

INF3170 – Logikk

Forelesning 16: Repetisjon

Christian Mahesh Hansen

Institutt for informatikk, Universitetet i Oslo

4. juni 2007



Dagens plan

- 1 Kompletthet
- 2 Førsteordens sekventkalkyle
- 3 Intuisjonistisk logikk

Kompletthet

Definisjon (Kompletthet)

Sekventkalkylen LK er **komplett** hvis enhver gyldig sekvent er LK-bevisbar.

- Beviset for kompletthet bygger på *modelleksistensteoremet*:

Teorem (Modelleksistens)

Hvis en sekvent $\Gamma \vdash \Delta$ ikke er bevisbar i LK, så har den en motmodell.

Kompletthet følger fra modelleksistens

- Anta nå at vi har vist modelleksistens.
- Kompletthet av LK følger umiddelbart fra modelleksistens.

Påstand

Sekventkalkylen LK er komplett.

Skal vise: $\Gamma \vdash \Delta$ gyldig $\Rightarrow \Gamma \vdash \Delta$ bevisbar i LK

Kontrapositivt: $\Gamma \vdash \Delta$ ikke bevisbar i LK $\Rightarrow \Gamma \vdash \Delta$ ikke gyldig

Bevis

Anta at sekventen $\Gamma \vdash \Delta$ ikke er bevisbar i LK. Da har $\Gamma \vdash \Delta$ en motmodell, ved modelleksistensteoremet. Men da er $\Gamma \vdash \Delta$ ikke gyldig.

Hvordan vise modelleksistens?

Modelleksistens for både utsagnslogikk og førsteordens logikk er basert på den samme idéen:

- ① Lag en maksimal utledning for en ikke-bevisbar sekvent.
- ② Siden sekventen ikke er bevisbar, må den maksimale utledningen ha minst én åpen gren.
- ③ Konstruér en motmodell til rotsekventen fra den åpne grenen.

Kjernen i beviset blir å vise at valuasjonen eller modellen man konstruerer fra den åpne grenen faktisk er en motmodell til rotsekventen i utledningen.

Vi viser dette ved induksjon på formlene i grenen.

Modelleksistens for utsagnslogikk

Teorem (Modelleksistens)

Hvis en sekvent $\Gamma \vdash \Delta$ ikke er bevisbar i LK, så har den en motmodell.

- Anta at $\Gamma \vdash \Delta$ ikke er bevisbar.
- Lag en *maksimal* LK-utledning π for $\Gamma \vdash \Delta$, dvs. en utledning der enhver formel på enhver gren er ekspandert.
- I utsagnslogikk er π en *endelig* objekt, siden vi startet med et endelig antall formler i rotsekventen og hver formel kun kan ekspanderes én gang i hver gren.
- Siden $\Gamma \vdash \Delta$ ikke er bevisbar, så må π ha en åpen gren G . (Hvis ikke, ville $\Gamma \vdash \Delta$ vært bevisbar.)
- Vi definerer to mengder:
 - G^\top inneholder alle antecedentformler på G
 - G^\perp inneholder alle succedentformler på G

Konstruksjon av valuasjon

- Vi konstruerer en valuasjon v på utsagnsvariable P som følger:

$$v(P) = \mathbf{1} \quad \text{hvis og bare hvis} \quad P \in G^\top$$
- Valuasjonen v er *veldefinert*, dvs. at ikke både $v(P) = \mathbf{1}$ og $v(P) = \mathbf{0}$ for en utsagnsvariabel P . Dette følger fra at G ikke er lukket.

Påstand

For alle *formler* $A \in G$ har vi at

- $A \in G^\top$ impliserer at $v(A) = \mathbf{1}$, og
- $A \in G^\perp$ impliserer at $v(A) = \mathbf{0}$.

- Anta at vi har vist påstanden over.
- Siden $\Gamma \subseteq G^\top$ har vi at $v \models \Gamma$.
- Siden $\Delta \subseteq G^\perp$ har vi at v falsifiserer alle formlene i Δ .
- Dermed er v en motmodell til rotsekventen $\Gamma \vdash \Delta$.

Konstruert valuasjon er motmodell

Konstruksjon av v : $v(P) = \mathbf{1}$ hvis og bare hvis $P \in G^\top$

Påstand

For alle *formler* $A \in G$ har vi at

- $A \in G^\top$ impliserer at $v(A) = \mathbf{1}$, og
- $A \in G^\perp$ impliserer at $v(A) = \mathbf{0}$.

