UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i	INF3470 — Digital signalbehandling
Eksamensdag:	10. desember 2010
Tid for eksamen:	14.30 – 18.30
Oppgavesettet er på 8 sider.	
Vedlegg:	Ingen
Tillatte hjelpemidler:	Ingen

Kontroller at oppgavesettet er komplett før
du begynner å besvare spørsmålene.

Svar:

Forslag til fasit, 22/12-2010:

Oppgave 1 z-transformasjon

Gitt en reell, høyresidig og stabil sekvens $x[n]$ med z-transformasjon $X(z)$. Auto-korrelasjonsfunksjon $c_{xx}[n]$ til $x[n]$ er gitt som

$$c_{xx}[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]x[n+k].$$

a) Vis at z-transformasjonen til $c_{xx}[n]$ er gitt som

$$C_{xx}(z) = X(z)X(z^{-1}).$$

Bestem ROC for $C_{xx}(z)$. 2 p.

b) Anta at $x[n] = \alpha^n u[n]$, der $|\alpha| < 1$ og $u[n]$ er step-funksjonen. Skisser pol-nullpunktsplottet til $C_{xx}(z)$. 1 p.

Svar:

(Fortsettes på side 2.)

a)

$$
\begin{aligned}
\mathcal{Z}\{c_{xx}[n]\} &= C_{xx}(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_{xx}[n]z^{-n} \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]x[n+k]\right) z^{-n} = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[k]x[n+k]\ z^{-n} \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n+k]\ z^{-(n+k)}\right) z^{k} \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k](z^{-1})^{-k}\cdot \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]\ z^{-m} \\
&= \underline{\underline{X(z^{-1})X(z)}} \qquad\qquad \text{QED}
\end{aligned}
$$

$\mathrm{ROC} = \mathrm{ROC}_{X(z)} \cap \mathrm{ROC}_{X(z^{-1})}$.
Hvis x er en reell, stabil og kausal, så er $\mathrm{ROC}_{X(z)}$ gitt som
$\mathrm{ROC}_{X(z)} : |z| > |z_0|$,
der z_0 er den pol som ligger lengst fra origo og $|z_0| < 1$.
$\mathrm{ROC}_{X(z^{-1})}$ er da gitt som $\mathrm{ROC}_{X(z^{-1})} : |z| < |z_0^{-1}|$.
Får da at $\mathrm{ROC} : \underline{\underline{|z_0| < |z| < 1/|z_0|}}$.

b) $X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (\alpha z^{-1})^n = \frac{1}{1-\alpha z^{-1}}$. Pol: $z = \alpha$. ROC: $|z| > |\alpha|$.
Pol-nullpunktsplott blir en "smultring" mellom verdiene $|\alpha|$ og $1/|\alpha|$.

Oppgave 2 DFT

Gitt tre sekvenser i tid og tilhørende DFT-sekvenser spesifisert som

$$
\begin{aligned}
x_1[n] &= [\underset{\uparrow}{0}\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1] & \qquad & x_1[n] \overset{\text{DFT}}{\underset{N}{\longleftrightarrow}} X_1[k] \\
x_2[n] &= [\underset{\uparrow}{0}\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0] & \text{og} \qquad & x_2[n] \overset{\text{DFT}}{\underset{N}{\longleftrightarrow}} X_2[k] \\
s[n] &= [\underset{\uparrow}{1}\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0] & \qquad & s[n] \overset{\text{DFT}}{\underset{N}{\longleftrightarrow}} S[k].
\end{aligned}
$$

a) Finn $y[n]$ slik at $y[n] \overset{\text{DFT}}{\underset{N}{\longleftrightarrow}} Y[k]$ og $Y[k] = X_1[k]X_2[k]$. 1 p.

b) Finn $x_3[n]$ slik at $x_3[n] \overset{\text{DFT}}{\underset{N}{\longleftrightarrow}} X_3[k]$ og $S[k] = X_1[k]X_3[k]$. 1 p.

Tips: Vurder hva som er enklest; løse i n- eller k-domenet.

