UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i	INF 3470 / INF 4470 — Digital Signalbehandling
Eksamensdag:	11. juni 2007
Tid for eksamen:	14.30 – 17.30
Oppgavesettet er på 5 sider.	
Vedlegg:	Ingen
Tillatte hjelpemidler:	Ingen

Kontroller at oppgavesettet er komplett før
du begynner å besvare spørsmålene.

Dette oppgavesettet består av 4 oppgaver som kan løses uavhengig av hverandre. Skulle noe være uklart i en oppgave, så skriv klart hvilke forutsetninger du gjør for å løse oppgaven, og gå videre!

Skriv klart og tydelig! Pass på å begrunne / underbygge svarene med relevant teori. På alle skisser / plott skal tilhørende verdier på aksene komme tydelig frem.

Oppgave 1 FIR-filtre

Vi har gitt lavpass FIR-filteret

$$y[n] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} x[n-k].$$

1a

Finn et uttrykk for frekvensresponsen $H(e^{j\omega})$ til dette filteret.

Lag skisser av magnituden og fasen til $H(e^{j\omega})$ for $N = 8$.

Hint: Bruk summeformelen for en geometrisk rekke:

$$\sum_{k=0}^{L-1} \alpha^k = \frac{1-\alpha^L}{1-\alpha}, \quad \alpha \neq 1.$$

(Fortsettes på side 2.)

1b

La nå filteret over ha lengde fem, dvs. $N = 5$. Anta at inngangen $x[n]$ til filteret er

$$x[n] = 5 + 4\cos\left(\frac{\pi n}{3} + \frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(\frac{2\pi n}{5}\right).$$

Hva blir utgangen $y[n]$ fra filteret $H(e^{j\omega})$?

1c

Vi modifiserer nå FIR-filteret $y[n]$ slik at vi får det rekursive filteret

$$y_0[n] = \frac{3}{4}y_0[n-1] + \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} x[n-k].$$

Finn et uttrykk for impulsresponsen til $y_0[n]$ på lukket form, det vil si at du skal uttrykke $h_0[n]$ som en sum av basisfunksjonene

$$\delta[n] = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases} \qquad \text{og/eller} \qquad u[n] = \begin{cases} 1, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0. \end{cases}$$

Hint: Bruk at den inverse z-transformen til $1/(1 - az^{-1})$ er $a^n u[n]$.

Oppgave 2 Fourier-rekker, Sampling og DFT

2a

Vi har gitt signalet

$$x(t) = \cos(500\pi t) + \cos\left(3000\pi t + \frac{\pi}{2}\right),$$

som er periodisk med periode $T_0 = 1/250\,\text{s}$. Skriv opp definisjonen av Fourier-integralet for periodiske funksjoner, og regn ut Fourier-rekken til $x(t)$.

2b

Vi sampler $x(t)$ med samplingsfrekvens $f_s = 1000\,\text{Hz}$. Skriv opp uttrykket for samplene $x[n]$. Er signalet over- eller undersamplet?

2c

Skriv opp uttrykket for en 4-punkts DFT, og regn ut en 4-punkts DFT av $\{x[0], x[1], x[2], x[3]\}$.

(Fortsettes på side 3.)

Oppgave 3 Filterdesign

3a

Vi lar $y[n] = x[R - n]$, der $x[n]$ er en reell sekvens. Vis at z-transformen til $y[n]$ kan skrives som

