UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i	INF 3470 / INF 4470 — Digital Signalbehandling
Eksamensdag:	29. mars 2007
Tid for eksamen:	09.00 – 12.00
Oppgavesettet er på 5 sider.	
Vedlegg:	Ingen
Tillatte hjelpemidler:	Ingen

Kontroller at oppgavesettet er komplett før
du begynner å besvare spørsmålene.

Dette oppgavesettet består av 4 oppgaver som kan løses uavhengig av hverandre. Skulle noe være uklart i en oppgave, så skriv klart hvilke forutsetninger du gjør for å løse oppgaven, og gå videre!

Skriv klart og tydelig! Pass på å begrunne / underbygge svarene med relevant teori. På alle skisser / plott skal tilhørende verdier på aksene komme tydelig frem.

Oppgave 1 Sampling

1a

Hva sier Shannons samplingsteorem? Forklar med maksimalt 30 ord.

1b

Vi har gitt et signal

$$x(t) = 10 + 4\cos(500\pi t + \pi/4).$$

Tegn spekteret til det samplede signalet $x[n] = x(nT_s)$ dersom samplingsfrekvensen er:

1. $f_s = 400\,\text{Hz}$
2. $f_s = 600\,\text{Hz}$.

Merk: Her skal dere kun tegne spekteret. Eventuelle mellomregninger behøver ikke tas med i besvarelsen.

(Fortsettes på side 2.)

1c

Hva blir det rekonstruerte signalet fra forrige deloppgave dersom vi bruker en ideell D-C omformer hvor samplingsfrekvensen er $f_s = 500\,\text{Hz}$?

Oppgave 2 Frekvensrespons

Et lineært tids-invariant filter med impulsrespons $h[n]$ er gitt ved differensligningen

$$y[n] = x[n] + 2x[n-1] + x[n-2].$$

2a

Hva er frekvensresponsen $H(e^{j\hat{\omega}})$ til dette filteret?

Lag et plott av magnituden og fasen til $H(e^{j\hat{\omega}})$.

2b

Hva blir utgangssignalet dersom inngangssignalet

$$x[n] = 10 + 4\cos(0.5\pi n + \pi/4)$$

filtreres gjennom dette filteret?

2c

Vi multipliserer $x[n]$ med $\cos(\hat{\omega}_0 n)$. Vi får da det nye signalet

$$x_0[n] = \cos(\hat{\omega}_0 n) \cdot x[n].$$

Dette kalles å modulere signalet $x[n]$. Hvilke frekvenskomponenter finner vi i det modulerte signalet $x_0[n]$?

Oppgave 3 FIR-filtre

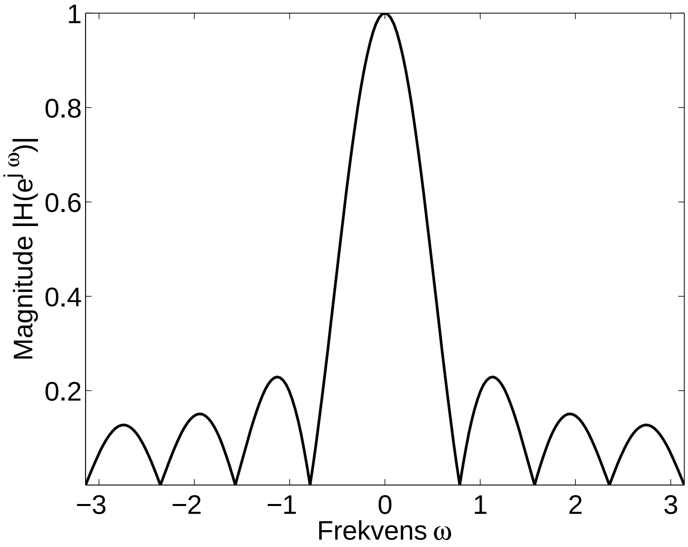
Vi har gitt det glidende middelverdifilteret

$$y[n] = \frac{1}{M_1 + M_2 + 1} \sum_{k=-M_1}^{M_2} x[n-k], \tag{1}$$

hvor både M_1 og M_2 er ikke-negative.