Bevis

Ved *strukturell induksjon* på $A \in G$.

Basistilfelle: Anta at A er en utsagnsvariabel P . Det følger da fra definisjonen av v at $v(P) = \mathbf{1}$ hvis $P \in G^\top$ og $v(P) = \mathbf{0}$ hvis $P \in G^\perp$.

Konstruert valuasjon er motmodell

Påstand

For alle *formler* $A \in G$ har vi at

- $A \in G^{\top}$ impliserer at $v(A) = \mathbf{1}$, og
- $A \in G^{\perp}$ impliserer at $v(A) = \mathbf{0}$.

Bevis ($B \wedge C \in G^{\top}$)

Induksjonssteg: Anta at A er på formen $B \wedge C$, og at $B \wedge C \in G^{\top}$. Vi må vise at $v(B \wedge C) = \mathbf{1}$.

Siden utledningen er maksimal, vet vi at $B \wedge C$ er hovedformel i en $L \wedge$ -slutning på G . Derfor har vi at $B \in G^{\top}$ og $C \in G^{\top}$.

Siden B og C er av enklere struktur enn $B \wedge C$, kan vi bruke induksjonshypotesen på B og C . Vi får at $v(B) = \mathbf{1}$ og $v(C) = \mathbf{1}$. Men da har vi at $v(B \wedge C) = \mathbf{1}$, pr. def. av valuasjoner.

Konstruert valuasjon er motmodell

Påstand

For alle *formler* $A \in G$ har vi at

- $A \in G^{\top}$ impliserer at $v(A) = \mathbf{1}$, og
- $A \in G^{\perp}$ impliserer at $v(A) = \mathbf{0}$.

Bevis ($B \rightarrow C \in G^{\top}$)

Induksjonssteg: Anta at A er på formen $B \rightarrow C$, og at $B \rightarrow C \in G^{\top}$. Vi må vise at $v(B \rightarrow C) = \mathbf{1}$.

Siden utledningen er maksimal, vet vi at $B \rightarrow C$ er hovedformel i en $L \rightarrow$ -slutning på G . Derfor har vi at (1) $B \in G^{\perp}$ eller at (2) $C \in G^{\top}$. Siden B og C er av enklere struktur enn $B \rightarrow C$, kan vi bruke induksjonshypotesen (IH) i begge tilfellene.

I tilfelle (1) har vi ved IH at $v(B) = \mathbf{0}$. I tilfelle (2) har vi ved IH at $v(C) = \mathbf{1}$. Uansett har vi da at $v(B \rightarrow C) = \mathbf{1}$, pr. def. av valuasjoner.

Konstruert valuasjon er motmodell

- De andre tilfellene går tilsvarende: $\neg B \in G^{\top}$, $\neg B \in G^{\perp}$, $B \wedge C \in G^{\perp}$, $B \vee C \in G^{\top}$, $B \vee C \in G^{\perp}$ og $B \rightarrow C \in G^{\perp}$
- Vi har nå vist utsagnslogisk modelleksistens.
- Beviset for førsteordens modelleksistens går tilsvarende, men det er et par ting vi må passe på...

Modelleksistens for førsteordens logikk

- *Grenseutledning:* Objektet vi får når vi gjøre alle mulige ekspansjoner i hver gren er *uendelig* pga. γ -slutningene.
- *Rettferdig strategi:* Vi må sørge for å instansiere γ -formler med alle mulige termer i hver gren.
- *Herbrandmodeller:* Vi konstruerer en Herbrandmodell \mathcal{M} fra en åpen gren G i grenseutledningen.
 - Domenet til modellen er Herbranduniverset til G .
 - Lukkede termer tolkes som seg selv.
 - $\mathcal{M} \models P(t_1, \dots, t_n)$ hvis og bare hvis $P(t_1, \dots, t_n) \in G^{\top}$
- *Modelleksistens:* Induksjonen er lik som i utsagnslogikk for α - og β -formler. I tillegg må vi ta for oss γ - og δ -formler.

