir bedt om i de tilfeller der oppgaven spør om bevis for påstander? (Repetér gjerne foilene om bevisteknikker!)
- På en tre timers eksamen krever vi ikke lange avhandlinger som oppgavesvar. Hvis du tar deg selv i å skrive sidevis på én deloppgave er det stor sjanse for at du kanskje har misforstått oppgaven...

# 2 Eksamen 2006

## 2.1 Oversikt

**Eksamen 2006**

- Seks oppgaver
- Utsagnslogikk, førsteordens logikk, intuisjonistisk logikk, sekventkalkyler, induksjon, fri-variabel LK

- Nesten hele pensum dekket
- Disponere tiden: 3 * 60 minutter = 180 minutter totalt
- Sett av en halv time til å se over til slutt, dvs. 150 minutter til å løse oppgavene

## 2.2 Oppgave 1: Utsagnslogikk (10 % = 15 min)

1. $A \lor (B \land C) \vdash B \land (A \lor C)$
2. $B \land (A \lor C) \vdash A \lor (B \land C)$

a) For hver av sekventene over: finn et LK-bevis for sekventen eller en valuasjon som falsifiserer sekventen.

b) La nå $A$, $B$ og $C$ være plassholdere for vilkårlige formler. Er følgende regel en *sunn* LK-regel? Begrunn svaret.

$$\frac{\Gamma, A \lor (B \land C) \vdash \Delta}{\Gamma, B \land (A \lor C) \vdash \Delta}$$

**Identifisér sentrale begreper**

a) For hver av sekventene over: finn et LK-*bevis* for sekventen eller en valuasjon som *falsifiserer* sekventen.

Sentrale begreper:

- LK-*bevis*: LK-utledning der *alle* løvsekventene er aksiomer, dvs. har samme atomære formel i både antecedenten og succedenten
- *falsifiserende valuasjon*: en valuasjon som oppfyller *alle* formlene i antecedenten og falsifiserer *alle* formlene i succedenten

**a) Finn** LK-**bevis eller falsifiserende valuasjon**

1. $A \lor (B \land C) \vdash B \land (A \lor C)$

Hvordan griper vi oppgaven an?

- Hvis sekventen er *gyldig*, vet vi at den er LK-bevisbar. (Hvorfor?)
- Men hvis den *ikke* er gyldig, skal vi gi en motmodell.
- Da er det dumt å bruke tid på å skrive ut en LK-utledning...
- La oss forsøke å finne ut om sekventen er gyldig først!

**Er sekventen gyldig?**

1. $A \lor (B \land C) \vdash B \land (A \lor C)$

- En sekvent er *gyldig* hvis enhver valuasjon som oppfyller *alle* fml. i antecedenten også oppfyller én fml i succedenten.
- Anta at $v \models A \lor (B \land C)$. Da må
  - $v \models A$, eller
  - $v \models B \land C$, dvs. $v \models B$ *og* $v \models C$.
- Følger det fra antakelsen at $v \models B \land (A \lor C)$, dvs. at $v \models B$ *og* $v \models A \lor C$?
  - Hvis $v \models A$, så vet vi ikke om $v$ oppfyller $B$.
  - Kan $v \models A$, $v \not\models B$, $v \not\models C$ være en motmodell...? Ja!

**Svar på 1 a) 1:**

Enhver modell $v$ slik at $v \models A$ og $v \not\models B$ er motmodell til sekventen.

**Er sekventen gyldig?**

2. $B \land (A \lor C) \vdash A \lor (B \land C)$

- Anta at $v \models B \land (A \lor C)$, dvs. at $v \models B$, *og*
  (a) $v \models A$, eller
  (b) $v \models C$.
- Følger det fra antakelsen av $v$ oppfyller $A \lor (B \land C)$? Vi får to tilfeller:
  (a) Hvis $v \models A$, så er venstre disjunkt oppfyllt.
  (b) Hvis $v \models C$, så holder $v \models B \land C$.
- Sekventen er gyldig!