Svar:

(Fortsettes på side 3.)

a) Denne oppgaven kan løses på flere måter:

- Det enkleste er å se at x_2 er en forskjøvet impuls og at dermed blir svaret gitt av $x_1[n]$ sirkulært forsinket med 1, dvs $\underline{\underline{y[n] = [\underset{\uparrow}{1}\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0]}}$.
- Man kan også utføre en sirkulær konvolusjon direkte.
- Oppgaven kan også løses ved hjelp av lineær konvolusjon. Den blir $[\underset{\uparrow}{0}\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ ]$ som når den foldes rundt sirkulært etter 6 sampler blir $y[n] = [\underset{\uparrow}{1}\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0]$.
- Det er også mulig å løse denne oppgaven via DFT da det er så få sampler i x_1 og x_2. En får $X_1[k] = e^{-\jmath 2\pi \frac{k}{6}} + e^{-\jmath 2\pi \frac{5k}{6}}$. Det kan også skrives som $X_1[k] = 2\cos(2\pi k/6)$ men det hjelper ikke noe her. For x_2 får en $X_2[k] = e^{-\jmath 2\pi \frac{k}{6}}$ og multiplisert sammen gir dette $Y[k] = e^{-\jmath 2\pi \frac{2k}{6}} + e^{-\jmath 2\pi \frac{6k}{6}}$. Trikset er å se at den siste faktoren i $Y[k]$ er $e^{-\jmath 2\pi \frac{6k}{6}} = e^{-\jmath 2\pi k} = e^{-\jmath 2\pi \frac{0k}{6}}$. Invers DFT finnes ved inspeksjon av faktorene foran k-ene. Det gir bare bidrag ved $n = 0$ og $n = 2$: $y[n] = [\underset{\uparrow}{1}\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0]$.

b) Kaller $x_3[n] = [\underset{\uparrow}{a}\ b\ c\ d\ e\ f]$ og finner ved sirkulærkonvolusjon at

$$\begin{aligned} b+f &= 1 \\ a+e &= 0 \\ f+d &= 0 \\ e+c &= 0 \\ d+b &= 0 \\ c+a &= 0 \end{aligned}$$

og derfra at $a = -e = c$ og $a = -c \Rightarrow a = c = e = 0$ og $f = -d = b$ og $\underline{\underline{x_3[n] = [\underset{\uparrow}{0}\ .5\ 0\ -.5\ 0\ .5]}}$.

Grafisk framstilling av sirkulærkonvolusjon for ovennevnte system kan illustreres som vist i Figur 1.

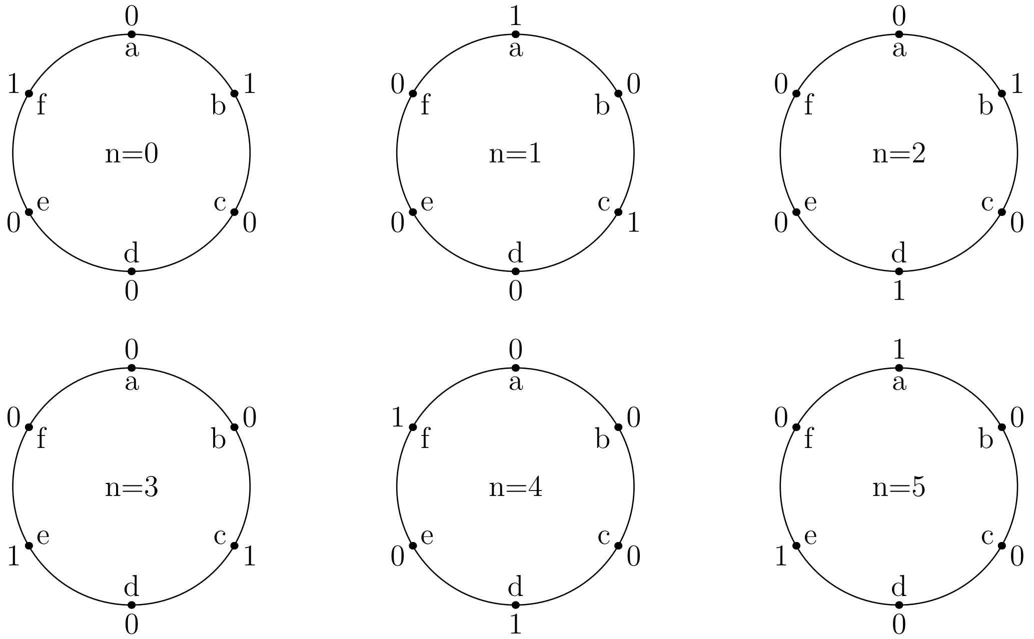
Oppgave 3 Poler og nullpunkter

Et stabilt system har fire nullpunkter og fire poler gitt som:

$$\text{nullpunkter: } \pm 1,\ \pm \jmath, \qquad \text{poler: } \pm 0.9,\ \pm 0.9\jmath.$$

a) Bestem systemfunksjonen $H(z)$ og tegn pol-nullpunktsplott og indiker ROC. 2 p.

