UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i	INF3470/4470 — Digital signalbehandling
Eksamensdag:	10. desember 2008
Tid for eksamen:	14.30 – 17.30
Oppgavesettet er på 5 sider.	
Vedlegg:	Ingen
Tillatte hjelpemidler:	Ingen

Kontroller at oppgavesettet er komplett før
du begynner å besvare spørsmålene.

Oppgave 1 Fourier-transformasjon

Fourier-transformasjonen til et signal $x[n]$ er gitt som

$$X(\Omega) = \frac{1}{2 - e^{-j\Omega}}.$$

Skisser magnituden til Fourier-transformasjonen til signalet.
Finn et uttrykk for fasen til Fourier-transformasjonen til signalet. (Det skal ikke plottes!)
Husk akser og benevning på plottet.

Svar:

Magnituderespons:

$$\begin{aligned}
|X(\Omega)|^2 &= X(\Omega)X^*(\Omega) = \frac{1}{(2 - e^{-j\Omega})(2 - e^{j\Omega})} \\
&= \frac{1}{4 - 2e^{-j\Omega} - 2e^{j\Omega} + 1} = \frac{1}{5 - 4\cos\Omega} \\
&\Rightarrow \quad |X(0)| = 1,\ |X(\pi/2)| = \sqrt{1/5},\ |X(\pi)| = \sqrt{1/9} = 1/3.
\end{aligned}$$

+ skisse!

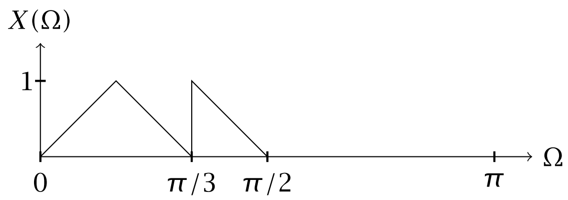
Faserespons:

$$\begin{aligned}
X(\Omega) &= \frac{1}{2 - e^{-j\Omega}} = \frac{2 - e^{j\Omega}}{(2 - e^{-j\Omega})(2 - e^{j\Omega})} \\
&= \frac{2 - \cos\Omega - j\sin\Omega}{(2 - e^{-j\Omega})(2 - e^{j\Omega})} \\
\Rightarrow \Phi(\Omega) &= -\arctan\frac{\sin\Omega}{2 - \cos\Omega}
\end{aligned}$$

(Fortsettes på side 2.)

Oppgave 2 Opp- og nedsampling

Et signal $x[n]$ har Fourier transformasjon $X(\Omega)$ som gitt under



Signalet benyttes som inngangssignal på systemene I og II definert under:

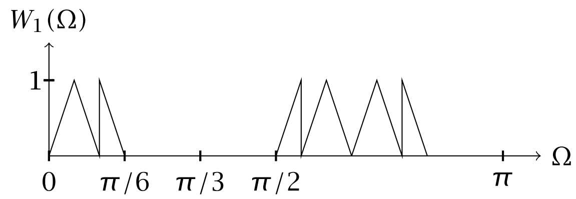
I: $x[n] \rightarrow \boxed{\uparrow 3} \rightarrow w_1[n] \rightarrow \boxed{H_0(z)} \rightarrow z_1[n] \rightarrow \boxed{\downarrow 2} \rightarrow y_1[n]$

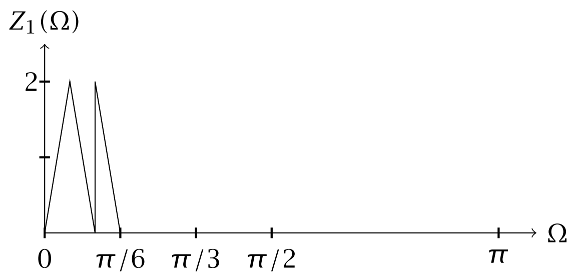
II: $x[n] \rightarrow \boxed{\downarrow 2} \rightarrow w_2[n] \rightarrow \boxed{\uparrow 3} \rightarrow z_2[n] \rightarrow \boxed{H_0(z)} \rightarrow y_2[n]$

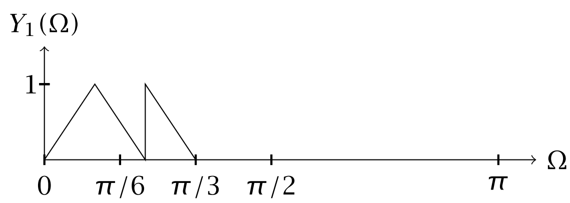
"$\rightarrow \boxed{\downarrow M} \rightarrow$" betyr nedsampling med faktor M (beholde hvert Mte sampel) og "$\rightarrow \boxed{\uparrow N} \rightarrow$" betyr null-interpolering med faktor N (sette inn $N-1$ nuller mellom hvert sampel). $H_0(z)$ er et ideelt lavpassfilter med cut-off frekvens $w_c = \pi/3$ og forsterkning (gain) lik 2.