Figur 1 viser frekvensresponsen til et glidende middelverdifilteret hvor $M_1 = 0$ og $M_2 = 7$.

(Fortsettes på side 3.)



Figur 1: Frekvensresponsen til et glidende middelverdifilter av lengde åtte.

3a

Finn det analytiske uttrykket for z-transformen $H(z)$ til systemet gitt ved ligning 1, og tegn pol-nullpunkts-diagram. Mellomregninger som fører frem til det analytiske uttrykket for $H(z)$ skal tas med.

Hint: Bruk summeformelen for en geometrisk rekke:

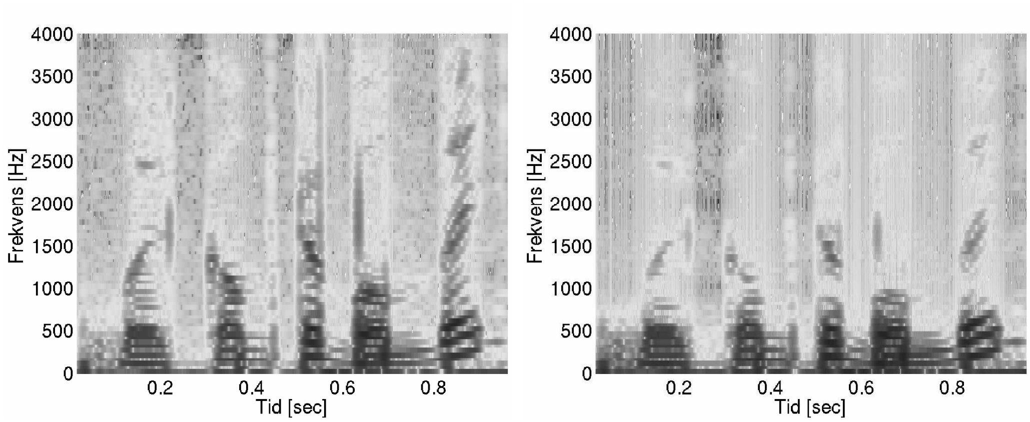
$$\sum_{k=0}^{L-1} \alpha^k = \frac{1-\alpha^L}{1-\alpha}, \quad \alpha \neq 1.$$

3b

Tenk deg at vi filtrerer et lydsignal gjennom et glidende middelverdifilter hvor $M_1 = 0$ og $M_2 = 7$. I Figur 2 er det vist spekteret (frekvensintensiteten) til et lydsignal samplet med samplingsfrekvens $f_s = 8000\,\text{Hz}$ som en funksjon av tid og frekvens, før og etter filtrering med det glidende middelverdifilteret.

I spekteret til det filtrerte signalet er det noen horisontale bånd. Hvor mange bånd er det, og hva skyldes de? Alle båndene er ikke nødvendigvis synlige i spekteret til det filtrerte lydsignalet. Forklaringen skal maksimalt inneholde 30 ord.

(Fortsettes på side 4.)



Figur 2: Spekteret (frekvensintensiteten) til et lydsignal som en funksjon av tid og frekvens. Det ufiltrerte lydsignalet er i plottet til venstre, mens lydsignalet filtrert med et glidende middelverdifilter er i plottet til høyre.

3c

Vi multipliserer annenhver av koeffisientene i det glidende middelverdifilteret $h[n]$ med -1, slik at det nye filteret $h_0[n]$ får koeffisientene

$$\begin{array}{lcl} & \vdots & \\ h_0[-1] & = & -1/(M_1+M_2+1) \\ h_0[0] & = & 1/(M_1+M_2+1) \\ h_0[1] & = & -1/(M_1+M_2+1) \\ & \vdots & \end{array}$$

Uttrykk frekvensresponsen $H_0(e^{j\hat{\omega}})$ til $h_0[n]$ ved frekvensresponsen $H(e^{j\hat{\omega}})$ til $h[n]$.

