



INF3470 Digital signalbehandling

Repetisjon av komplekse tall og sinuser

Sverre Holm



UNIVERSITETET
I OSLO

Mål

1. Beherske regneoperasjoner med komplekse tall.
2. Beherske regneoperasjoner med trigonometriske funksjoner.
3. Huske og forstå de fleste trigonometriske identiteter.

NB:

- Dette danner grunnlaget for hele kurset,
- Selv om det ikke er "pensum" - så bruk mye tid på øvelser!
- Det forventes at dere kan dette fra tidligere kurs.

Komplekse tall: Grunnleggende

- $z=a+jb$ med koeffisienter a,b
 - $a = \text{Re}\{z\}$ er realdelen til z
 - $b = \text{Im}\{z\}$ er imaginærerdelen til z
 - $j = \sqrt{-1}$, ($j^2 = -1$): den imaginære enheten
- i eller j
 - Opprinnelig var i for imaginær: matematikk
 - I elektrofag er i strøm, derfor brukes heller j

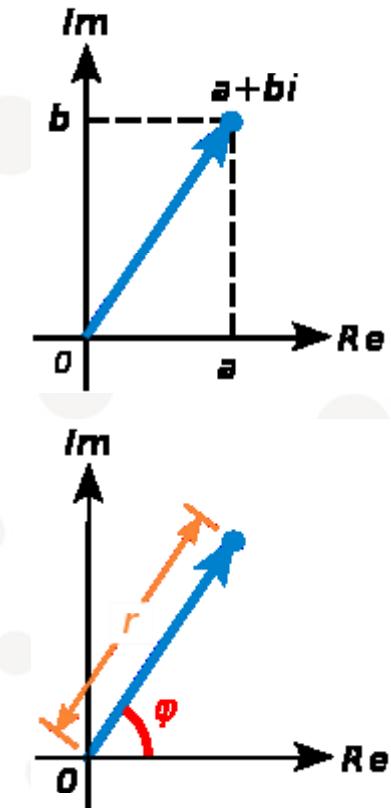
Komplekse tall: Sum og produkt

Regning følger vanlig aritmetikk – husk $j^2 = -1$

- Gitt $z_1 = a_1 + jb_1$, $z_2 = a_2 + jb_2$
- Sum: $z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + j(b_1 + b_2)$
- Produkt: $z_1 z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + j(a_1 b_2 + a_2 b_1)$

Komplekse tall: Visualisering og koordinatsystemer

- Reelle tall: et punkt på en tall-linje
- Komplekse tall: et punkt i planet.
 - Caspar Wessel 1799
- Regneoperasjoner kan da tolkes som vektor-operasjoner.
- To mulige koordinatsystemer i planet:
 - kartesiske koordinater
 - polar-koordinater



19. august 2014

Wikipedia

5

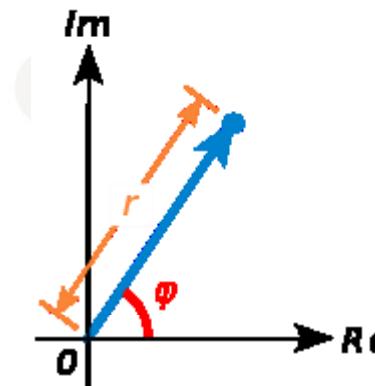
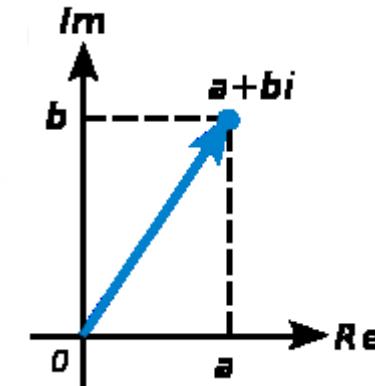


UNIVERSITETET
I OSLO



Komplekse tall på polar form

- $z = r e^{j\phi}$
- Tallverdi, magnitude:
 $r = (a^2 + b^2)^{1/2} = |z|$
- Fase:
 $\phi = \tan^{-1}(b/a) = \text{ang}\{z\}$
- Gir enkel multiplikasjon:
 - $z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 e^{j(\phi_1 + \phi_2)}$

