UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i	INF3470 — Digital signalbehandling
Eksamensdag:	11. desember 2012
Tid for eksamen:	14.30 – 18.30
Oppgavesettet er på 4 sider.	
Vedlegg:	Ingen
Tillatte hjelpemidler:	Ingen

Kontroller at oppgavesettet er komplett før
du begynner å besvare spørsmålene.

Oppgave 1

a) Finn z-transformen (og oppgi ROC) til sekvensen

$$x[n] = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{for} \quad n \in [-2, 2], \qquad n \in \mathbb{Z}, \\ 0 & \text{for} \quad n = 0, \\ 0 & \text{ellers}, \end{cases}$$

der $\mathbb{Z}$ symboliserer heltall. 1 p.

b) Finn z-transformen (og oppgi ROC) til funksjonen

$$x[n] = n\, 2^{n-1}\, u[n-1].$$

Hint: Noen av z-transformens egenskaper bør her benyttes for å forenkle beregningene. 1 p.

c) Vi har gitt to endelig lange sekvenser $x[n]$ og $h[n]$. Vis at:

$$x[n] * h[n] \overset{Z}{\longleftrightarrow} X(z)\, H(z),$$

der $*$ er konvolusjonsoperatoren. Kan du kort si noe om hvorfor denne egenskapen nyttig? 2 p.

(Fortsettes på side 2.)

Oppgave 2

Vi har to hovedtyper filtre: FIR og IIR.

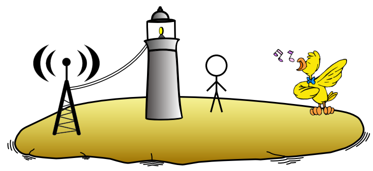
a) Hva står disse akronymene for, og hvordan er disse filtrene fundamentalt forskjellige? Sammenlign impulsrespons, stabilitet, kausalitet og filterets ytelse mtp. amplitude- og faserespons. 2 p.

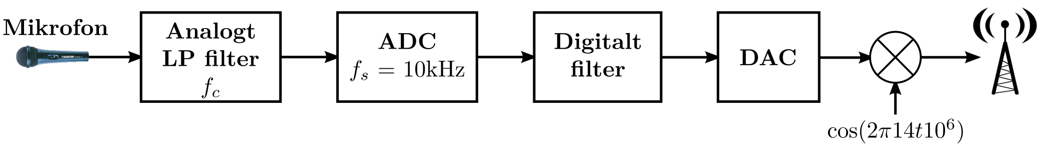
b) Nevn fire hovedtypene FIR filtre som gir eksakt lineær fase, og skissér magnituderesponsen til de forskjellige typene. Hvilke begrensninger gjelder når vi ønsker å implementere lavpass-, høypass-, båndpass- eller båndstoppfiltre? 1 p.

c) Fire hovedtyper IIR filtre er Butterworth, Chebyshev type 1 og 2, og elliptiske filtre. Hva kjennetegner disse filtrene? Sammenlign magnituderesponsen i passbånd, stoppbånd og transisjonsbånd. Hvilket filter gir raskeste overgang fra transisjonsbånd til stoppbånd? 1 p.

Oppgave 3

Du er bosatt i et fyrtårn på en øy. For å kunne kommunisere med folk har du kjøpt en digital amatørradio som byggesett. Vedlagt ligger det en skisse for hvordan delene skal kobles sammen:





der LP står for lavpass, ADC er en analog-til-digital omformer, DAC er en digital-til-analog omformer, f_c er kuttfrekvens og f_s er samplingsfrekvens.

a) Forklar kort hva slags funksjon de forskjellige komponentene har, men ignorér det digitale filteret (dette er tema i oppgave **b**). Hva tror du er mest sannsynlig, at ADC og DAC er 1bit, 10bit eller 24bit? Hvorfor sampler vi på 10kHz, og ikke på vesentlig høyere (eller lavere) frekvens? Hvilke krav stilles til lavpassfilterets kuttfrekvens f_c, og hva kunne det vært fornuftig å sette denne til i dette tilfellet? 2 p.