Førsteordens sekventkalkyle

- Vi har sett på to sekventkalkyler for førsteordens logikk:
 - Én kalkyle *uten* frie variable som vi kaller for **grunn LK**.
 - Én kalkyle *med* frie variable som vi kaller for **fri-variabel LK**.
- For førsteordens sekventkalkyle introduserte vi to nye regeltyper:
 - γ -regler for analyse av “for alle”-uttrykk; for *alle* elementer ...
 - δ -regler for analyse av “eksisterer”-uttrykk; for *ett* element ...
- Termer tolkes som elementer i domenet, derfor må vi i γ -formler kunne sette vilkårlige termer.
- Tilsvarende må vi i δ -formler sette inn en *termrepresentant* for det ene elementet som skal eksistere.
- Husk at vi *falsifiserer* succedentformler!
 - $\neg\forall x\varphi$ er ekvivalent med $\exists x\neg\varphi$
 - $\neg\exists x\varphi$ er ekvivalent med $\forall x\neg\varphi$

Grunn LK

 γ -reglene i grunn LK:

$$\frac{\Gamma, \forall x\varphi, \varphi[t/x] \vdash \Delta}{\Gamma, \forall x\varphi \vdash \Delta} L\forall \quad \frac{\Gamma \vdash \Delta, \exists x\varphi, \varphi[t/x]}{\Gamma \vdash \Delta, \exists x\varphi} R\exists$$

t er en **lukket** term

 δ -reglene i grunn LK:

$$\frac{\Gamma, \varphi[a/x] \vdash \Delta}{\Gamma, \exists x\varphi \vdash \Delta} L\exists \quad \frac{\Gamma \vdash \Delta, \varphi[a/x]}{\Gamma \vdash \Delta, \forall x\varphi} R\forall$$

a er en parameter som **ikke** forekommer i konklusjonen

Fri-variabel LK

 γ -reglene i fri-variabel LK:

$$\frac{\Gamma, \forall x\varphi, \varphi[u/x] \vdash \Delta}{\Gamma, \forall x\varphi \vdash \Delta} L\forall \quad \frac{\Gamma \vdash \Delta, \exists x\varphi, \varphi[u/x]}{\Gamma \vdash \Delta, \exists x\varphi} R\exists$$

u er en variabel som ikke forekommer fritt i utledningen fra før

 δ -reglene i fri-variabel LK:

$$\frac{\Gamma, \varphi[f(\vec{u})/x] \vdash \Delta}{\Gamma, \exists x\varphi \vdash \Delta} L\exists \quad \frac{\Gamma \vdash \Delta, \varphi[f(\vec{u})/x]}{\Gamma \vdash \Delta, \forall x\varphi} R\forall$$

f er en Skolemfunksjon som ikke forekommer i utledningen fra før
 $\vec{u} = u_1, \dots, u_n$ er de frie variablene i hovedformelen

Fri-variabel LK

Fri-variabel LK-bevis:

Et fri-variabel LK-bevis for en sekvent $\Gamma \vdash \Delta$ er et par $\langle \pi, \sigma \rangle$ slik at

- π er en fri-variabel LK-utledning for $\Gamma \vdash \Delta$
- σ er en *grunn* substitusjon som lukker alle løvsekventene i π

- **Støtten** til en substitusjon σ er mengden av variable x slik at $x\sigma \neq x$.
- En substitusjon σ er **grunn** hvis $x\sigma$ er en grunn term (lukket term) for alle variable x i støtten til σ .

Intuisjonistisk logikk

- Kontradiksjonsprinsippet: $\neg(P \wedge \neg P)$ – en påstand og dens negasjon kan ikke være sanne samtidig
- Loven om det utelukkede tredje: $P \vee \neg P$ – en påstand er enten sann eller usann
- I klassisk logikk holder begge, men i intuisjonistisk logikk holder bare kontradiksjonsprinsippet.
- Sannhet betyr at vi kan verifisere.
- Intuisjonistisk sekvent: $\Gamma \vdash A$ eller $\Gamma \vdash$
- Sekventkalkylen LJ: essensielt LJ begrenset til intuisjonistiske sekventer.
- **Husk:** Alt som er bevisbart i LJ er også bevisbart i LK, men *ikke* omvendt!