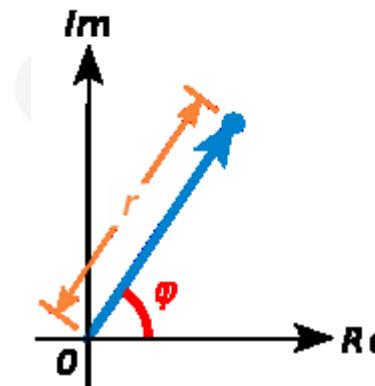
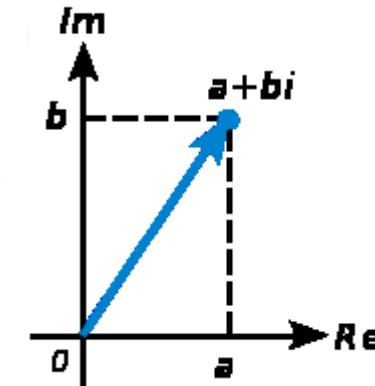


Fra Wikipedia

Komplekse tall på kartesisk form

- $z = a + jb$
- Realdel:
 $a = r \cos(\phi) = \text{Re}\{z\}$
- Imaginærdel:
 $b = r \sin(\phi) = \text{Im}\{z\}$

- Gir enkel addisjon
 - $z_1 + z_2 = a_1 + a_2 + j(b_1 + b_2)$



Fra Wikipedia

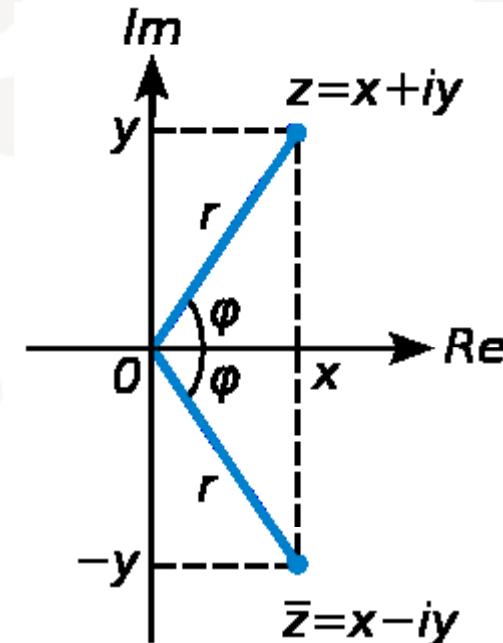
Komplekse tall: komplekskonjugering

Kartesisk form:

$$z^* = (x + jy)^* = x - jy$$

Polar form:

$$z^* = (r e^{j\phi})^* = r e^{-j\phi}$$



Fra Wikipedia

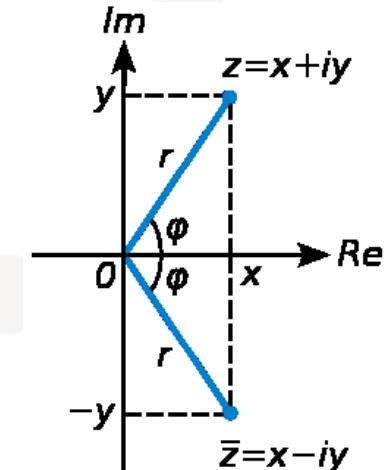
Komplekse tall: komplekskonjugering

Multiplikasjon med komplekskonjugert,
(kvadrert norm):

$$zz^* = (a + jb)(a - jb) = a^2 + b^2 = |z|^2$$

Addisjon med komplekskonjugert:

$$z + z^* = (a + jb) + (a - jb) = 2a = 2\operatorname{Re}\{z\}$$



Subtraksjon med komplekskonjugert:

$$z - z^* = (a + jb) - (a - jb) = 2jb = 2j \operatorname{Im}\{z\}$$

Komplekse tall og trigonometri

Eulers identiteter for sinus og cosinus:

- $(e^{j\phi} + e^{-j\phi})/2 = \cos\phi$ addisjon av k. konj.
- $(e^{j\phi} - e^{-j\phi})/2j = \sin\phi$ subtraksjon av k. konj

Generell (tidsavhengig) cosinus-funksjon:

- $A\cos(2\pi ft + \phi) = (A/2) (e^{j2\pi ft} e^{j\phi} + e^{-j2\pi ft} e^{-j\phi})$
- En cosinus med frekvens f og fase ϕ kan tolkes som summen av to komplekse eksponentialsler.

