Innlevering 2 - INF3170/4170 våren 2005
Frist: 1500, 23. mai, 2005

1 Syntaks

Vi skal bruke samme definisjon av førsteordens språk som i læreboken kap. 5.1. Merk at språket brukes til å definerer termer og formler. Begge definisjonene er induktive og definisjonen av formler er bygget på definisjonen av termer.

Når vi viser generelle egenskaper ved formelle objekter som formler og termer, gjør vi det ofte ved induksjon over genereringen av objektene. Skal vi f.eks. vise at alle termer har balanserte paranteser, så viser vi det ved induksjon. I basis-steget ser vi på de enkleste termene: variable og konstanter. Disse har ingen paranteser, og derfor er alle parantesene i dem balanserte. I induksjonssteget tar vi for oss en term $f(t_1, \ldots, t_n)$. Det gjelder nå å finne en måte å gjøre bruk av induksjonshypotesen (IH) på. I dette tilfellet er det svært enkelt, siden termen inneholder $t_1, \ldots, t_n$ som *deltermer*, og vi kan bruke IH på hver av dem separat. IH sier at parantesene i hver term t_i er balanserte. Vi har nå ført argumentet til et punkt der vi gjerne må tenke litt for å kunne konkludere at hele objektet har den ønskede egenskap, men her er dette også svært enkelt, siden vi har lagt til en venstreparentes og en høyreparentes!

Oppgave 1

La $FV(A)$ betegne mengden av frie variable i formelen A. La σ være en substitusjon med endelig støtte D (finite support D, Fitting def. 5.2.6), og anta at $\sigma(x)$ er en grunnterm (dvs. variabelfri term) for alle $x \in D$. Du skal vise at hvis A er en formel, så er $A\sigma$ også en formel og at $FV(A\sigma) = FV(A)\setminus D$ [Husk at hvis B også er en mengde, betegner $B \setminus D$ en mengdedifferans!] Dette kan virke opplagt, men du skal vise at påstanden holder ved å føre et induksjonsbevis for den. Du må da først vise at en tilsvarende egenskap holder for alle termer og så vise at den holder for alle formler! ■

Oppgave 2

Angi det minste språket som følgende 5 uttrykk er formler i. Har alle formlene en naturlig tolkning som sanne utsagn om tall?

A1: $\forall x \forall y\, (Sx \doteq Sy \to x \doteq y)$

A2: $\forall x\, (\neg(x \doteq 0) \to \exists y\, (x \doteq Sy))$

A3: $\forall x\, \neg(0 \doteq Sx)$

A4: $\forall x\, (0 \dotplus x \doteq x)$

A5: $\forall x \forall y\, (x \dotplus Sy \doteq S(x \dotplus y))$

$\blacksquare$

Merk: Vi indikerer at $\dotplus$ og $\doteq$ er symboler i *objektspråket* ved å sette en prikk over symbolene. På den måten kan vi skille dem fra $+$ og $=$, som vi flittig bruker som symboler i *metaspråket*. Vi kunne f.eks. skrevet @ for $\dotplus$ og ? for $\doteq$ i objektspråket, men da hadde den intenderte tolkningen av symbolene og formlene over blitt skjult.

2 Semantikk

Vi angir en modell $\langle D, I \rangle$ (som i Def. 5.3.1. av læreboken) som oppfyller formlene fra forrige oppgave. Denne kalles *standardmodellen*.

- Domenet D er $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$.
- S^I er suksessorfunksjonen, dvs. $S^I : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ gitt av $S^I(n) = n + 1$.
- $\doteq^I$ er identitetsrelasjonen, dvs. $\{(0, 0), (1, 1), (2, 2), \ldots\}$.
- $\dotplus^I$ er addisjonsfunksjonen dvs. $\dotplus^I : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ gitt av $\dotplus^I(m, n) = m + n$.

Oppgave 3

Du skal nå jobbe videre med språket fra oppgave 2 – la oss kalle det $\mathcal{L}$. Hvis vi ønsker å uttrykke mindre-enn-relasjonen i $\mathcal{L}$, kan vi gjøre dette uten å innføre et symbol for det i $\mathcal{L}$. Isteden kan vi bruke symbolene for addisjon og identitet til å kode inn mindre-enn-relasjonen, dvs. at vi kan finne en formel $\Phi(t_1, t_2)$ som er slik at $\Phi(t_1, t_2)$ er sann i standardtolkningen hvis og bare hvis $t_1^I < t_2^I$. Finn et uttrykk for formelen $\Phi(t_1, t_2)$. ■

Bmk: Selv om vi klarer å kode inn mindre-enn, så finnes det er lang rekke naturlige påstander om tall som vi ikke kan uttrykke i dette språket, uansett hvor flinke vi er til å kode. For eksempel kan vi ikke kode inn multiplikasjon.

Oppgave 4

Skriv først ned en formel i språket $\mathcal{L}$ som inneholder minst 3 konnektiver. Formelen skal være sann i standardtolkningen, men den skal ikke være logisk gyldig. Du skal vise at den ikke er logisk gyldig ved å angi en motmodell (dvs. en tolkning som gjør den usann). ■

3 Konsistens

La $\vdash \varphi$ bety at det fins et tablåbevis for φ og $\nvdash \varphi$ at det ikke fins noe tablåbevis for φ. En tablåkalkyle er *konsistent* hvis $\nvdash \bot$. (Husk: En mengde formler er konsistent hvis det ikke finnes noe lukket tablå for den.) En tablåkalkyle er *komplett* hvis den beviser enhver gyldig formel.

Oppgave 5

Vis at $\vdash \bot \to \varphi$ for alle formler φ. ■

Oppgave 6

Vis at en tablåkalkyle er konsistent hvis og bare hvis det fins en formel φ slik at $\nvdash \varphi$. HINT. Du kan fritt bruke *snittregelen*: Hvor som helst i en tablåkonstruksjon kan du foreta en forgrening og introdusere de lukkede formlene ψ og $\neg\psi$. ■

Oppgave 7

Vis at en tablåkalkyle er komplett hvis og bare hvis enhver konsistent mengde er oppfyllbar. ■