På øya er det en fugl som bråker, og som forstyrrer kommunikasjonen med de du snakker med. Derfor implementeres et digitalt Notch-filter som såvidt fjerner alt fuglekvitteret:

$$H(z) = \frac{(z - e^{j\pi/4})(z - e^{-j\pi/4})}{(z - 0.95e^{j\pi/4})(z - 0.95e^{-j\pi/4})}$$

Båndbredden Ω_Δ til Notch-filteret kan her finnes ved å benytte følgende tommelfingerregel: $R = 1 - 0.5\Omega_\Delta$, der R er absoluttverdien til notch-filterets poler.

(Fortsettes på side 3.)

b) Tegn opp poler og nullpunkter for dette filteret. 1 p.

c) Hva slags senterfrekvens og båndbredde har fuglesangen? Vil filteret påvirke talekvaliteten nevneverdig? 1 p.

Oppgave 4

Vi har gitt et kausalt filter som er beskrevet av differensligningen:

$$y[n] = c\,y[n-1] + (1-c)\,x[n] \qquad c \in \mathbb{R} \quad \text{og} \quad 0 < c < 1.$$

a) Tegn flytdiagram for filteret direkte etter denne ligningen. 1 p.

b) Vis at systemfunksjonen til filteret er gitt ved

$$H(z) = \frac{1-c}{1-c\,z^{-1}}.$$

1 p.

c) Anta at vi påtrykker et enhetssprang, $x[n] = u[n]$. Finn først z-transformen $Y(z)$ til utgangssignalet $y[n]$, for så å finne $y[n]$ ved hjelp av delbrøksoppspalting og invers z-transform. 1 p.

d) Vis at $\lim_{n\to\infty} y[n] = 1$. Kan du finne dette svaret også direkte fra $H(z)$? 1 p.

Oppgave 5

Et allpass-system har formen:

$$H(z) = \frac{z^{-1}-a}{1-a\,z^{-1}} \qquad a \in \mathbb{R}$$

a) Finn poler og nullpunkter for $H(z)$. 1 p.

b) Vis at $|H(\Omega)| = 1$ for alle Ω. 1 p.

c) Vis at $\angle H(\Omega) = \pm\pi$ når $\Omega = \pi$. 1 p.

d) Vis at for $0 < a < 1$ så er $\angle H(\Omega)$ negativ for alle Ω. 1 p.

(Fortsettes på side 4.)

Formelsamling

Grunnleggende sammenhenger:

$$
\begin{aligned}
\sin(\alpha \pm \beta) &= \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta \\
\cos(\alpha \pm \beta) &= \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta \\
\sin 2\alpha &= 2\sin\alpha\cos\alpha \\
\cos 2\alpha &= \cos^2\alpha - \sin^2\alpha \\
\sin\alpha + \sin\beta &= 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \\
\sin\alpha - \sin\beta &= 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2} \\
\cos\alpha + \cos\beta &= 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \\
\cos\alpha - \cos\beta &= -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2} \\
\cos^2\alpha + \sin^2\alpha &= 1 \\
\cos\alpha &= \frac{1}{2}(e^{j\alpha} + e^{-j\alpha}) \\
\sin\alpha &= \frac{1}{2j}(e^{j\alpha} - e^{-j\alpha}) \\
\sum_{n=0}^{N-1} a^n &= \begin{cases} N & \text{for } a = 1 \\ \frac{1-a^N}{1-a} & \text{ellers} \end{cases} \\
ax^2 + bx + c = 0 &\Leftrightarrow x_\pm = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}
\end{aligned}
$$

Diskret konvolusjon:

$$
y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[n-k]h[k] = h[n] * x[n]
$$

Diskret-tid Fouriertransformasjon (DTFT):

$$
\begin{aligned}
\text{Analyse:} \qquad X(\Omega) &= = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\Omega n} \\
\text{Syntese:} \qquad x[n] &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(\Omega)e^{j\Omega n}d\Omega
\end{aligned}
$$

Diskret Fouriertransformasjon (DFT):

$$
\begin{aligned}
\text{Analyse:} \qquad X[k] &= \sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-j2\pi kn/N}, \quad 0 \le k \le N-1 \\
\text{Syntese:} \qquad x[n] &= \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X[k]e^{j2\pi kn/N}, \quad 0 \le k \le N-1
\end{aligned}
$$

z-transformasjonen:

$$
\text{Analyse:} \qquad X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n}
$$