UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i	Fasit for INF3440/4440 — Signalbehandling
Eksamensdag:	December 2007, v02
Oppgavesettet er på 6 sider.	
Vedlegg:	Ingen
Tillatte hjelpemidler:	None

Kontroller at oppgavesettet er komplett før
du begynner å besvare spørsmålene.

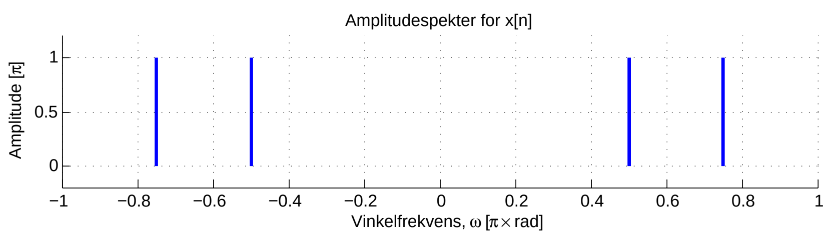
Oppgave 1 Sampling og rekonstruksjon

a)

1. $f_s > 2 * 300\text{Hz} = 600\text{Hz}$.
2. $f_s > 2 * 300\text{Hz} = 600\text{Hz}$.
3. $f_s > 2 * (151/2)\text{Hz} = 151\text{Hz}$.
4. ikke mulig ('$f_s > 2 \times \infty$').

b)

$$\begin{aligned}
x[n] &= x(nT_s) = x(n/f_s) = \cos(300\pi * n/400 + \pi/2) + \cos(600\pi * n/400 + \pi/3) \\
&= \cos(\frac{3}{4}\pi n + \pi/2) + \cos(\frac{6}{4}\pi n + \pi/3) \\
&= \cos(\frac{3}{4}\pi n + \pi/2) + \cos(-\frac{1}{2}\pi n + \pi/3) \\
&= \cos(\frac{3}{4}\pi n + \pi/2) + \cos(\frac{1}{2}\pi n - \pi/3)
\end{aligned}$$



Plott av amplitudespekter for $x[n]$.

(Fortsettes på side 2.)

Oppgave 2 LTI-systemer

a) F.eks: Stabilt hvis $\sum_n |h[n]| < \infty$.

b) F.eks: System stabilt hvis $h[n] = 0$ for $n < 0$.

c) Lineært, dvs. additivt og homogent:
$\mathrm{T}\{a_1 x_1[n] + a_2 x_2[n]\} = a_1 \mathrm{T}\{x_1[n]\} + a_2 \mathrm{T}\{x_2[n]\}$.

Tidsinvariant: A linear system T is *time-invariant* or *shift-invariant* iff the following is true:

$$x(n) \longrightarrow \boxed{\mathrm{T}\{\cdot\}} \longrightarrow y[n] \longrightarrow \boxed{\text{Shift by } k} \longrightarrow y[n-k]$$
$$x(n) \longrightarrow \boxed{\text{Shift by } k} \longrightarrow x[n-k] \longrightarrow \boxed{\mathrm{T}\{\cdot\}} \longrightarrow y[n-k].$$

d)
1. **Linearitet:** La

$$\begin{aligned} y_1[n] &= x_1[n] - 3x_1[n-1] + x_1[n-2], \\ y_2[n] &= x_2[n] - 3x_2[n-1] + x_2[n-2] \\ \text{og } x[n] &= \alpha x_1[n] + \beta x_2[n]. \end{aligned}$$

Har da at

$$\begin{aligned} y[n] &= x[n] - 3x[n-1] + x[n-2] \\ &= \alpha x_1[n] + \beta x_2[n] - 3 * (\alpha x_1[n-1] + \beta x_2[n-1]) \\ &\quad + \alpha x_1[n-2] + \beta x_2[n-2] \\ &= \alpha y_1[n] + \beta y_2[n]. \end{aligned}$$

Systemet er derfor lineært.