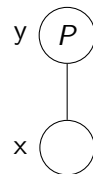
Kripkesemantikk

- En **Kripke-modell** er et trippel (S, \leq, \Vdash') der S er en mengde punkter, og \leq er en partiell ordning på S .
- \Vdash' er en binær *relasjon* fra S til mengden av atomære formler. \Vdash' er **monoton**, dvs. hvis $x \Vdash' P$ og $x \leq y$, så $y \Vdash' P$.
- \Vdash' utvides til \Vdash , som er def. for alle formler:
 - $x \Vdash P$ hvis $x \Vdash' P$ for atomær P
 - $x \Vdash A \wedge B$ hvis $x \Vdash A$ og $x \Vdash B$
 - $x \Vdash A \vee B$ hvis $x \Vdash A$ eller $x \Vdash B$
 - $x \Vdash A \rightarrow B$ hvis vi for enhver y slik at $x \leq y$ har at: hvis $y \Vdash A$, så $y \Vdash B$
 - $x \Vdash \neg A$ hvis for enhver y slik at $x \leq y$: $y \not\Vdash A$
- Et punkt x i en Kripke-modell er en **motmodell** til en sekvent $\Gamma \vdash C$ hvis $x \Vdash \Gamma$ and $x \not\Vdash C$. Hvis det finnes et slikt punkt i modellen sier vi at *Kripke-modellen* er en motmodell til sekventen.
- **Merk:** $x \not\Vdash F$ betyr $\langle x, F \rangle \notin \Vdash$

Eksempel: $P \vee \neg P$

Det å vise at formelen $P \vee \neg P$ ikke er intuisjonistisk gyldig tilsvarer å vise at den intuisjonistiske sekventen $\vdash P \vee \neg P$ ikke er gyldig.

- Kripkemodellen må ha et punkt x slik at $x \not\Vdash P \vee \neg P$.
- Pr. def. av Kripkemodeller må da $x \not\Vdash P$ og $x \not\Vdash \neg P$.
- $x \Vdash \neg P$ hvis for alle y slik at $x \leq y$: $y \not\Vdash P$.
- $x \not\Vdash \neg P$: det finnes et punkt y slik at $x \leq y$ og $y \Vdash P$.

Eksempel: $P \vdash \neg P$ (oppgavesett 5, oppgave 2.1)

- Modellen må ha et punkt x slik at $x \Vdash P$ og $x \not\Vdash \neg P$.
- $x \Vdash \neg P$ hvis for alle y slik at $x \leq y$: $y \not\Vdash P$.
- $x \not\Vdash \neg P$: det finnes et punkt y slik at $x \leq y$ og $y \Vdash P$.
- Men hvorfor ikke velge x ? Husk at $x \leq x$!



Verifikasjon: $x \Vdash P$ og $x \not\Vdash \neg P$

1. $x \Vdash P$ (siden $x \Vdash' P$)
2. 1. og $x \leq x$ medfører at $x \not\Vdash \neg P$ (pr. def. av \Vdash)

Eksempel: $\neg P \vdash P$ (oppgavesett 5, oppgave 2.2)

- Modellen må ha et punkt x slik at $x \Vdash \neg P$ og $x \nVdash P$.
- $x \Vdash \neg P$ hvis for alle y slik at $x \leq y$: $y \nVdash P$.
- Derfor må $x \nVdash P$ og for alle $x \leq y$: $y \nVdash P$.

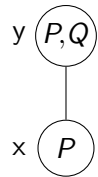


Verifikasjon: $x \Vdash \neg P$ og $x \nVdash P$

1. $x \nVdash P$ (siden $x \nVdash P$)
2. Det finnes ingen punkter y slik at $x < y$.
3. 1. og 2. medfører at $x \Vdash \neg P$ (pr. def. av \Vdash)

Eksempel: $\neg Q \rightarrow \neg P \vdash P \rightarrow Q$ (oppg.sett 5, oppg. 2.3)

- Må ha punkt x slik at $x \Vdash \neg Q \rightarrow \neg P$ og $x \nVdash P \rightarrow Q$
- $x \nVdash P \rightarrow Q$: finnes punkt $y \geq x$ s.a. $y \Vdash P$ og $y \nVdash Q$
- $x \Vdash \neg Q \rightarrow \neg P$: $y \geq x \Rightarrow y \nVdash \neg Q$ eller $y \Vdash \neg P$
- $y \nVdash \neg Q$: finnes $z \geq y$ s.a. $z \Vdash Q$

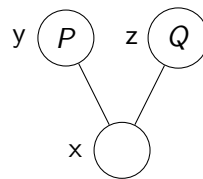


Verifikasjon: $x \Vdash \neg Q \rightarrow \neg P$ og $x \nVdash P \rightarrow Q$