Hint: $-1 = e^{j\pi}$.

Hva slags filter er $h[n]$, og hva slags filter er $h_0[n]$ (dvs. lavpass, båndpass, høypass)? Forklar ut fra skisser av magnituden til $H(e^{j\hat{\omega}})$ og $H_0(e^{j\hat{\omega}})$.

Oppgave 4 Filtre

4a

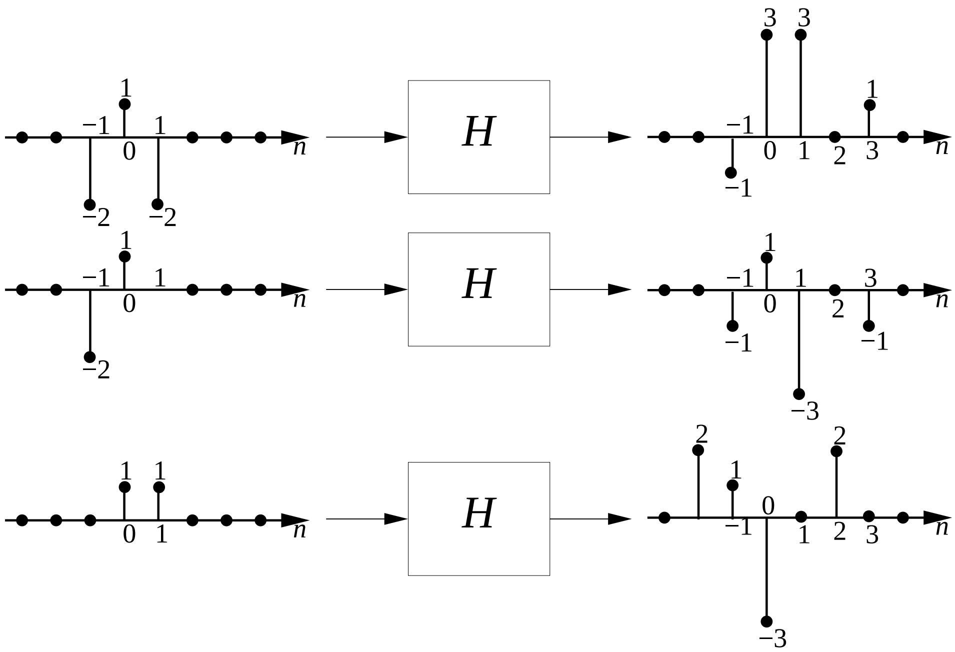
Forklar hva det vil si at et filter er lineært.

Forklar hva det vil si at et filter er tidsinvariant.

Bruk maksimalt 30 ord på hver av forklaringene.

(Fortsettes på side 5.)

Vi skal nå se på et system som vi vet er *lineært*. I Figur 3 er det vist tre inngangssignaler $x_1[n]$, $x_2[n]$ og $x_3[n]$ og korresponderende utgangssignaler $y_1[n]$, $y_2[n]$ og $y_3[n]$ for hver av disse når de blir filtrert gjennom systemet H.



Figur 3: Inngang og utgang fra et lineært system H; $x_1[n] \to y_1[n]$ øverst, $x_2[n] \to y_2[n]$ i midten, og $x_3[n] \to y_3[n]$ nederst.

4b

Hva er utgangen fra systemet H dersom inngangen er $x[n] = \delta[n]$?

Hint: Legg merke til at $\delta[n] = \frac{1}{2}x_1[n] - \frac{1}{2}x_2[n] + x_3[n]$.

4c

Er systemet H tidsinvariant? Begrunn svaret!

Hint: Uttrykk $\delta[n-1]$ på tilsvarende måte som i forrige deloppgave.

Lykke til!!!