$$Y(z) = z^{-R} X(1/z).$$

3b

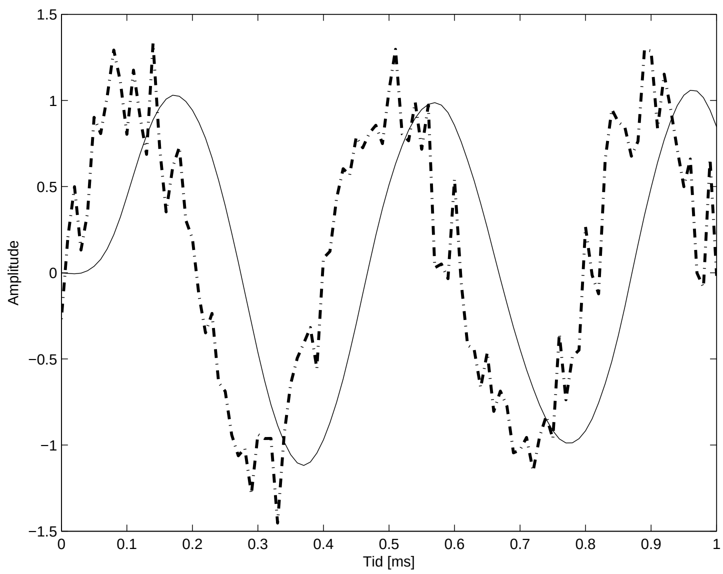
La nå $R = 2$ og anta at $X(z)$ har ett nullpunkt i $z = -1$ og tre poler i $z = \frac{1}{2}(1 \pm j)$ og $z = -\frac{1}{2}$.

Tegn pol-nullpunktsdiagrammet til $Y(z)$.

3c

I filterdesign arbeider vi ofte med magnituden til frekvensresponsen uten å ta hensyn til fasen.

I Figur 1 ser vi en støyfylt sinus (stiplet linje) med frekvens $f_0 = 2.5\,\text{kHz}$. Denne har blitt filtrert med et LTI lavpassfilter med kuttfrekvens $f_c = 3\,\text{kHz}$. Vi ser at det filtrerte signalet (heltrukken linje) er betydelig faseforskjøvet i forhold til det støyfylte signalet.

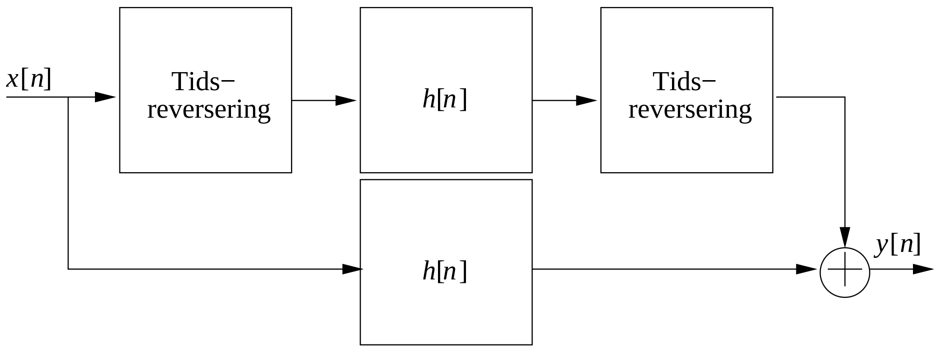


Figur 1: Støyfylt signal (stiplet linje) filtrert med et Butterworth filter (heltrukken linje).

Til noen formål ønsker vi at fasen under filtrering skal være null. Dette er ikke mulig for kausale filtere. La oss se på en ikke-kausal metode for å få til null fase. Til dette skal vi bruke resultatene fra første del av oppgaven. La $h[n]$

(Fortsettes på side 4.)

være et kausalt filter, og la operasjonen *tidsreversering* av et signal $v[n]$ svare til systemet $w[n] = v[-n]$. Vi skal se på systemet vist i blokk-diagrammet i Figur 2.

