UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i	INF3440/4440 — Signalbehandling
Eksamensdag:	xx. desember 2007
Tid for eksamen:	xx.yy – qq.zz

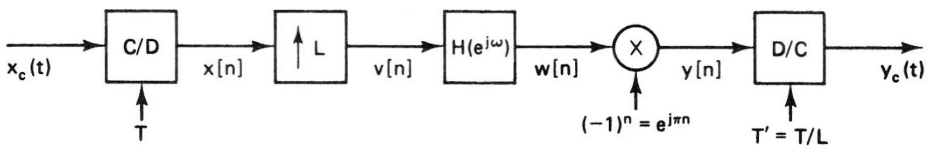
Oppgavesettet er på 6 sider.

Vedlegg:	Ingen
Tillatte hjelpemidler:	Ingen

Kontroller at oppgavesettet er komplett før
du begynner å besvare spørsmålene.

Oppgave 1 Ymse

Et analogt signal $x_c(t)$ konverteres til et digitalt signal, oppsamples og filtreres før det multipliseres med signalet $e^{j\pi n}$. Deretter utføres en kombinert nedsampling og konvertering tilbake til et analogt signal. Systemet er vist skjematisk i figuren under.

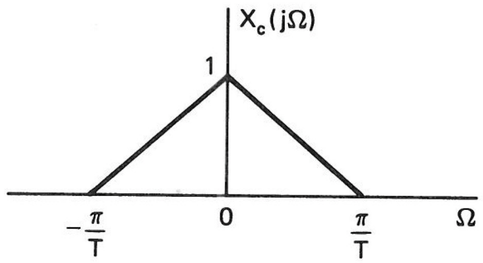


Skjematisk skisse av system.

Filteres som benyttes i systemet er spesifisert som følger:

$$H(\omega) = H(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & |\omega| < \pi/L, \\ 0, & \pi/L < |\omega| \le \pi. \end{cases}$$

Inngangsignalet $x_c(t)$ har amplitudespekter, $X_c(j\Omega)$, som følger:



Amplitudespekter til inngangsignal $x_c(t)$.

(Fortsettes på side 2.)

a) Skisser spektrene til $x[n]$, $v[n]$, $w[n]$, $y[n]$ og $y_c(t)$ hvor dette er signalene som vist i skissen av systemet over. Bruk frekvensområdet området $[-2\pi, 2\pi]$ for de digitale signalene. 2 p.

b) Definer periodogram spektral-estimatoren og forklar kort fordeler og ulemper ved denne estimatoren (maks 5 setninger). 1 p.

d) Forklar kort fellesprinsippet bak ulike forbedringer av periodogrammet (maks 5 setninger). 1 p.

Oppgave 2 Sampling og rekonstruksjon

a) Formuler Shannons samplingsteorem. (Husk å spesifisere *hvorfor* det er vanlig å gå ut fra at Shannons samplingsteorem må oppfylles i et fornuftig system for digital signalbehandling.) .5 p.

b) Bruk Shannons samplingsteorem for å finne alle samplingsfrekvenser som ikke gir aliasing for følgende signaler: 1 p.

1. $x(t) = \cos(600\pi t + \pi/2)$
2. $x(t) = \cos(2\pi 300t - \pi/4)$
3. $x(t) = \cos(150\pi t) + \sin(151\pi t)$
4. $x(t) = \begin{cases} 1 & \text{for} \quad |t| \le T \\ 0 & \text{for} \quad |t| > T \end{cases}$

c) Gitt et signal i kontinuerlig tid

$$x(t) = \cos(300\pi t + \pi/2) + \cos(600\pi t + \pi/3)$$

Dette signalet skal samples med 400 sampler i sekundet for å danne diskret-tid-signalet $x[n] = x(nT_s)$, der T_s er tiden mellom to sampler. Beregn $x[n]$ og plott amplitudespekteret til $x[n]$. 1 p.

Oppgave 3 LTI-systemer

a) Et normalt krav til et LTI-system er at det er stabilt. Formuler et krav for et system med impulsrespons , $h[n] = T\{\delta[n]\}$, som sikrer at systemet er stabilt. .5 p.

c) Et realiserbart system må både være stabilt og kausalt. Gitt et LTI-system med impulsresponse $h[n] = T\{\delta[n]\}$, formuler et krav som sikrer at systemet er kausalt .5 p.

c) Formuler kravene for *lineæritet* og *tids-invarians* mht. et system $y[n] = T\{x[n]\}$. 1 p.