**Vi gir et LK-bevis som svar**

2. $B \land (A \lor C) \vdash A \lor (B \land C)$

**Svar på 1 a) 2:**

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\overset{\times}{B, A \vdash A, B \land C} \qquad \dfrac{\overset{\times}{B, C \vdash A, B} \qquad \overset{\times}{B, C \vdash A, C}}{B, C \vdash A, B \land C}}{B, A \lor C \vdash A, B \land C}}{B, A \lor C \vdash A \lor (B \land C)}}{B \land (A \lor C) \vdash A \lor (B \land C)}$$

**Oppgave 1 b) – sunnhet av LK-regel**

b) La nå $A$, $B$ og $C$ være plassholdere for vilkårlige formler. Er følgende regel en sunn LK-regel? Begrunn svaret.

$$\frac{\Gamma, A \lor (B \land C) \vdash \Delta}{\Gamma, B \land (A \lor C) \vdash \Delta}$$

Sentrale begreper:

- En LK-regel er *sunn* hvis den er falsifiserbarhetsbevarende oppover (OBS! Står ikke på sunnhetsfoilene!), dvs. at enhver valuasjon som falsifiserer konklusjonen også falsifiserer minst ett av premissene.

**Hvordan gå frem for å løse oppgaven?**

$$\frac{\Gamma, A \lor (B \land C) \vdash \Delta}{\Gamma, B \land (A \lor C) \vdash \Delta}$$

- To alternativer: enten så er regelen sunn, eller så er den ikke sunn.
- Hvis regelen er sunn, må vi gi en begrunnelse for sunnheten.
- Hvis regelen ikke er sunn, så må vi komme med et *moteksempel* til sunnhet, dvs. en valuasjon som falsifiserer konklusjonen, men som *ikke* falsifiserer premisset.
- Det finnes ingen generell regel for hva som lønner seg å gjøre, men ofte kan det være lurt å forsøke å vise sunnhet.
- Hvis beviset ikke går, får man ofte en idé til en moteksempel fra der beviset strander.

**Løsning på 1 b)**

$$\frac{\Gamma, A \lor (B \land C) \vdash \Delta}{\Gamma, B \land (A \lor C) \vdash \Delta}$$

Observasjon:

- Fra 1 a) 2 har vi at sekventen $B \land (A \lor C) \vdash A \lor (B \land C)$ er gyldig.
- Det betyr at enhver valuasjon som oppfyller antecedenten også må oppfylle $A \lor (B \land C)$, siden det er den eneste formelen i succedenten.

**Svar 1 b):**

LK-regelen er sunn. *Bevis:* anta at $v$ falsifiserer konklusjonen, dvs. at $v$ oppfyller alle i $\Gamma \cup \{B \land (A \lor C)\}$, og at $v$ falsifiserer alle i $\Delta$.Fra observasjonen over har vi at $v$ må oppfylle $A \lor (B \land C)$, og dermed falsifiserer $v$ premisset.Siden $v$ var vilkårlig valgt, så bevarer regelen falsifiserbarhet oppover. Den er dermed sunn.

## 2.3 Oppgave 2: Sekventkalkyler (25 % = 37,5 min)

a) Avgjør om følgende sekvent er gyldig: $\vdash A \vee (A \to B)$

I utsagnslogisk **LK** har vi følgende regel: $\dfrac{\Gamma \vdash A, B, \Delta}{\Gamma \vdash A \vee B, \Delta}\ \mathrm{R}\vee$

La **LK**$^{-}$ være kalkylen vi får ved å erstatte denne regelen med følgende to regler:

$$\dfrac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma \vdash A \vee B, \Delta}\ \mathrm{R}\vee_1 \qquad \dfrac{\Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \vee B, \Delta}\ \mathrm{R}\vee_2$$

Du trenger i det følgende ikke argumentere for at **LK** er sunn og komplett.

b) Er **LK**$^{-}$ en sunn kalkyle? Forklar hvorfor eller hvorfor ikke.

c) Er **LK**$^{-}$ en komplett kalkyle? Forklar hvorfor eller hvorfor ikke.

d) Avgjør om sekventen fra (a) er *intuisjonistisk* gyldig. Hvis sekventen er gyldig, gi et **LJ**-bevis. Hvis ikke, gi en Kripke-modell som er motmodell til sekventen.

**a) Er sekventen $\vdash A \vee (A \to B)$ gyldig?**

- Vi ser her at det tar kort tid å lage en **LK**-utledning for sekventen.
- Vi ser da at utledningen er et **LK**-bevis.
- Det er imidlertid ikke nok å sette opp **LK**-beviset!
- Vi må trekke inn sunnhet av **LK** for å gå fra **LK**-bevisbar til gyldig.

**Svar på 2 a):**

Sekventen er gyldig.Her er et **LK**-bevis for den:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\times}{A \vdash A, B}}{\vdash A, A \to B}}{\vdash A \vee (A \to B)}$$

Siden **LK** er en sunn kalkyle, så er enhver bevisbar sekvent gyldig.