Komplekse tall og trigonometri

- $\cos^2\phi + \sin^2\phi = ?$
- $[(e^{j\phi} + e^{-j\phi})/2]^2 + [(e^{j\phi} - e^{-j\phi})/2j]^2 =$
 $(\frac{1}{4})[e^{j2\phi} + 2 + e^{-j2\phi}] - (\frac{1}{4})[e^{j2\phi} - 2 + e^{-j2\phi}] = 1$
- Meget viktig resultat som er veldig lett å utlede med komplekse eksponensialer, ikke så lett uten.
- Tilsvarende lett å finne $\cos(2\phi)$, $\sin(2\phi)$, $\cos(\phi/2)$ osv

Komplekse tall og trigonometri

Eksempel 1: Modulasjon

- $\cos(\phi_1)\cos(\phi_2) = (1/2)(\cos(\phi_1 + \phi_2) + \cos(\phi_1 - \phi_2))$
 - Hvis $\phi_1 = \omega_1 t$ og $\phi_2 = \omega_2 t$ dannes det nye frekvenser

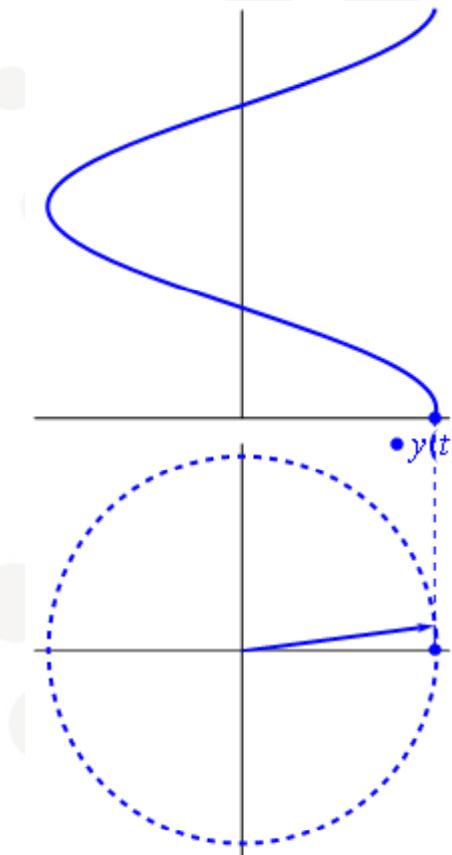
Eksempel 2: Sum av sinuser med samme frekvens

- $\sum_k A_k \cos(2\pi ft + \phi_k) = A \cos(2\pi ft + \phi)$
der $A e^{j\phi} = \sum_k \{A_k e^{j\phi_k}\}$

Eksponensialform er mye enklere å bruke for regning i disse eksemplene.

Kompleks amplitude (fasor)

$$\begin{aligned} A \cdot \cos(\omega t + \theta) &= \operatorname{Re} \{A \cdot e^{i(\omega t + \theta)}\} \\ &= \operatorname{Re} \{Ae^{i\theta} \cdot e^{i\omega t}\}. \end{aligned}$$



- <http://en.wikipedia.org/wiki/Phasor>

19. august 2014

13

Kompleks amplitude (fasor)-addisjon

$$\begin{aligned} A_1 \cos(\omega t + \theta_1) + A_2 \cos(\omega t + \theta_2) &= \operatorname{Re}\{A_1 e^{i\theta_1} e^{i\omega t}\} + \operatorname{Re}\{A_2 e^{i\theta_2} e^{i\omega t}\} \\ &= \operatorname{Re}\{A_1 e^{i\theta_1} e^{i\omega t} + A_2 e^{i\theta_2} e^{i\omega t}\} \\ &= \operatorname{Re}\{(A_1 e^{i\theta_1} + A_2 e^{i\theta_2}) e^{i\omega t}\} \\ &= \operatorname{Re}\{(A_3 e^{i\theta_3}) e^{i\omega t}\} \\ &= A_3 \cos(\omega t + \theta_3), \end{aligned}$$

- Finn real- og imaginær-deler (linje 3) og dermed:

$$A_3^2 = (A_1 \cos \theta_1 + A_2 \cos \theta_2)^2 + (A_1 \sin \theta_1 + A_2 \sin \theta_2)^2,$$

$$\theta_3 = \arctan \left(\frac{A_1 \sin \theta_1 + A_2 \sin \theta_2}{A_1 \cos \theta_1 + A_2 \cos \theta_2} \right)$$



