UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Prøveeksamen i	INF3440/4440 — Signalbehandling
Eksamensdag:	24. desember 2006
Tid for eksamen:	09.00 – 12.00
Oppgavesettet er på 4 sider.	
Vedlegg:	Ingen
Tillatte hjelpemidler:	Ingen

Kontroller at oppgavesettet er komplett før
du begynner å besvare spørsmålene.

Oppgave 1

Et lineært tidsinvariant filter er beskrevet av differanselikningen

$$y[n] = -0.8y[n-1] + 0.8x[n] + x[n-1].$$

a) Bestem systemfunksjonen, $H(z)$, for dette systemet og lag et pol-nullpunkts plott. 1 p.

b) Finn systemets frekvensrespons, $H(w)$, og vis at for dette systemet er $|H(w)|^2 = 1$ for alle valg av w. 1 p.

Oppgave 2

Anta at et diskret-tid signal $x[n]$ er en sum av komplekse eksponensial signaler

$$x[n] = 3 + 2e^{\jmath 0.2\pi n} + 2e^{-\jmath 0.2\pi n} - 7\jmath e^{\jmath 0.7\pi n} + 7\jmath e^{-\jmath 0.7\pi n}.$$

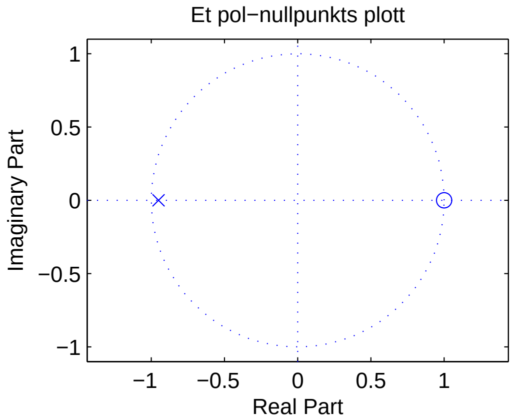
a) Lag et plott av DTFT'en til $x[n]$ for positive frekvenser, dvs. $0 \leq w < 2\pi$. 1 p.

b) Anta så at $x_1[n] = (-1)^n x[n]$. Lag et plot av DTFT'en til $x_1[n]$ for positive frekvenser, dvs. $0 \leq w < 2\pi$. 1 p.

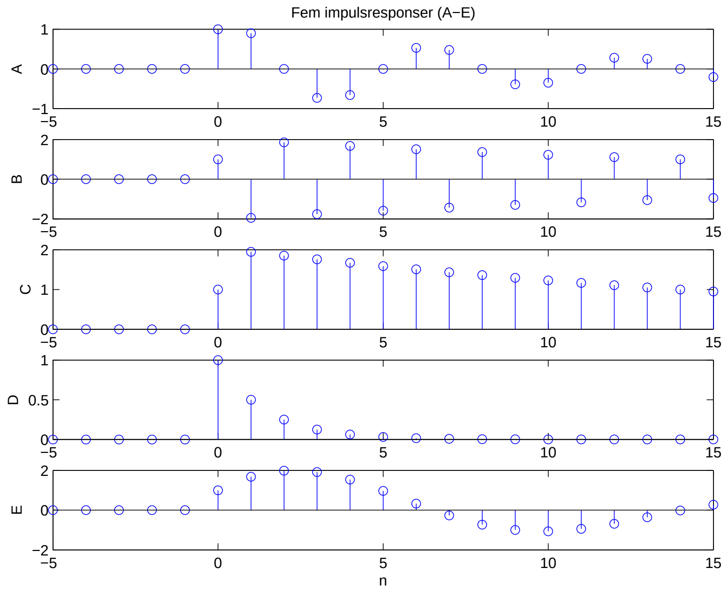
(Fortsettes på side 2.)

Oppgave 3

Et filter har et pol-nullpunkts plott som vist under.



Hvilken av de fem impulsresponser (A-E) i figuren under er filterets impulsrespons. Begrunn ditt svar! 1 p.



Oppgave 4

a) Forklar kort hva som menes med henholdsvis parametrisk og ikke-parametrisk spektralestimering. 1 p.

b) Diskuter kort egenskapene til følgende spektralestimatorer: 2 p.

- Periodogram
- Bartletts metode (midlet periodogram)
- AR(N) modell

(Fortsettes på side 3.)