Merk: Vi kunne også argumentert semantisk. Gjør det som en oppgave!

**b) Er LK$^{-}$ sunn?**

$$\dfrac{\Gamma \vdash A, B, \Delta}{\Gamma \vdash A \vee B, \Delta}\ \mathrm{R}\vee \quad \rightsquigarrow \quad \dfrac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma \vdash A \vee B, \Delta}\ \mathrm{R}\vee_1 \quad \dfrac{\Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \vee B, \Delta}\ \mathrm{R}\vee_2$$

- I sunnhetsbeviset for utsagnlogisk **LK**viste vi at alle reglene er sunne, dvs. at de bevarer falsifiserbarhet oppover.
- Dette er tilstrekkelig for å vise sunnhet av kalkylen.
- I **LK**$^-$ har vi erstattet R$\lor$ med reglene R$\lor_1$ og R$\lor_2$.
- Hvis R$\lor_1$ og R$\lor_2$ er sunne, så er alle reglene i **LK**$^-$ sunne.

### b) Er LK$^-$ sunn?

$$\frac{\Gamma \vdash A, B, \Delta}{\Gamma \vdash A \lor B, \Delta}\,\mathrm{R}\lor \quad \rightsquigarrow \quad \frac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma \vdash A \lor B, \Delta}\,\mathrm{R}\lor_1 \quad \frac{\Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \lor B, \Delta}\,\mathrm{R}\lor_2$$

### Svar 2 b):

**LK**$^-$ er sunn. *Bevis:* Alle reglene i **LK**$^-$ utenom R$\lor_1$ og R$\lor_2$ er også **LK**-regler. Vi har vist at disse reglene er sunne i sunnhetsbeviset for **LK**. Hvis vi viser at R$\lor_1$ og R$\lor_2$ er sunne, så kan vi gjøre sunnhetsargumentet for **LK**$^-$ på samme måte som for **LK**.

*Påstand:* Reglene R$\lor_1$ og R$\lor_2$ er sunne. *Bevis:* Anta at $v$ falsifiserer konklusjonen, dvs. at $v$ oppfyller alle fml. i $\Gamma$, og at $v$ falsifiserer alle fml. i $\Delta \cup \{A \lor B\}$. Siden $v \not\models A \lor B$, så har vi pr. def. av valuasjoner at $v \not\models A$ og $v \not\models B$. Fra dette følger at $v$ falsifiserer premissene i både R$\lor_1$ og R$\lor_2$. Siden $v$ var vilkårlig valgt, så bevarer R$\lor_1$ og R$\lor_2$ falsifiserbarhet, dvs. at de er sunne.

### c) Er LK$^-$ komplett?

$$\frac{\Gamma \vdash A, B, \Delta}{\Gamma \vdash A \lor B, \Delta}\,\mathrm{R}\lor \quad \rightsquigarrow \quad \frac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma \vdash A \lor B, \Delta}\,\mathrm{R}\lor_1 \quad \frac{\Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \lor B, \Delta}\,\mathrm{R}\lor_2$$

- Her er det to muligheter: enten så er **LK**$^-$ komplett, eller så er **LK**$^-$ ikke komplett.
- Hvis **LK**$^-$ er komplett, så må vi gi et argument for det.
- Hvis **LK**$^-$ ikke er komplett, så må vi komme med et *moteksempel*, dvs. en gyldig sekvent som ikke er bevisbar i **LK**$^-$.
- Husk: **LK**$^-$ er komplett hvis enhver gyldig sekvent er **LK**$^-$-bevisbar.
- Legg merke til premissene til R$\lor_1$ og R$\lor_2$: én av disjunktene til $A \lor B$ *forsvinner*.
- Hva om vi trenger begge for å komme fram til et bevis?
- Husk: kontraksjon er *ikke* en del av utsagnslogisk **LK**, og derfor heller ikke en del av **LK**$^-$.