1. $y \Vdash Q$ (siden $y \Vdash Q$)
2. 1. og $y \leq y$ medfører at $y \nVdash \neg Q$ (pr. def. av \Vdash)
3. 1. og $x \leq y$ medfører at $x \nVdash \neg Q$ (pr. def. av \Vdash)
4. 2. og 3. medfører at $x \Vdash \neg Q \rightarrow \neg P$ (pr. def. av \Vdash)
5. $x \Vdash P$ og $x \nVdash Q$ (siden $x \Vdash P$ og $x \nVdash Q$)
6. 5. og $x \leq x$ medfører at $x \nVdash P \rightarrow Q$ (pr. def. av \Vdash)

Eksempel: $\neg(P \wedge Q) \vdash \neg P \vee \neg Q$ (oppg.sett 5, oppg. 2.4)

- Må ha x slik at $x \Vdash \neg(P \wedge Q)$ og $x \nVdash \neg P \vee \neg Q$
- $x \Vdash \neg(P \wedge Q)$: $y \geq x \Rightarrow y \nVdash P \wedge Q$
- $y \nVdash P \wedge Q$: $y \nVdash P$ eller $y \nVdash Q$
- $x \nVdash \neg P \vee \neg Q$: $x \nVdash \neg P$ og $x \nVdash \neg Q$

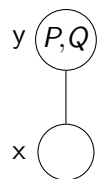


Verifikasjon: $x \Vdash \neg(P \wedge Q)$ og $x \nVdash \neg P \vee \neg Q$

1. $x \nVdash P \wedge Q$, $y \nVdash P \wedge Q$ og $z \nVdash P \wedge Q$ (pr. def. av \Vdash)
2. 1. medfører $x \Vdash \neg(P \wedge Q)$ (pr. def. av \Vdash)
3. $y \Vdash P$ og $x \leq y$ medfører $x \nVdash \neg P$ (pr. def. av \Vdash)
4. $z \Vdash Q$ og $x \leq z$ medfører $x \nVdash \neg Q$ (pr. def. av \Vdash)
5. 3. og 4. medfører at $x \nVdash \neg P \vee \neg Q$ (pr. def. av \Vdash)

Eksempel: $P \rightarrow Q \vdash \neg P \vee Q$ (oppg.sett 5, oppg. 2.5)

- Må ha x slik at $x \Vdash P \rightarrow Q$ og $x \nVdash \neg P \vee Q$
- $x \Vdash P \rightarrow Q$: $y \geq x \Rightarrow y \nVdash P$ eller $y \Vdash Q$
- $x \nVdash \neg P \vee Q$: $x \nVdash \neg P$ og $x \nVdash Q$
- $x \nVdash \neg P$: finnes $z \geq x$ s.a. $z \Vdash P$



Verifikasjon: $x \Vdash P \rightarrow Q$ og $x \nVdash \neg P \vee Q$

1. $x \nVdash P$ og $y \Vdash Q$ (siden $x \nVdash P$ og $y \Vdash Q$)
2. 1. medfører at $x \Vdash P \rightarrow Q$ (pr. def. av \Vdash)
3. $y \Vdash P$ (siden $y \Vdash P$)
4. 3. og $x \leq y$ medfører at $x \nVdash \neg P$ (pr. def. av \Vdash)
5. $x \nVdash Q$ (siden $x \nVdash Q$)
6. 4. og 5. medfører $x \nVdash \neg P \vee Q$ (pr. def. av \Vdash)

Tips og triks

- $x \not\models F$ betyr at $x \models F$ ikke holder!
- Lage Kripkemotmodell:
 - Finn ut hva slags egenskaper Kripkemodellen må ha ved å bruke definisjonen av \models .
 - Kombinér egenskapene til en modell.
 - Verifiser at modellen faktisk falsifiserer sekventen.
- Hvis en sekvent $\Gamma \vdash C$ ikke er bevisbar i LK, så er den heller ikke bevisbar i LJ. (Husk: LJ er en begrenset versjon av LK.)
- Hvis en sekvent $\Gamma \vdash C$ ikke er gyldig i *klassisk* logikk, så:
 - er den heller ikke *intuisjonistisk* gyldig
 - har den en Kripkemotmodell bestående av ett punkt (tilsvarende en falsifiserende valuasjon)

Lykke til på eksamen!

Takk for nå og lykke til på eksamen!

Husk å svare på emneevalueringen!