Oppgave 5

Et *optimalt FIR-filter* $h_{opt}[n]$ blir brukt til å produserer et optimalt estimat $\hat{d}[n]$ på et signal $d[n]$. Dette gjøres ved å filtrere et signal $x[n]$:

$$\hat{d}[n] = x[n] * h_{opt}[n]$$

a) Gitt at optimalitetskriteriet er minimum mean square error, sett opp og forklar optimeringsproblemet. Skisser systemdiagrammet. 1 p.

b) Et eksempel på et optimalt filter er Wiener-filteret. Dette filteret er optimalt mhp. MMSE-kriteriet, og er gitt på matriseform som 1 p.

$$\vec{h}_{opt} = \Gamma^{-1}\vec{\gamma}_d$$

Forklar hva matrisene og vektorene i dette uttrykket representerer, og hvordan de forholder seg til de aktuelle signalene i problemstillingen. Beskriv hvordan optimalitetskriteriet fra oppgave **a)** leder til dette uttrykket.

c) Hvilke krav må være oppfylt for at denne løsningen skal være gyldig og mulig å finne? Disse kravene er ikke alltid realistiske. Begrunn hvorfor, og forklar hvordan man vil kompensere for dette når man implementerer et optimalt filter i praksis. 1 p.

Formelsamling

Grunnleggende sammenhenger:

$$
\begin{aligned}
\sin(\alpha \pm \beta) &= \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta \\
\cos(\alpha \pm \beta) &= \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta \\
\sin 2\alpha &= 2\sin\alpha\cos\alpha \\
\cos 2\alpha &= 2\cos^2\alpha - \sin^2\alpha \\
\sin\alpha + \sin\beta &= 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \\
\sin\alpha - \sin\beta &= 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2} \\
\cos\alpha + \cos\beta &= 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \\
\cos\alpha - \cos\beta &= -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2} \\
\cos^2\alpha + \sin^2\alpha &= 1 \\
\cos\alpha &= \frac{1}{2}(e^{j\alpha} + e^{-j\alpha}) \\
\sin\alpha &= \frac{1}{2j}(e^{j\alpha} - e^{-j\alpha}) \\
\sum_{n=0}^{N-1} a^n &= \begin{cases} N & \text{for } a = 1 \\ \frac{1-a^N}{1-a} & \text{for } a \neq 1 \end{cases} \\
ax^2 + bx + c = 0 &\Leftrightarrow x_\pm = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}
\end{aligned}
$$

(Fortsettes på side 4.)

Konvolusjon:

$$y(n) = x(n) * h(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(n-k)h(k) = h(n) * x(n)$$

Diskret tids Fourier transform (DTFT):

$$\begin{aligned} \text{Analyse:} \qquad X(w) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-jwn} \\ \text{Syntese:} \qquad x(n) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(w)e^{jwn}dw \end{aligned}$$

Diskret Fourier transform (DFT):

$$\begin{aligned} \text{Analyse:} \qquad X(k) &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j2\pi kn/N}, \quad 0 \le k \le N-1 \\ \text{Syntese:} \qquad x(n) &= \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(k)e^{j2\pi kn/N}, \quad 0 \le k \le N-1 \end{aligned}$$

z-transform:

$$\text{Analyse:} \qquad X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n}$$

Noen vanlige z-transform par:

Signal, $x[n]$	z-transform, $X(z)$	*ROC*
$\delta[n]$	1	Alle z
$u[n]$	$\frac{1}{1-z^{-1}}$	$\|z\| > 1$
$a^n u[n]$	$\frac{1}{1-az^{-1}}$	$\|z\| > \|a\|$
$na^n u[n]$	$\frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$	$\|z\| > \|a\|$
$-a^n u[-n-1]$	$\frac{1}{1-az^{-1}}$	$\|z\| < \|a\|$
$-na^n u[-n-1]$	$\frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$	$\|z\| < \|a\|$

Forventning og varians

$$\begin{aligned} \text{Forventning:} \qquad E\{x(\zeta)\} &\equiv \mu_x = \begin{cases} \sum_k x_k p_k & x(\zeta) \text{ diskret} \\ \int_{-\infty}^{\infty} x f_x(x)dx & x(\zeta) \text{ kontinuerling} \end{cases} \\ \text{Varians:} \qquad \text{var}[x(\zeta)] &= \sigma_x^2 = \gamma_x^{(2)} = E\{[x(\zeta) - \mu_x]^2\} \end{aligned}$$

Lykke til!!!