**c) Er** $\mathsf{LK}^-$ **komplett?**

$$\frac{\Gamma \vdash A, B, \Delta}{\Gamma \vdash A \vee B, \Delta}\,\mathsf{R}\vee \quad \rightsquigarrow \quad \frac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma \vdash A \vee B, \Delta}\,\mathsf{R}\vee_1 \quad \frac{\Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \vee B, \Delta}\,\mathsf{R}\vee_2$$

- I kompletthetsbeviset for LK viste vi at vi kunne konstruere en motmodell til enhver ikke-bevisbar sekvent $\Gamma \vdash \Delta$:
- Fra en åpen gren $G$ i en *maksimal* utledning for $\Gamma \vdash \Delta$ konstruerte vi en valuasjon $v$ slik at $v \models A$ hvis og bare hvis $A$ forekommer i $G^\top$.
- Vi viste så at for alle formler $\varphi$ i $G^\top$ så har vi $v \models \varphi$, og for alle formler $\varphi$ i $G^\perp$ så $v \not\models \varphi$.
- I tilfellet $A \vee B \in G^\perp$:
  - Siden $A \vee B$ er ekspandert på $G$, så har vi $A, B \in G^\perp$.
  - Siden $A$ og $B$ er av enklere struktur, så har vi ved IH $v \not\models A$ og $v \not\models B$.
  - Ved def. av valuasjoner har vi $v \not\models A \vee B$.
- I $\mathsf{LK}^-$ har vi at *enten* $A \in G^\perp$ *eller* $B \in G^\perp$, avhengig av om vi brukte $\mathsf{R}\vee_1$ eller $\mathsf{R}\vee_2$ på $A \vee B$.
- Ikke nok til å slutte at $v \not\models A \vee B$!

**c) Er** $\mathsf{LK}^-$ **komplett?**

- Se på sekventen fra oppgave 2 a): $\vdash A \vee (A \to B)$
- Kan brukes som moteksempel til kompletthet av $\mathsf{LK}^-$!

**Svar på 2 c):**

$\mathsf{LK}^-$ er *ikke* komplett. *Moteksempel:* Vi viste at sekventen $\vdash A \vee (A \to B)$ var gyldig i oppgave 2 a). Den er *ikke* bevisbar i $\mathsf{LK}^-$:

$$\frac{\vdash A}{\vdash A \vee (A \to B)}\,\mathsf{R}\vee_1 \qquad \frac{\dfrac{A \vdash B}{\vdash A \to B}\,\mathsf{R}\to}{\vdash A \vee (A \to B)}\,\mathsf{R}\vee_2$$

Uansett om vi starter med $\mathsf{R}\vee_1$ eller $\mathsf{R}\vee_2$, så kommer vi ikke fram til noe $\mathsf{LK}^-$-bevis.

Merk: vi må vise at *ingen* $\mathsf{LK}^-$-utledninger for sekventen er $\mathsf{LK}^-$-bevis! Ikke nok å gi én av utledningene ovenfor!

**d) Er** $\vdash A \vee (A \to B)$ **intuisjonistisk gyldig?**

- Det kan ofte kreve litt kreativitet å finne intuisjonistiske motmodeller...
- LJ-bevis er derimot ikke veldig krevende å finne!
- La oss derfor være optimistiske og forsøke å bevise sekventen i LJ:

$$\frac{\vdash A}{\vdash A \lor (A \to B)}\,\mathrm{R}\lor_1 \qquad \frac{\dfrac{A \vdash B}{\vdash A \to B}\,\mathrm{R}{\to}}{\vdash A \lor (A \to B)}\,\mathrm{R}\lor_2$$

- Vi kommer opp i en lignende situasjon som i forrige oppgave: sekventen er *ikke* bevisbar i LJ.
- Siden LJ er komplett for intuisjonistisk utsagnslogikk (bevis ikke pensum!) så er ikke sekventen intuisjonistisk gyldig.
- Vi må lage en Kripke-motmodell...

**Noen begreper om intuisjonistiske Kripke-modeller**

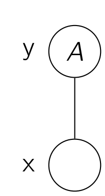
- En *Kripke-modell* er et trippel $(S, \leq, \Vdash')$ der $S$ er en mengde punkter, og $\leq$ er en partiell ordning på $S$.
- $\Vdash'$ er en binær relasjon fra $S$ til mengden av atomære formler. $\Vdash'$ er *monoton*, dvs. hvis $x \Vdash' P$ og $x \leq y$, så $y \Vdash' P$.
- $\Vdash'$ utvides til $\Vdash$, som er def. for alle formler:
  - $x \Vdash P$ hviss $x \Vdash' P$ for atomær $P$
  - $x \Vdash A \land B$ hviss $x \Vdash A$ og $x \Vdash B$
  - $x \Vdash A \lor B$ hviss $x \Vdash A$ eller $x \Vdash B$
  - $x \Vdash A \to B$ hviss vi for enhver $y$ slik at $x \leq y$ har at:
    hvis $y \Vdash A$, så $y \Vdash B$
  - $x \Vdash \neg A$ hviss for enhver $y$ slik at $x \leq y$: $y \nVdash A$
- Et punkt i $x$ i en Kripke-modell er en *motmodell* til en sekvent $\Gamma \vdash C$ hvis $x \Vdash \Gamma$ and $x \nVdash C$. Hvis det finnes et slikt punkt i modellen sier vi at *Kripke-modellen* er en motmodell til sekventen.