Potensfunksjoner

- Potens a^b ; grunntall a, eksponent b
- $a^{b+c} = a^b \cdot a^c$
- $1/z^n = z^{-n}$
- Hva er $(2+j)^{-2}$
 - I slike oppgaver skal svaret alltid på form $a+jb$

Geometriske rekker

- Viktige formler for sum av konvergent geometrisk rekke, brukes mye:

$$\sum_{m=0}^{M-1} \alpha^m = \begin{cases} \frac{1-\alpha^M}{1-\alpha} & \alpha \neq 1 \\ M & \alpha = 1 \end{cases} \quad \sum_{m=0}^{\infty} \alpha^m = \frac{1}{1-\alpha}, |\alpha| < 1$$

- Formel for endelig rekke er utledet i fasit til oppgavesett 1
- La $M \Rightarrow \infty$ for å få formel for uendelig rekke

Tidsdiskret sinus – periodisk i tid?

- Tidsdiskret sinus $x[n]=\cos(2\pi n F_0)$:
 - $\cos(2\pi n F_0) = \cos(2\pi(n+N)F_0) = \cos(2\pi n F_0 + 2\pi N F_0)$
 - Bare periodisk i tid for $N F_0$ =heltall: $F_0=k/N$, $\Omega_0=2\pi k/N$!

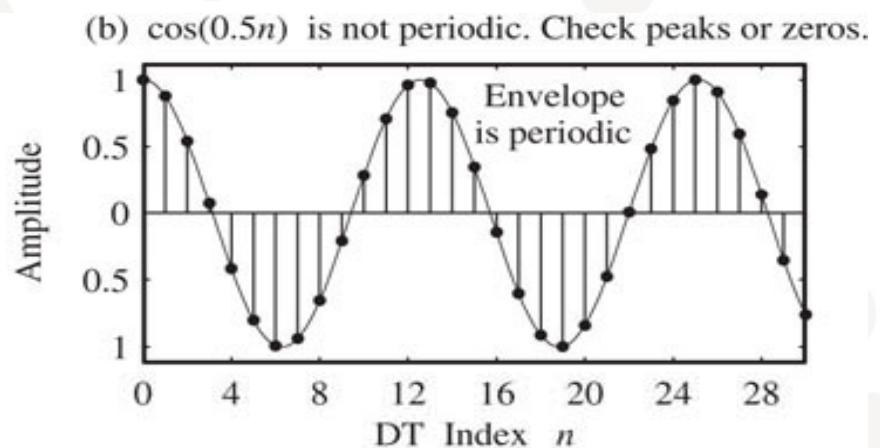
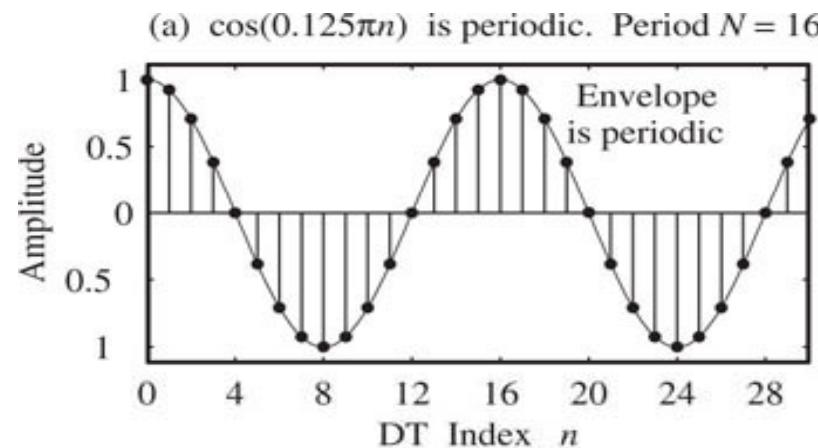


FIGURE 2.6 Discrete-time sinusoids are not always periodic. The first panel shows the signal $\cos(0.125n\pi)$ (whose period is $N = 16$) and its envelope. The second panel shows the signal $\cos(0.5n)$ and its envelope. Even though their envelopes are periodic, look carefully at the peaks and troughs and confirm that the first signal is periodic while the second signal is not periodic

17