Tidsinvarians: La $v[n] = x[n-n_0]$. Har da at

$$\begin{aligned} w[n] &= v[n] - 3v[n-1] + v[n-2] \\ &= x[n-n_0] - 3x[n-1-n_0] + x[n-2-n_0] \\ &= x[(n-n_0)] - 3x[(n-n_0)-1] + x[(n-n_0)-2], \\ \text{og } y[n-n_0] &= x[(n-n_0)] - 3x[(n-n_0)-1] + x[(n-n_0)-2]. \end{aligned}$$

Siden $w[n]$ er identisk med $y[n-n_0]$ er systemet tidsinvariant.

2. **Linearitet:** La

$$\begin{aligned} y_1[n] &= x_1[n+1] - x_1[n] + x_1[n-1] + 5x_1[2], \\ y_2[n] &= x_2[n+1] - x_2[n] + x_2[n-1] + 5x_2[2], \\ \text{og } x[n] &= \alpha x_1[n] + \beta x_2[n]. \end{aligned}$$

Har da at

$$\begin{aligned} y[n] &= x[n+1] - x[n] + x[n-1] + 5x[2] \\ &= \alpha x_1[n+1] + \beta x_2[n+1] - (\alpha x_1[n] + \beta x_2[n]) \\ &\quad + \alpha x_1[n-1] + \beta x_2[n-1] + \alpha x_1[2] + \beta x_2[2] \\ &= \alpha y_1[n] + \beta y_2[n]. \end{aligned}$$

(Fortsettes på side 3.)

Systemet er derfor lineært.

Tidsinvarians: La $v[n] = x[n - n_0]$. Har da at

$$\begin{aligned} w[n] &= v[n+1] + v[n] + v[n-1] + 5v[2] \\ &= x[n+1-n_0] - x[n-n_0] + x[n-1-n_0] + 5x[2-n_0] \\ &= x[(n-n_0)+1] - x[(n-n_0)] + x[(n-n_0)-1] + 5x[2-n_0], \text{ og} \\ y[n-n_0] &= x[(n-n_0)+1] - x[(n-n_0)] + x[(n-n_0)-1] + 5x[2]. \end{aligned}$$

Siden $w[n]$ er ikke identisk med $y[n - n_0]$ er systemet ikke tidsinvariant (evt. tidsvariant/tidsvarierende).

Oppgave 3 Design av FIR-filtre

a) Minste antall koeffisienter: 5. Trenger 2+2 nullpkt, noe som gir en systemfunksjon av 4-orden, dvs. 5 koeffisienter.

b) Nullpkt: $z_1 = e^{\jmath 0.5\pi}$, $z_2 = z_1^*$, $z_3 = e^{\jmath 0.75\pi}$ og $z_4 = z_3^*$.

c)

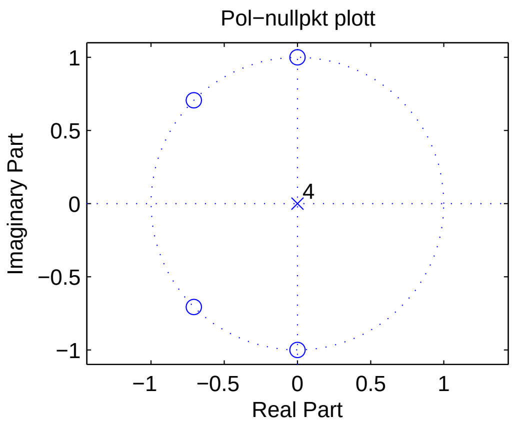
$$\begin{aligned} H(z) &= (a/z^4)(z - z_1)(z - z_2)(z - z_3)(z - z_4) \\ &= (a/z^4)(z^2 - z(z_1 + z_1^*) + z_1 z_1^*)(z^2 - z(z_3 + z_3^*) + z_3 z_3^*). \end{aligned}$$