(Fortsettes på side 3.)

d) Vis ved regning om følgende systemer er lineære og tids-invariante eller ikke: 1 p.

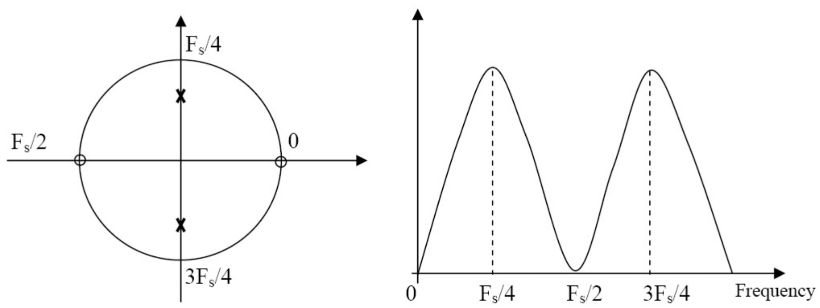
1. $y[n] = x[n] - 3x[n-1] + x[n-2]$
2. $y[n] = x[n+1] - x[n] + x[n-1] + 5x[2]$

Oppgave 4 Design of IIR filters

Et digitalt båndpass filter er spesifisert som følger;

1. fullstendig undertykkelse av signaler ved dc og ved 500 Hz;
2. Et smalbåndet passbånd sentrert ved 250 Hz;
3. en 3 dB båndbredde på 20 Hz.

Samplingsfrekvensen benyttet er 1000 Hz. Filteret er realisert som et andre-ordens IIR filter, og en skisse av pol-nullpunktsdiagremmet og magnituderponsen er gitt i figuren som følger



Skisse av pol-nullpunktsplott og magnitude respons.

Radius r til polene er bestemt fra ønsket båndbredde. En aproksimativ sammenheng mellom r, for $rz0.9$, og båndbredden, bwb er gitt ved

$$r \approx 1 - (\text{bw}/F_s)\pi,$$

hvor F_s er samplingsfrekvensen.

a) Finn overføringsfunksjonen, $H(z)$ til filteret. Bruk $\pi = 3.14$ i dine beregninger. 1 p.

b) Finn differanse ikningen til filteret 1 p.

c) Tegn et blokkdiagram representasjon av filteret. 1 p.

(Fortsettes på side 4.)

Oppgave 5 Design av FIR-filtre

Du har fått i oppgave å lage et FIR-filter med impulsresponse $h[n]$ som gjør følgende:

$$T\{\cos(0.5\pi n + \phi)\} = 0, \phi \in [0..2\pi]$$

$$T\{\cos(0.75\pi n + \phi)\} = 0, \phi \in [0..2\pi]$$

I tillegg stilles følgende krav:

1. Filteret skal være kausalt.
2. Filteret skal ha reelle koeffisienter.

Hvordan filteret skal oppføre seg mht. alle andre signaler er ikke angitt, og dette kan vi dermed se bort fra.

a) Hva er det minste antall koeffisienter du trenger for å lage et filter som oppfyller kravene? Begrunn svaret ditt. 1 p.

b) Finn nullpunktene og polene til systemet, og tegn pol-nullpunktsplottet. 1 p.

c) Finn systemfunksjonen, $H(z)$, og impulsresponsen, $h[n]$, til systemet. 1 p.

d) Du får oppgitt følgende tilleggskrav; DC-signaler (konstante signaler) skal passere uforandret:

$$T\{\alpha\} = \alpha, \alpha \in \mathbf{R}$$

Finn den nye impulsresponsen som tilfredsstiller dette kravet. .5 p.
(**Hint:** Tilleggskravet betyr at $H(e^0) = 1$).