(Fortsettes på side 4.)



Figur 1: Grafisk illustrasjon av sirkulærkonvolusjon i b)

b) Bestem differenslikningen. 1 p.

c) Skisser magnituderesponsen $|H(z)|$. Husk benevning på akser. 1 p.

Svar:

a) $H(z) = A\frac{(z-1)(z+1)(z-\jmath)(z+\jmath)}{(z-0.9)(z+0.9)(z-0.9\jmath)(z+0.9\jmath)}$, ROC: $|z| > 0.9$.

Pol-nullpkt plott i Figur 2.

b) $H(z) = A\frac{(z^2-1)(z^2+1)}{(z^2-0.81)(z^2+0.81)} = A\frac{z^4-1}{z^4-0.81^2} = A\frac{1-z^{-4}}{1-0.656z^{-4}} = \frac{Y(z)}{X(z)}$ og
$y[n] - 0.81^2 y[n-4] = Ax[n] - Ax[n-4]$

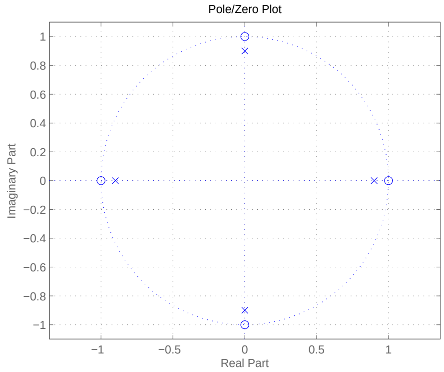
c) Magnituderespons i Figur 3.
Det er antatt $A = 1$. Husk at nullpunkter for $\omega = 0, \pm\pi/2, \pm\pi$ er gitt. Regner ut en verdi mellom nullpunktene for å finne omtrent hva maksimalverdien er:
$H(z)|_{z=e^{\jmath\pi/4}} = \frac{e^{\jmath\pi*4/4}-1}{e^{\jmath\pi*4/4}-0.81^2} = \frac{-1-1}{-1-0.656...} \approx 1.2$

Oppgave 4 Lavpassfilter

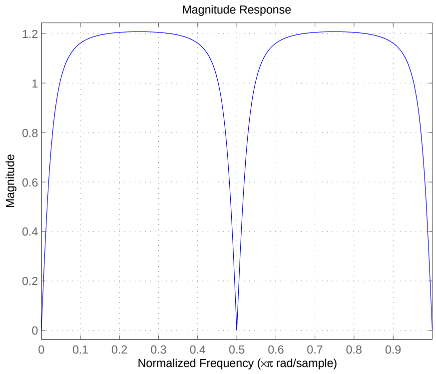
Et ideelt lavpassfilter er beskrevet i frekvensdomenet som

$$H_L[\Omega] = \begin{cases} 1, & |\Omega| \le \Omega_c \\ 0, & \Omega_c < |\Omega| \le \pi, \end{cases}$$

(Fortsettes på side 5.)



Figur 2: Pol-nullpunktsplott



Figur 3: Magnituderespons

hvor Ω_c angir cut-off frekvensen.

a) Finn $h_L[n]$. 1 p.

b) For å lage et FIR filter av endelig lengde, velger vi så å trunkere $h_L[n]$ til 21 sampler:

$$h[n] = \begin{cases} h_L[n], & -10 \leq n \leq 10 \\ 0, & \text{ellers.} \end{cases}$$

Finn et uttrykk for magnitude og faserespons til $H(\Omega)$ der $H(\Omega) = \mathcal{F}\{h[n]\}$. 1 p.
Tips: Magnituderesponsen kan uttrykkes ved $H_L(\Omega)$.

c) Skisser magnituderesponsen til $H(\Omega)$. Legg vekt på å angi passbånd, transisjonsbånd og stoppbånd riktig. 1 p.