**Intuisjonistisk motmodell til** $\vdash A \lor (A \to B)$

- Vi må lage en Kripke-modell som har et punkt $x$ slik at $x \nVdash A \lor (A \to B)$, dvs. at $x \nVdash A$ *og* $x \nVdash A \to B$.
- For at $x \nVdash A \to B$, så må det finnes et punkt $y$ slik at $x \leq y$ og
  - $y \Vdash A$
  - $y \nVdash B$

**Svar på 2 d):**

Sekventen er ikke intuisjonistisk gyldig. En motmodell er gitt til høyre. Kripke-modellen har to punkter; $x$ og $y$ slik at $x \leq y$. Siden $y \Vdash A$ og $y \nVdash B$, så har vi at $x \nVdash A \to B$. Videre har vi at $x \nVdash A$. Dermed er $x$ en motmodell til sekventen.



**Generelle tips til intuisjonistiske motmodeller**

- For at en Kripke-modell skal være en motmodell til en sekvent $\Gamma \vdash C$, så må det finnes et punkt $x$ i Kripke-modellen slik at $x \Vdash \Gamma$ og $x \nVdash C$.
- Sett opp en oversikt over hvilke formler $x$ skal tvinge og hvilke formler $x$ *ikke* skal tvinge.
- Bruk definisjonen av $\Vdash$ til å finne ut hvilke egenskaper punktet $x$ må ha, og hvilke evt. andre punkter modellen må inneholde. Finn også ut hvordan punktene må relateres med $\leq$.
- Gi gjerne svaret ditt som en graf der et punkt $y$ ligger over et punkt $x$ hvis og bare hvis $x \leq y$.
- Husk å oppgi hvilket punkt i modellen din som er motmodell til sekventen og hvorfor!
- Bruk gjerne svaret på oppgave 2 d) på forrige foil som mal.

## 2.4 Oppgave 3: Induksjon (15 % = 22,5 min)

Hvis $F$ er en utsagnslogisk formel og $P$ er en utsagnsvariabel, la $F[A/P]$ betegne formelen $F$ hvor alle forekomster av $P$ er erstattet med $A$. La $A$ og $B$ være utsagnslogiske formler. Vis ved strukturell induksjon at hvis $A$ og $B$ er *ekvivalente*, så er $F[A/P]$ og $F[B/P]$ ekvivalente.

- Operatoren '/' betegner det å erstatte alle forekomster av en gitt utsagnsvariabel med en gitt utsagnslogisk formel.
- Hvis $F = P \land (Q \to P)$ så er
  - $F[R \to Q/P] = (R \to Q) \land (Q \to (R \to Q))$,
  - $F[P/Q] = P \land (P \to P)$, og
  - $F[P/R] = P \land (Q \to P)$.
- Sett gjerne opp noen eksempler på et kladdeark hvis du er usikker på hva som menes!
- To utsagnslogiske formler $A$ og $B$ er *ekvivalente* hvis for enhver valuasjon $v$ så holder $v \models A$ hvis og bare hvis $v \models B$.

Hvis $A$ og $B$ er ekvivalente, så er $F[A/P]$ og $F[B/P]$ ekvivalente.

**Svar på 3:**

Anta at $A$ og $B$ er ekvivalente. Vi viser at $F[A/P]$ og $F[B/P]$ er ekvivalente ved strukturell induksjon på $F$.

<u>Basistilfelle:</u> $F$ er en atomær formel $Q$. Vi får to tilfeller:

- Hvis $Q = P$, så har vi $Q[A/P] = P[A/P] = A$ som pr. antakelse er ekvivalent med $B = P[B/P] = Q[B/P]$.
- Hvis $Q \neq P$, så har vi $Q[A/P] = Q = Q[B/P]$.

Hvis $A$ og $B$ er ekvivalente, så er $F[A/P]$ og $F[B/P]$ ekvivalente.