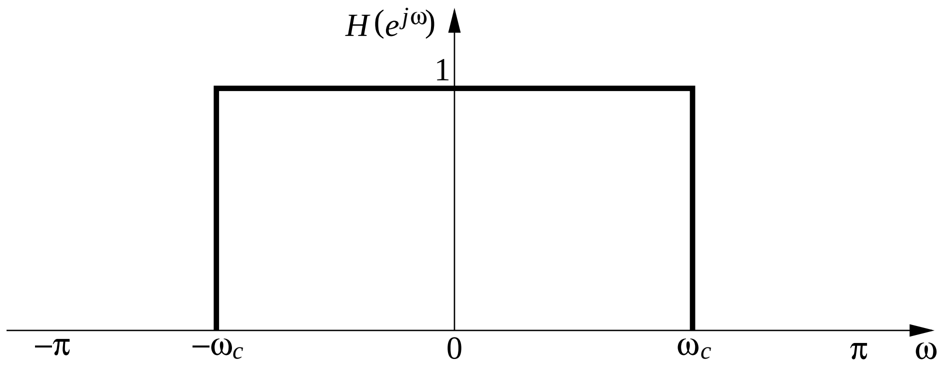


Figur 2: Null-fase system.

Hva blir den samlede impulsresponsen $h_{\text{total}}[n]$ for systemet, relatert til $h[n]$? Vis at $h_{\text{total}}[n]$ har null fase.

Oppgave 4 Fourier-transformen

I mange anvendelser i signalbehandling ønsker man å bruke det som kalles et *ideelt* lavpassfilter. Frekvensresponsen til et ideelt lavpassfilteret med kuttfrekvens ω_c er vist i Figur 3.



Figur 3: Frekvensresponsen til et ideelt lavpassfilter med kuttfrekvens ω_c.

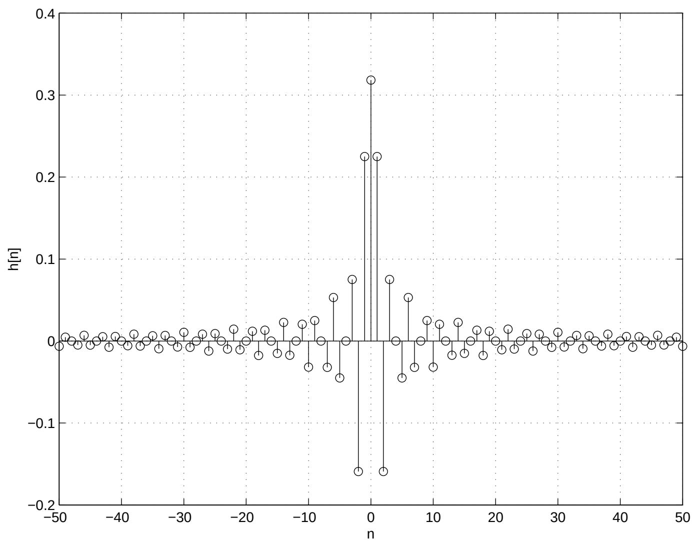
For å finne impulsresponsen til et filter gitt ved frekvensresponsen kan vi bruke Fourier-integralet

$$h[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H(e^{j\omega}) e^{j\omega n} \, \mathrm{d}\omega.$$

(Fortsettes på side 5.)

4a

Finn et uttrykk for impulsresponsen $h[n]$ til det ideelle lavpassfilteret $H(e^{j\omega})$. Et plott av denne for $\omega_c = 3\pi/4$ er vist i Figur 4.



Figur 4: Impulsresponsen til et ideelt lavpassfilter med kuttfrekvens $\omega_c = 3\pi/4$.

4b

Vi multipliserer $h[n]$ med en vindusfunksjon gitt ved

$$v[n] = \begin{cases} 1, & |n| \leq M \\ 0, & \text{ellers.} \end{cases}$$

Å gange med slike vindusfunksjoner gjør man blant annet for å kunne analysere effekten av å "kutte" impulsresponser som er uendelig lange.

Vi vet at konvolusjon i tids-domenet svarer til multiplikasjon i frekvens-domenet, og motsatt. Forklar ved hjelp av dette, med maksimalt 50 ord, hva som skjer med frekvensresponsen til det ideelle lavpassfilteret når vi multipliserer dens impulsrespons med vindusfunksjonen gitt over. Bruk en skisse av $H(e^{j\omega}) * V(e^{j\omega})$ for å underbygge svaret ditt.

Lykke til!!!