Svar:

(Fortsettes på side 6.)

a)

$$\underline{\underline{h_L[n]}} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\Omega_c}^{\Omega_c} 1\cdot e^{-j\Omega n}d\Omega = \frac{1}{-j2\pi n}\int_{j\Omega_c n}^{-j\Omega_c n} e^u du$$
$$\frac{e^{-j\Omega_c n} - e^{-j\Omega_c n}}{j2\pi n} = \underline{\underline{\frac{\sin n\Omega_c}{n\pi} = \frac{\Omega_c}{\pi}\frac{\sin n\Omega_c}{n\Omega_c}}}$$

b) Trunkerer til 21 sampler, dvs multiplikasjon m/vindu: $\underline{\underline{H(\Omega) = W(\Omega) * H_L(\Omega)}}$ der

$$\begin{aligned}\underline{\underline{W(\Omega)}} &= \sum_{n=-10}^{10} e^{-jn\Omega} = \sum_{m=0}^{21} e^{-jm\Omega}e^{j10\Omega}\\ &= e^{j10\Omega}\frac{1-e^{j21\Omega}}{1-e^{j\Omega}} = e^{j10\Omega}\frac{e^{-j21\Omega/2}}{e^{-j\Omega/2}}\frac{2j\sin(21\Omega/2)}{2j\sin(\Omega/2)}\\ &= \underline{\underline{\frac{\sin(21\Omega/2)}{\sin(\Omega/2)}}}\end{aligned}$$

Ser at $H(\Omega)$ er reell, så magnituderesponsen blir $|H(\Omega)| = |W(\Omega) * H_L(\Omega)|$ og faseresponsen $\Phi(\Omega) = 0$.

c) Avstand mellom nullpunkt i $W(\Omega)$ gitt fra $\sin(21\Omega/2) = 0$, dvs $21\Omega/2 = \pi \Rightarrow \Omega = \pm\frac{2}{21}\pi \approx \pm 0.1\pi$. Dette gir omtrentlige mål

- Passbånd: $0 \,..\, \Omega_c - 0.1\pi$
- Transisjonsbånd: $\Omega_c - 0.1\pi \,..\, \Omega_c + 0.1\pi$
- Stoppbånd: $\Omega_c + 0.1\pi \,..\, \pi$.

Oppgave 5 Minimum- og maksimum-fase-filtre

Gitt et 2-ordens kausalt FIR filter med systemfunksjon

$$H_1(z) = 2 - z^{-1} - 6z^{-2}.$$

a) Bestem systemfunksjonene til de tre andre kausale FIR-systemene, $H_2(z)$, $H_3(z)$ og $H_4(z)$, med identisk magnituderespons som $H_1(z)$. 2 p.

b) Hvilket av de fire systemene i a) er et minimum-fase system, og hvilket system er et maksimum-fase system? 1 p.

c) Vi definerer del-energien til et kausal system som $E[n] = \sum_{k=0}^{n}|h[k]|^2$. Finn $E[1]$ for $H_1(z)$. Hvordan forholder denne verdien seg til $E[1]$ beregnet for systemene $H_2(z)$, $H_3(z)$ og $H_4(z)$ funnet i a). 1 p.

(Fortsettes på side 7.)

Svar:

a) $H_1(z) = 2 - z^{-1} - 6z^{-2} = 2(z-2)(z+3/2)/z^2$.
$H_1(z)$ har to nullpunkter, et i $z = 2$ og et i $z = -3/2$. Begge er på utsiden av enhetssirkelen.
Magnituderespons er definert via $|H(z)|^2 = H(z)H^*(z)$. Når $h[n]$ er reell, gjelder også at $|H(z)|^2 = H(z)H(z^{-1})$. Magnituderesponsen til $H_1(z)$ er bestemt fra $|H_1(z)|^2 \propto (z-2)(z+3/2)(z^{-1}-2)(z^{-1}+3/2)$.
Vi kan definere 3 andre systemer i tillegg til $H_1(z)$ med samme magnituderespons. Dette er:

- $H_2(z) = A(z-2)(z+1/(3/2))/z^2$. Systemet har nullpunkt i $z = 2$ og i $z = -1/(3/2)$, dvs et på hver side av enhetssirkelen. For å få samme forsterkning som $|H_1(z)|$ ved frekvens 0 (DC), dvs $z = 1$, må $A = 3$ og $\underline{\underline{H_2(z)}} = 3(z-2)(z+1/(3/2))/z^2 = \underline{\underline{3 - 4z^{-1} - 4z^{-2}}}$.