**Svar på 3 (forts.):**

Induksjonssteg: Anta at $F = \neg C$. Siden $C$ er av enklere struktur enn $\neg C$, kan vi anta at $C[A/P]$ og $C[B/P]$ er ekvivalente. La $v$ være en vilkårlig valuasjon. Vi har at

- $(\neg C)[A/P] = \neg C[A/P]$, og at
- $(\neg C)[B/P] = \neg C[B/P]$,

siden erstatting av utsagnsavariable med formler ikke endrer $\neg$. Pr. antakelse har vi at $C[A/P]$ og $C[B/P]$ er ekvivalente. Men da må $\neg C[A/P]$ og $\neg C[B/P]$ være ekvivalente.

Hvis $A$ og $B$ er ekvivalente, så er $F[A/P]$ og $F[B/P]$ ekvivalente.

**Svar på 3 (forts.):**

Induksjonssteg: Anta at $F = C \circ D$, der $\circ \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$. Siden $C$ og $D$ er av enklere struktur enn $C \circ D$, kan vi anta at $C[A/P]$ og $C[B/P]$ er ekvivalente, og at $D[A/P]$ og $D[B/P]$ er ekvivalente. Vi har at

- $(C \circ D)[A/P] = C[A/P] \circ D[A/P]$, og at
- $(C \circ D)[B/P] = C[B/P] \circ D[B/P]$,

siden erstatting av utsagnsavariable med formler ikke endrer binære konnektiver. La $v$ være en vilkårlig valuasjon. $v(C[A/P] \circ D[A/P])$ er avhengig av $v(C[A/P])$ og $v(D[A/P])$. Pr. antakelse har vi at $v(C[A/P]) = v(C[B/P])$ og at $v(D[A/P]) = v(D[B/P])$. Men da må $v(C[A/P] \circ D[A/P]) = v(C[B/P] \circ D[B/P])$. Siden $v$ var vilkårlig, så er $(C \circ D)[A/P]$ og $(C \circ D)[B/P]$ ekvivalente.

## 2.5 Oppgave 4: Førsteordens logikk (20 % = 30 min)

Gi **korte** svare på følgende spørsmål.

a) Hva er det minste antall elementer i domenet til en førsteordens modell?

**Svar på 4 a):**

Det minste antall elementer domenet kan ha er 1.

Husk: domenet til en førsteordens modell må være ikke-tomt!

b) La $f$ være et funksjonsssymbol med aritet 1 og la $a$ være et konstantsymbol. Hva er *Herbranduniverset* til følgende formel: $\forall x(Pfx \rightarrow \exists yQya)$?

- *Herbranduniverset* til en formel er mengden av lukkede termer vi kan generere fra konstant- og funksjonssymboler i formelen.

- Hvis formelen ikke inneholder noen konstantsymboler, så er *dummykonstanten o* med i Herbranduniverset til formelen.
- Her har vi konstantsymbolet $a$, så vi behøver ikke ha med dummykonstanten.

**Svar på 4 b):**

$a, fa, ffa, fffa, \ldots$

c) Skriv følgende formel om til preneks normalform: $\exists x Pxa \to \forall y Gya$.

- En formel $\varphi$ er på *preneks normalform* (PNF) hvis $\varphi$ er på formen
$$\mathcal{Q}_1 x_1 \ldots \mathcal{Q}_n x_n \psi$$
der hver $\mathcal{Q}_i$ er en kvantor ($\forall$ eller $\exists$), hver $x_i$ er en variabel og $\psi$ er en åpen (kvantorfri) formel.
- Se oppgavesett 6 for omskrivingsregler!

**Svar på 4 c):**

$$\begin{aligned} \exists x Pxa \to \forall y Gya &\rightsquigarrow \neg \exists x Pxa \lor \forall y Gya \\ &\rightsquigarrow \forall x \neg Pxa \lor \forall y Gya \\ &\rightsquigarrow \forall x (\neg Pxa \lor \forall y Gya) \\ &\rightsquigarrow \forall x \forall y (\neg Pxa \lor Gya) \end{aligned}$$

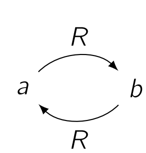
For hver av sekventene under, finn et LK-bevis (i grunn LK) for sekventen eller en motmodell som falsifiserer sekventen.

d) $\vdash \forall x (Rxa \lor Rxb) \to \forall x Rxx$

- "Hvis alle liker $a$ eller $b$, så liker alle seg selv." – tvilsomt!
- Vi trenger en motmodell der alle liker enten $a$ eller $b$, men der det finnes minst ett element som *ikke* liker seg selv.

