UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i	INF3470 — Digital signalbehandling
Eksamensdag:	10. desember 2010
Tid for eksamen:	14.30 – 18.30
Oppgavesettet er på 3 sider.	
Vedlegg:	Ingen
Tillatte hjelpemidler:	Ingen

Kontroller at oppgavesettet er komplett før
du begynner å besvare spørsmålene.

Oppgave 1 z-transformasjon

Gitt en reell, høyresidig og stabil sekvens $x[n]$ med z-transformasjon $X(z)$. Auto-korrelasjonsfunksjon $c_{xx}[n]$ til $x[n]$ er gitt som

$$c_{xx}[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]x[n+k].$$

a) Vis at z-transformasjonen til $c_{xx}[n]$ er gitt som

$$C_{xx}(z) = X(z)X(z^{-1}).$$

Bestem ROC for $C_{xx}(z)$. 2 p.

b) Anta at $x[n] = \alpha^n u[n]$, der $|\alpha| < 1$ og $u[n]$ er step-funksjonen. Skisser pol-nullpunktsplottet til $C_{xx}(z)$. 1 p.

Oppgave 2 DFT

Gitt tre sekvenser i tid og tilhørende DFT-sekvenser spesifisert som

$$\begin{aligned} x_1[n] &= [\underset{\uparrow}{0}\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1] \\ x_2[n] &= [\underset{\uparrow}{0}\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0] \\ s[n] &= [\underset{\uparrow}{1}\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0] \end{aligned} \qquad \text{og} \qquad \begin{aligned} x_1[n] &\overset{\text{DFT}}{\underset{N}{\longleftrightarrow}} X_1[k] \\ x_2[n] &\overset{\text{DFT}}{\underset{N}{\longleftrightarrow}} X_2[k] \\ s[n] &\overset{\text{DFT}}{\underset{N}{\longleftrightarrow}} S[k]. \end{aligned}$$

a) Finn $y[n]$ slik at $y[n] \overset{\text{DFT}}{\underset{N}{\longleftrightarrow}} Y[k]$ og $Y[k] = X_1[k]X_2[k]$. 1 p.

b) Finn $x_3[n]$ slik at $x_3[n] \overset{\text{DFT}}{\underset{N}{\longleftrightarrow}} X_3[k]$ og $S[k] = X_1[k]X_3[k]$. 1 p.

Tips: Vurder hva som er enklest; løse i n- eller k-domenet.

(Fortsettes på side 2.)

Oppgave 3 Poler og nullpunkter

Et stabilt system har fire nullpunkter og fire poler gitt som:

$$\text{nullpunkter: } \pm 1,\ \pm \jmath, \qquad \text{poler: } \pm 0.9,\ \pm 0.9\jmath.$$

a) Bestem systemfunksjonen $H(z)$ og tegn pol-nullpunktsplott og indiker ROC. 2 p.

b) Bestem differenslikningen. 1 p.

c) Skisser magnituderesponsen $|H(z)|$. Husk benevning på akser. 1 p.

Oppgave 4 Lavpassfilter

Et ideelt lavpassfilter er beskrevet i frekvensdomenet som

$$H_L[\Omega] = \begin{cases} 1, & |\Omega| \leq \Omega_c \\ 0, & \Omega_c < |\Omega| \leq \pi, \end{cases}$$

hvor Ω_c angir cut-off frekvensen.

a) Finn $h_L[n]$. 1 p.

b) For å lage et FIR filter av endelig lengde, velger vi så å trunkere $h_L[n]$ til 21 sampler:

$$h[n] = \begin{cases} h_L[n], & -10 \leq n \leq 10 \\ 0, & \text{ellers.} \end{cases}$$

Finn et uttrykk for magnitude og faserespons til $H(\Omega)$ der $H(\Omega) = \mathcal{F}\{h[n]\}$. 1 p.
Tips: Magnituderesponsen kan uttrykkes ved $H_L(\Omega)$.

c) Skisser magnituderesponsen til $H(\Omega)$. Legg vekt på å angi passbånd, transisjonsbånd og stoppbånd riktig. 1 p.

Oppgave 5 Minimum- og maksimum-fase-filtre

Gitt et 2-ordens kausalt FIR filter med systemfunksjon

$$H_1(z) = 2 - z^{-1} - 6z^{-2}.$$

a) Bestem systemfunksjonene til de tre andre kausale FIR-systemene, $H_2(z)$, $H_3(z)$ og $H_4(z)$, med identisk magnituderespons som $H_1(z)$. 2 p.

b) Hvilket av de fire systemene i a) er et minimum-fase system, og hvilket system er et maksimum-fase system? 1 p.

c) Vi definerer del-energien til et kausal system som $E[n] = \sum_{k=0}^{n} |h[k]|^2$. Finn $E[1]$ for $H_1(z)$. Hvordan forholder denne verdien seg til $E[1]$ beregnet for systemene $H_2(z)$, $H_3(z)$ og $H_4(z)$ funnet i a). 1 p.

(Fortsettes på side 3.)

Formelsamling

Grunnleggende sammenhenger:

$$
\begin{aligned}
\sin(\alpha \pm \beta) &= \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta \\
\cos(\alpha \pm \beta) &= \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta \\
\sin 2\alpha &= 2\sin\alpha\cos\alpha \\
\cos 2\alpha &= \cos^2\alpha - \sin^2\alpha \\
\sin\alpha + \sin\beta &= 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \\
\sin\alpha - \sin\beta &= 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2} \\
\cos\alpha + \cos\beta &= 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \\
\cos\alpha - \cos\beta &= -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2} \\
\cos^2\alpha + \sin^2\alpha &= 1 \\
\cos\alpha &= \frac{1}{2}(e^{\jmath\alpha} + e^{-\jmath\alpha}) \\
\sin\alpha &= \frac{1}{2\jmath}(e^{\jmath\alpha} - e^{-\jmath\alpha}) \\
\sum_{n=0}^{N-1} a^n &= \begin{cases} N & \text{for } a = 1 \\ \frac{1-a^N}{1-a} & \text{ellers} \end{cases} \\
ax^2 + bx + c = 0 &\Leftrightarrow x_{\pm} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}
\end{aligned}
$$

Konvolusjon:

$$
y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[n-k]h[k] = h[n] * x[n]
$$

Diskret tid Fouriertransformasjon (DTFT):

$$
\begin{aligned}
\text{Analyse:} \qquad X(\Omega) &= = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-\jmath\Omega n} \\
\text{Syntese:} \qquad x[n] &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(\Omega)e^{\jmath\Omega n}d\Omega
\end{aligned}
$$

Diskret Fouriertransformasjon (DFT):

$$
\begin{aligned}
\text{Analyse:} \qquad X[k] &= \sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-\jmath 2\pi kn/N}, \quad 0 \le k \le N-1 \\
\text{Syntese:} \qquad x[n] &= \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X[k]e^{\jmath 2\pi kn/N}, \quad 0 \le k \le N-1
\end{aligned}
$$

z-transformasjonen:

$$
\text{Analyse:} \qquad X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n}
$$