- $H_3(z) = B(z-1/2)(z+3/2)/z^2$. Systemet har nullpunkt i $z = 1/2$ og i $z = -3/2$, dvs et på hver side av enhetssirkelen. For å få samme forsterkning som $H_1(z)$ for $z = 1$ må $B = 4$ og
$\underline{\underline{H_3(z)}} = 4(z-1/2)(z+3/2)/z^2 = \underline{\underline{4 + 4z^{-1} - 3z^{-2}}}$.

- $H_4(z) = C(z-1/2)(z+1/(3/2))/z^2$. Systemet har nullpunkt i $z = 1/2$ og i $z = -1/(3/2)$, dvs begge på innsiden e av enhetssirkelen. For å få samme forsterkning som $H_1(z)$ for $z = 1$ må $C = 6$ og $\underline{\underline{H_4(z)}} = 6(z-1/2)(z+1/(3/2))/z^2 = \underline{\underline{6 + z^{-1} - 2z^{-2}}}$.

b) Minimum-fase systemer har alle røtter på innsiden. $\underline{\underline{H_4(z)\text{ er minimum-fase}}}$. Maksimum-fase systemer har alle røtter på utsiden. Gitt krav om kausalitet blir $\underline{\underline{H_1(z)\text{ maksimum-fase}}}$.

c) Invers z-transform av systemene funnet i a) er triviell og kan leses rett fra systemfunksjonene så lenge disse er på potensrekke-form. Finner at

- $\underline{\underline{E_1[1]}} = 2^2 + (-1)^2 = \underline{\underline{5}}$. Siden systemet er maksimum fase så vil $\underline{\underline{E[1]\text{ for systemet }H_1(z)\text{ være mindre enn }E[1]\text{ beregnet fra de andre systemene}}}$.
For kompletthet:
- $E_2[1] = 3^2 + (-4)^2 = 25$
- $E_3[1] = 4^2 + 4^2 = 32$
- $E_4[1] = 6^2 + 1^2 = 37$

(Fortsettes på side 8.)

Formelsamling

Grunnleggende sammenhenger:

$$
\begin{aligned}
\sin(\alpha \pm \beta) &= \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta \\
\cos(\alpha \pm \beta) &= \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta \\
\sin 2\alpha &= 2\sin\alpha\cos\alpha \\
\cos 2\alpha &= \cos^2\alpha - \sin^2\alpha \\
\sin\alpha + \sin\beta &= 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \\
\sin\alpha - \sin\beta &= 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2} \\
\cos\alpha + \cos\beta &= 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \\
\cos\alpha - \cos\beta &= -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2} \\
\cos^2\alpha + \sin^2\alpha &= 1 \\
\cos\alpha &= \frac{1}{2}(e^{\jmath\alpha} + e^{-\jmath\alpha}) \\
\sin\alpha &= \frac{1}{2\jmath}(e^{\jmath\alpha} - e^{-\jmath\alpha}) \\
\sum_{n=0}^{N-1} a^n &= \begin{cases} N & \text{for } a = 1 \\ \frac{1-a^N}{1-a} & \text{ellers} \end{cases} \\
ax^2 + bx + c = 0 &\Leftrightarrow x_{\pm} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}
\end{aligned}
$$

Konvolusjon:

$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[n-k]h[k] = h[n] * x[n]$$

Diskret tid Fouriertransformasjon (DTFT):

$$
\begin{aligned}
\text{Analyse:} \qquad X(\Omega) &= = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-\jmath\Omega n} \\
\text{Syntese:} \qquad x[n] &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(\Omega)e^{\jmath\Omega n}d\Omega
\end{aligned}
$$

Diskret Fouriertransformasjon (DFT):

$$
\begin{aligned}
\text{Analyse:} \qquad X[k] &= \sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-\jmath 2\pi kn/N}, \quad 0 \le k \le N-1 \\
\text{Syntese:} \qquad x[n] &= \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X[k]e^{\jmath 2\pi kn/N}, \quad 0 \le k \le N-1
\end{aligned}
$$

z-transformasjonen:

$$\text{Analyse:} \qquad X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n}$$