Har at $z_1 z_1^* = z_3 z_3^* = 1$, $z_1 + z_1^* = 2\mathrm{Re}(z_1) = 0$ og $z_3 + z_3^* = 2\mathrm{Re}(z_3) = -\sqrt{2}$. Får da at

$$\begin{aligned} H(z) &= (a/z^4)(z^2 + 1)(z^2 + \sqrt{2}z + 1) \\ &= (a/z^4)(z^4 + \sqrt{2}z^3 + 2z^2 + \sqrt{2}z + 1) \\ &= a(1 + \sqrt{2}z^{-1} + 2z^{-2} + \sqrt{2}z^{-3} + z^{-4}). \end{aligned}$$

Ved avlesning fås: $h[n] = a\{\underset{\uparrow}{1}, \ \sqrt{2}, \ 2, \ \sqrt{2}, \ 1\}$.

Plott av poler og nullpkt:



Plott av pol-nullpunktsplott.

(Fortsettes på side 4.)

d)

$$\begin{aligned} H(e^0) &= a(1+\sqrt{2}+2+\sqrt{2}+1) = 1 \\ a(4+2\sqrt{2}) &= 1 \\ a &= 1/(4+2\sqrt{2}) \\ \Rightarrow &\ h[n] = \frac{1}{4+2\sqrt{2}}\{\underset{\uparrow}{1},\ \sqrt{2},\ 2,\ \sqrt{2},\ 1\} \end{aligned}$$

Oppgave 4 Filtre og konvolusjon

a) $y[n] = h[n] * x[n] = \sum_{k=0}^{2} h[k]x[n-k] = x[n] - 2x[n-1] + x[n-2]$.

b) $y[n] = \{\underset{\uparrow}{1},\ -2,\ 4,\ -6,\ 5,\ -4,\ 2\}$

c)

$$\begin{aligned} Y(e^{\jmath\hat{\omega}}) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} y[n]e^{-\jmath\hat{\omega}n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k]e^{-\jmath\hat{\omega}n} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n-k]e^{-\jmath\hat{\omega}n}\right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]\left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]e^{-\jmath\hat{\omega}(m+k)}\right) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]\left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]e^{-\jmath\hat{\omega}m}\right)e^{-\jmath\hat{\omega}k} = X(e^{\jmath\hat{\omega}})\sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]e^{-\jmath\hat{\omega}k} \\ &= X(e^{\jmath\hat{\omega}})H(e^{\jmath\hat{\omega}}) \qquad \text{q.e.d} \end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned} H(e^{\jmath\hat{\omega}}) &= H(z)|_{z=e^{\jmath\hat{\omega}}} = \frac{1}{M}\frac{e^{\jmath\hat{\omega}M}-1}{e^{\jmath\hat{\omega}(M-1)}(e^{\jmath\hat{\omega}}-1)} \\ &= \frac{1}{M}\frac{(e^{\jmath\hat{\omega}M/2}-e^{-\jmath\hat{\omega}M/2})e^{\jmath\hat{\omega}M/2}}{e^{\jmath\hat{\omega}(M-1)}e^{\jmath\hat{\omega}/2}(e^{\jmath\hat{\omega}/2}-e^{-\jmath\hat{\omega}/2})} \\ &= \frac{1}{M}\frac{\sin(M\hat{\omega}/2)}{e^{\jmath\hat{\omega}(M-1)/2}\sin(\hat{\omega}/2)} \end{aligned}$$

GM filteret som def i d) glatter signalet ved at utgangssignalet blir et lokalt midlet utgave av inngangssignalet. Dvs at GM er et lavpassfilter; det fjerner høyfrekvente/raskt varierende deler av et signal.