**Svar på 4 d):**

Sekventen er *ikke* gyldig. La $\mathcal{M}$ være en modell med domene $\{a, b\}$. La $a^{\mathcal{M}} = a$ og $b^{\mathcal{M}} = b$. La $R^{\mathcal{M}} = \{\langle a, b\rangle, \langle b, a\rangle\}$. Vi har nå at $\mathcal{M} \models \forall x (Rxa \lor Rxb)$ og at $\mathcal{M} \not\models \forall x Pxx$, og $\mathcal{M}$ falsifiserer dermed formelen i succedenten.




e) $\vdash \exists x (Px \to (Pa \land Pb))$

**Svar på 4 e):**

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$\times$}
\noLine
\UnaryInfC{$Pa \vdash Pa, \varphi$}
\AxiomC{$\times$}
\noLine
\UnaryInfC{$Pa, Pb \vdash Pb, Pa \land Pb, \varphi$}
\UnaryInfC{$Pa \vdash Pb, Pb \to (Pa \land Pb), \varphi$}
\UnaryInfC{$Pa \vdash Pb, \varphi$}
\BinaryInfC{$Pa \vdash Pa \land Pb, \varphi$}
\UnaryInfC{$\vdash Pa \to (Pa \land Pb), \varphi$}
\UnaryInfC{$\vdash \underbrace{\exists x(Px \to (Pa \land Pb))}_{\varphi}$}
\end{prooftree}
$$

## 2.6 Oppgave 5: Sant eller usant (10 % = 15 min)

Er følgende påstander sanne eller usanne? Hvis påstanden er usann, så gi et moteksempel. Hvis påstanden er sann, så gi et kort argument.

a) Hvis $A$ er oppfyllbar og $B$ er oppfyllbar, så er $A \land B$ oppfyllbar.

b) Hvis $A$ er oppfyllbar og $B$ er oppfyllbar, så er $A \to B$ oppfyllbar.

c) Det fins tre formler $A$, $B$ og $C$ slik at mengdene $\{A, B\}$, $\{B, C\}$ og $\{A, C\}$ alle er oppfyllbare, men hvor mengden $\{A, B, C\}$ *ikke* er oppfyllbar.

**Påstand a)**

a) Hvis $A$ er *oppfyllbar* og $B$ er oppfyllbar, så er $A \land B$ oppfyllbar.

- En formel er *oppfyllbar* hvis det finnes en valuasjon som oppfyller den (tolker den som sann).
- Merk: $A$ og $B$ kan godt være sanne i *forskjellige* modeller!

**Svar på 5 a):**

Påstanden er *usann*.

*Moteksempel:* La $A = P$ og $B = \neg P$. Vi har da at både $A$ og $B$ er oppfyllbare (i hver sine modeller), at at $A \land B = P \land \neg P$ *ikke* er oppfyllbar i noen modell.

**Påstand b)**

b) Hvis $A$ er oppfyllbar og $B$ er oppfyllbar, så er $A \to B$ oppfyllbar.

**Svar på 5 a):**

Påstanden er *sann*.

*Bevis:* Anta at $A$ og $B$ er oppfyllbare. Det finnes da en valuasjon $v$ slik at $v \models B$. Men da har vi at $v \models A \to B$, pr. def. av valuasjoner. Dermed er $A \to B$ oppfyllbar.

**Påstand c)**

c) Det fins tre formler $A$, $B$ og $C$ slik at mengdene $\{A, B\}$, $\{B, C\}$ og $\{A, C\}$ alle er oppfyllbare, men hvor mengden $\{A, B, C\}$ *ikke* er oppfyllbar.

**Svar på 5 a):**

Påstanden er *sann*.

La $A = P$, $B = P \rightarrow Q$ og $C = \neg Q$. Da er formlene parvis oppfyllbare, men mengden av alle formlene er *ikke* oppfyllbar: Enhver valuasjon som skal oppfylle $\{P, P \rightarrow Q, \neg Q\}$ må oppfylle $P$. Men hvis $v$ samtidig skal oppfylle $P \rightarrow Q$, så må $v$ også oppfylle $Q$. Men da vil $v$ *ikke* oppfylle $\neg Q$.