For begge systemer, skisser Fourier transformasjonen til signalene $w_1[n]$, $w_2[n]$, $z_1[n]$, $z_2[n]$, $y_1[n]$ og $y_2[n]$. Husk akser og benevning på alle plott.

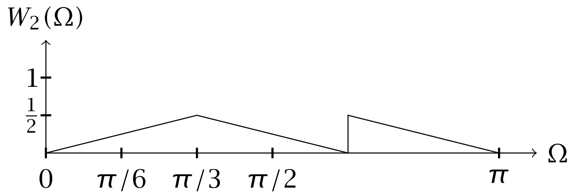
Svar:

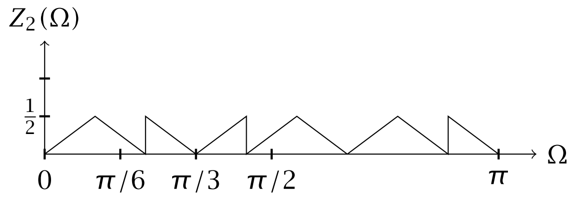


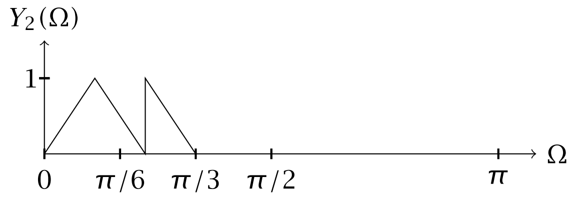




(Fortsettes på side 3.)







Oppgave 3 IIR-filtre

Et kausalt IIR-filter med én, reell pol z_p har impulsrespons:

$$h[n] = \alpha^n u[n], \alpha > 0 \tag{1}$$

a) Gitt systemet med impulsrespons $h[n]$ gitt av (1), finn systemfunksjonen $H(z)$ med tilhørende ROC og pol.
b) Finn systemfunksjonen $H'(z)$ med tilhørende ROC, og tegn pol/nullpunkts plott for $\alpha = 0.5$, for systemet med impulsrespons

$$h'[n] = h[n]\cos(\pi n) \tag{2}$$

c) Finn frekvensresponsen $H'(\Omega)$ uttrykt ved $H(\Omega)$. Beskriv hva slags filtre $h[n]$ og $h'[n]$ er hvis $0.5 < \alpha < 1$.
d) La oss se på operasjonen i ligning (2) som et system $T\{\cdot\}$ slik at $h'[n] = T\{h[n]\}$. Vis at systemet $T\{\cdot\}$ ikke er LTI.

Svar:

a) Systemfunksjonen er:

$$H(z) = \frac{1}{1 - \alpha z^{-1}} \tag{3}$$

ROC er $|z| > |\alpha|$ og polen er i $z = \alpha$.
b) Systemfunksjonen er

$$H'(z) = \frac{1}{1 + \alpha z^{-1}} \tag{4}$$

(Fortsettes på side 4.)

ROC er $|z| > |\alpha|$ og polen er i $z = -\alpha$.
c) Frekvensresponsene forholder seg til hverandre som:

$$H'(\Omega) = H(\Omega + \pi) \tag{5}$$

$0.5 < \alpha < 1$ betyr at $h[n]$ er et lavpass-filter, mens $h'[n]$ er et høypass-filter.
d) Vi har at

$$T\{h[n-k]\} = h[n-k]\cos(\pi n) \tag{6}$$

mens

$$h'[n-k] = h[n-k]\cos(\pi(n-k)) \tag{7}$$

som betyr at systemet er tidsvariant, dvs. ikke LTI.