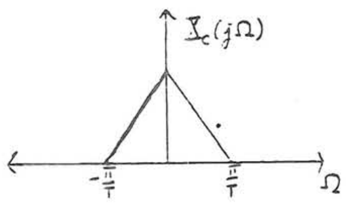
e)

$$\begin{aligned} h_K[n] &= h[n] * h[n] * \cdots * h[n] \\ \Rightarrow H_K(z) &= H(z)\cdot H(z)\cdots H(z) = H^K(z) \\ \Rightarrow H_K(e^{\jmath\hat{\omega}}) &= H_K(z)|_{z=e^{\jmath\hat{\omega}}} = \frac{1}{M^K}\frac{\sin^K(M\hat{\omega}/2)}{e^{\jmath\hat{\omega}K(M-1)/2}\sin^K(\hat{\omega}/2)} \end{aligned}$$

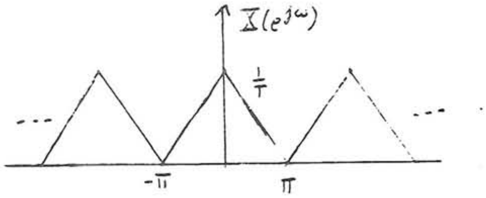
(Fortsettes på side 5.)

Oppgave 5 Ymse

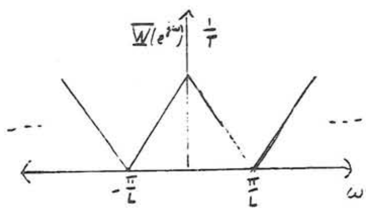
a)



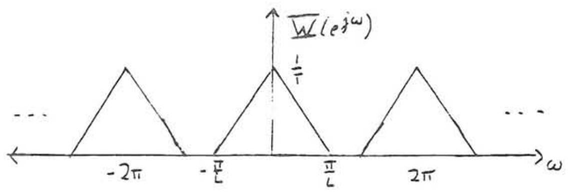
$x_c(t)$ is sampled at sampling period $T \Rightarrow$ no aliasing in $x[n]$.



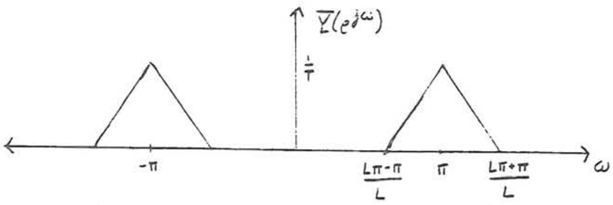
Inserting $L-1$ zeros between samples compresses the frequency axis.



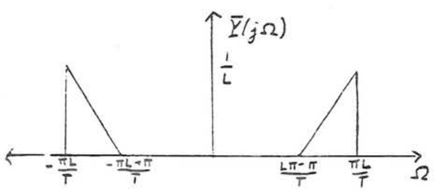
The filter $H(e^{j\omega})$ removes frequency components between $\frac{\pi}{L}$ and π.



The multiply by $(-1)^n$ shifts the center of the frequency band from 0 to π.



The D/C conversion maps the range $-\pi$ to π to the range $\frac{-\pi}{T}$ to $\frac{\pi}{T}$.



(Fortsettes på side 6.)

b)

- Periodogram spektral-estimator: $P_{xx}(f) = \sum_{m=-(N-1)}^{N-1} r_{xx}(m)e^{-j2\pi fm}$
  $= \frac{1}{N} \left| \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-j2\pi fn} \right|^2 = \frac{1}{N}|X(f)|^2$,
  hvor $r_{xx}[n]$ er autokorrelasjonen av signalet $x[n]$.
- Denne estimatoren er enkel å forstå (vi kan analysere den) og enkel å beregne fordi vi kan bruke *fft*.
  Ulemper ved estimatoren er at den er forventningsrett først ved veldig store verdier av N ("asymptotic unbiased"), og den har stor varians (på størrelse med estimatoren selv) og er altså ikke en konsistent estimator av effekttetthetsspekteret.

c) Forbedringene som søkes er primært variansreduksjon. Dette oppnås enten ved å midle mange estimater basert på korte veiede eller uveiede datasegmenter funnet ved å dele opp de opprinnelige dataene, eller ved å midle det endelige estimated. Det siste måten implementeres ved å veie autokorrelasjonsestimatet. Kostnaden ved variansreduksjonen er et effekttetthetsestimat med dårligere oppløsning.