## 2.7 Oppgave 6: Fri-variabel LK(20 % = 30 min)

Gi **korte** svar på følgende spørsmål.

a) Finn en mest generell unifikator for termene $f(x, g(w))$ og $f(y, g(a))$.

b) Gi en unifikator for termene i forrige spørsmål som *ikke* er mest generell.

c) Hva vil det si at en substitusjon $\sigma$ *lukker* en løvsekvent i en fri-variabel LK-utledning?

d) Anta at $\pi$ er en fri-variabel LK-utledning. Hvilke egenskaper må $\sigma$ ha for at $\langle \pi, \sigma \rangle$ skal være et fri-variabel LK-bevis?

Anta at $\langle \pi, \sigma \rangle$ er et fri-variable LK-bevis for en sekvent $\Gamma \vdash \Delta$. La $\pi'$ være resultatet av å anvende $\sigma$ på alle formlene i $\pi$.

e) Er $\pi'$ et grunt LK-bevis for $\Gamma \vdash \Delta$? Begrunn svaret.

a) Finn en *mest generell unifikator* for termene $f(x, g(w))$ og $f(y, g(a))$.

- En substitusjon $\sigma$ er en *unifikator* for to termer $t_1$ og $t_2$ hvis $t_1\sigma = t_2\sigma$.
- En substitusjon $\sigma$ er *mer generell* enn en substitusjon $\tau$ hvis det finnes en substitusjon $\rho$ slik at $\sigma\rho = tau$.
- En substitusjon $\sigma$ er en *mest generell unifikator* for to termer hvis den er en unifikator for termene og den er mer generell enn alle andre unifikatorer for termene.

**Svar på 6 a):**

$\{y/x, a/w\}$

Finnes det flere mest generelle unifikatorer for termene?

b) Gi en unifikator for termene i forrige spørsmål som *ikke* er mest generell.

**Svar på 6 b):**

$\{a/x, a/y, a/w\}$

Finnes det flere unifikatorer som ikke er mest generelle?

c) Hva vil det si at en substitusjon $\sigma$ *lukker* en løvsekvent i en fri-variabel LK-utledning?

**Svar på 6 c):**

$\sigma$ lukker en løvsekvent $\Gamma \vdash \Delta$ i en fri-variable LK-utledning hvis det finnes atomære formler $\varphi \in \Gamma$ og $\psi \in \Delta$ slik at $\varphi\sigma = \psi\sigma$.

d) Anta at $\pi$ er en fri-variabel LK-utledning. Hvilke egenskaper må $\sigma$ ha for at $\langle \pi, \sigma \rangle$ skal være et fri-variabel LK-bevis?

**Svar på 6 d):**

Hvis $\sigma$ er *grunn* og lukker *alle* løvsekventene i $\pi$, så er $\langle \pi, \sigma \rangle$ et fri-variabel LK-bevis.

Anta at $\langle \pi, \sigma \rangle$ er et fri-variable LK-bevis for en sekvent $\Gamma \vdash \Delta$. La $\pi'$ være resultatet av å anvende $\sigma$ på alle formlene i $\pi$.

e) Er $\pi'$ et grunt LK-bevis for $\Gamma \vdash \Delta$? Begrunn svaret.

**Svar på 6 e):**

Nei, dette stemmer ikke. La $\Gamma \vdash \Delta$ være sekventen $\forall x Px \vdash \forall x Px$.

$$\dfrac{\dfrac{\forall x Px, Pu \vdash Pa}{\forall x Px, Pu \vdash \forall x Px}\,\mathrm{R}\forall}{\forall x Px \vdash \forall x Px}\,\mathrm{L}\forall \qquad \overset{\sigma = \{a/u\}}{\rightsquigarrow} \qquad \dfrac{\dfrac{\forall x Px, Pa \vdash Pa}{\forall x Px, Pa \vdash \forall x Px}\,\mathrm{R}\forall}{\forall x Px \vdash \forall x Px}\,\mathrm{L}\forall$$

La $\pi$ være fri-variabel LK-utledningen til venstre. Løvsekventen kan lukkes med $\sigma = \{a/u\}$, slik at $\langle \pi, \sigma \rangle$ er et fri-variabel LK-bevis. Resultatet av å anvende $\sigma$ på $\pi$ vises til høyre. Dette er *ikke* en grunn LK-utledning, siden konstantsymbolet $a$ som introduseres i $\delta$-slutningen forekommer i konklusjonen.