Oppgave 4 Sampling

Vi vet at for at et signal $x(t)$ skal kunne rekonstrueres perfekt fra en sampling $x[n] = x(nT_s) = x(\frac{n}{F_s})$ så må vi ha

$$F_s > 2F_{max} \tag{8}$$

der F_{max} er den høyeste frekvensen i signalet $x(t)$. Hvis ikke dette er tilfredsstilt, vil alle frekvenser $f > \frac{F_s}{2}$ aliases. Vi skal nå se på hva som skjer med frekvensen $\frac{F_s}{2}$.

a) Finn et uttrykk for $x[n]$ gitt $x(t) = \cos(2\pi 200t + \pi/2)$ og $F_s = 400$ Hz.
b) Finn uttrykk $x_1[n]$ og $x_2[n]$ gitt $x_1(t) = \cos(2\pi 200t + \pi/4)$, $x_2(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\cos(2\pi 200t)$ og $F_s = 400$ Hz.
c) Vis at for et signal $x(t) = A\cos(\pi F_s t + \phi)$, uansett valg av parametrene A, ϕ, så finnes det alltid et annet signal $w(t) = B\cos(\pi F_s t)$ slik at $x[n] = w[n]$ når samplingsraten er lik F_s. Beregn B som funksjon av A og ϕ.
Hint: Finn et generelt uttrykk for forholdet mellom $x[n]$ og $x[n+1]$, og bruk dette til å regne ut verdien for B fra de kjente verdiene A, ϕ.

Svar:

a) Vi får $x[n] = 0$.
b) Vi får $x_1[n] = x_2[n] = \frac{1}{\sqrt{2}}\cos(\pi n)$.
c) Vi ser at

$$\begin{aligned} x[n+1] &= A\cos(\pi(n+1) + \phi) = A\cos(\pi n + \pi + \phi) \\ &= -A\cos(\pi n + \phi) = -x[n] \Rightarrow x[n] \\ &= (-1)^n x[0] = (-1)^n A\cos(\phi) \end{aligned} \tag{9}$$

(Fortsettes på side 5.)

som gir oss

$$B = A\cos(\phi) \tag{10}$$

fordi

$$w[n] \text{ gitt } w(t) = A\cos(\phi)\cos(\pi F_s t) \text{ er } w[n] = (-1)^n A\cos(\phi) = x[n] \tag{11}$$

Oppgave 5 MA-filtre

Et MA-filter av orden $K-1$ er et kausalt FIR-filter med K koeffisienter, og en impulsrespons gitt ved:

$$h[n] = \frac{1}{K}\sum_{k=0}^{K-1}\delta[n-k] \tag{12}$$

a) Finn frekvensresponsen $H(\Omega)$ til MA-filteret av orden $K-1$.
b) Finn ved regning hvor mange nullpunkter et MA-filter av orden $K-1$ har, og hvilke frekvenser de nuller ut.
c) Hvilke ordner kan et MA-filter ha hvis det skal nulle ut frekvensen $\Omega = \frac{\pi}{P}$, der P er et heltall.
d) Vis at et MA-filter av orden $K-1$ kan implementeres som et FIR-filter med impulsrespons $h_{FIR}[n]$ i kaskade med et IIR-filter med impulsrespons $h_{IIR}[n]$ der

$$h_{FIR}[n] = \frac{1}{K}(\delta[n] - \delta[n-K]), \quad h_{IIR}[n] = u[n] \tag{13}$$

Svar:

a) Frekvensresponsen er gitt som

$$H(\Omega) = \frac{\sin(K\Omega/2)}{\sin(\Omega/2)}e^{-j\Omega(K-1)/2} \tag{14}$$

b) Et MA-filter med orden $K-1$ har $K-1$ nullpunkter i intervallet $-\pi < \Omega \leq \pi$. Di sse påvirker frekvensene $\Omega_k = \frac{2\pi}{K}k, k = 1, 2, \cdots, K-1$.
c) Alle mulige ordner for dette filteret er $PN, N = 1, 2, 3, \cdots$.
d)

$$h[n] = h_{FIR}[n] * h_{IIR}[n] \Rightarrow \tag{15}$$

$$H(z) = H_{FIR}(z)H_{IIR}(z) = \frac{1-z^{-K}}{K}\frac{1}{1-z^{-1}} = \frac{1-z^{-K}}{K(1-z^{-1})} = \frac{1}{K}\sum_{k=0}^{K-1} z^{-k} \Rightarrow \tag{16}$$

$$h[n] = \frac{1}{K}\sum_{k=0}^{K-1}\delta[n-k] \tag{17}$$