Oppgave 6 Filtre og konvolusjon

Et LTI-system med impulsrespons $h[n]$ og inngangssignal $x[n]$ har utgangssignal $y[n]$ gitt ved:

$$y[n] = h[n] * x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k]$$

der $*$ er konvolusjonsoperatoren som er definert i likningen over.

a) Hva blir utgangen $y[n]$ uttrykt ved inngangen $x[n]$ når impulsresponsen er: .5 p.

$$h[n] = \delta[n] - 2\delta[n-1] + \delta[n-2]$$

(Fortsettes på side 5.)

b) Beregn utgangen $y[n]$ når inngangen er: 1 p.

$$x[n] = \delta[n] + 2\delta[n-1] + 3\delta[n-2] + 2\delta[n-4] + \delta[n-5]$$

c) Vis generelt at konvolusjon i tidsdomenet er lik multiplikasjon i frekvensdomenet, dvs. vis at: 1 p.

$$Y(e^{j\hat{\omega}}) = H(e^{j\hat{\omega}})X(e^{j\hat{\omega}})$$

Et kausalt glidende-middel-filter (GM-filter) av lengde M er gitt ved impulsresponsen og systemfunksjon som følger:

$$h[n] = \frac{1}{M}\sum_{k=0}^{M-1}\delta[n-k], \quad \text{og } H(z) = \frac{1}{M}\frac{z^M - 1}{z^{M-1}(z-1)}.$$

d) Beregn frekvensresponsen $H(e^{j\hat{\omega}})$ til filteret og forklar hvilken effekt GM-filteret har på inngangssignalet. 1 p.

e) Vi kan lage et nytt filter ved å sette K glidende-middel-filtre i serie, dvs. .5 p.

$$h_K[n] = h[n] * h[n] * \cdots * h[n]$$

Hva er spekteret $H_K(e^{j\hat{\omega}})$ til $h_K[n]$?

f) Hva er lengden til $h_K[n]$ uttrykt ved lengden til $h[n]$? .5 p.

Formelsamling

Grunnleggende sammenhenger:

$$\begin{aligned}
\sin(\alpha \pm \beta) &= \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta \\
\cos(\alpha \pm \beta) &= \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta \\
\sin 2\alpha &= 2\sin\alpha\cos\alpha \\
\cos 2\alpha &= 2\cos^2\alpha - \sin^2\alpha \\
\sin\alpha + \sin\beta &= 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \\
\sin\alpha - \sin\beta &= 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2} \\
\cos\alpha + \cos\beta &= 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \\
\cos\alpha - \cos\beta &= -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2} \\
\cos^2\alpha + \sin^2\alpha &= 1 \\
\cos\alpha &= \frac{1}{2}(e^{j\alpha} + e^{-j\alpha}) \\
\sin\alpha &= \frac{1}{2j}(e^{j\alpha} - e^{-j\alpha}) \\
\sum_{n=0}^{N-1} a^n &= \begin{cases} N & \text{for } a = 1 \\ \frac{1-a^N}{1-a} & \text{for } a \neq 1 \end{cases} \\
ax^2 + bx + c = 0 &\Leftrightarrow x_{\pm} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}
\end{aligned}$$

(Fortsettes på side 6.)

Konvolusjon:

$$y(n) = x(n) * h(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(n-k)h(k) = h(n) * x(n)$$

Diskret tids Fourier transform (DTFT):

$$\begin{aligned} \text{Analyse:} \quad X(w) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-jwn} \\ \text{Syntese:} \quad x(n) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(w)e^{jwn}dw \end{aligned}$$

Diskret Fourier transform (DFT):

$$\begin{aligned} \text{Analyse:} \quad X(k) &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j2\pi kn/N}, \quad 0 \le k \le N-1 \\ \text{Syntese:} \quad x(n) &= \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(k)e^{j2\pi kn/N}, \quad 0 \le k \le N-1 \end{aligned}$$

z-transform:

$$\text{Analyse:} \quad X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n}$$

Forventning og varians

$$\begin{aligned} \text{Forventning:} \quad E\{x(\zeta)\} &\equiv \mu_x = \begin{cases} \sum_k x_k p_k & x(\zeta) \text{ diskret} \\ \int_{-\infty}^{\infty} x f_x(x)dx & x(\zeta) \text{ kontinuerling} \end{cases} \\ \text{Varians:} \quad \mathrm{var}[x(\zeta)] &= \sigma_x^2 = \gamma_x^{(2)} = E\{[x(\zeta) - \mu_x]^2\} \end{aligned}$$

Lykke til!!!