Oppgave 5

a)

$$[\![p_0]\!] = F, [\![p_1]\!] = T, [\![p_2]\!] = T$$

b)

$$[\![p_i]\!] = F$$

c)

$$[\![p_i]\!] = F$$

Oppgave 8

$A = \{p_0, p_1, p_2, p_3, p_4, \dots, p_n, \dots\}$ er en konsistent mengde siden

$$[\![p_i]\!] = T$$

er en valuasjon som gjør alle formlene sanne.

Mengden Γ av formler som er sanne under denne valuasjonen er en konsistent mengde som inneholder A.

Anta så at B er en konsistent mengde som inneholder A. Det betyr at det finnes en valuasjon som gjør alle formlene i B sanne. Siden valuasjonen gitt over er den eneste valuasjonen som gjør alle formlene i A sanne, må dette være den samme valuasjonen som gjør formlene i B sanne. Men det betyr at B er inneholdt i Γ, så Γ er den eneste maksimale konsistente mengden som inneholder A.

Oppgave 11

Anta at Γ er konsistent og at vi for enhver formel φ har enten $\varphi \in \Gamma$ eller $\neg\varphi \in \Gamma$.

Ved Lemma 1.5.8 vet vi at Γ er lukket under utledninger ($\Gamma \vdash \varphi \Rightarrow \varphi \in \Gamma$), dermed har vi for enhver formel φ enten $\varphi \in \Gamma$ eller $\neg\varphi \in Gamma$.

Anta (for motsigelse) at det finnes en Γ' slik at $\Gamma' \nvdash \bot$, $\Gamma \subsetneq \Gamma'$.

Siden $\Gamma \subsetneq \Gamma'$ finnes ψ slik at $\psi \notin \Gamma$ og $\psi \in \Gamma'$. Men siden ψ ikke er i Γ må $\neg\psi$ være i Γ og dermed i Γ'. Da har vi $\psi \in \Gamma'$ og $\neg\psi \in \Gamma'$, så Γ er ikke konsistent.

Det betyr at antagelsen vår var feil, så det finnes ingen slik Γ' - dermed er Γ maksimal.