UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i	INF3470 — Digital signalbehandling
Eksamensdag:	11. desember 2012
Tid for eksamen:	14.30 – 18.30
Oppgavesettet er på 12 sider.	
Vedlegg:	Ingen
Tillatte hjelpemidler:	Ingen

Kontroller at oppgavesettet er komplett før
du begynner å besvare spørsmålene.

Svar:

Løsningsforslag,15/1-2013:

Oppgave 1

a) Finn z-transformen (og oppgi ROC) til sekvensen

$$x[n] = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{for} \quad n \in [-2, 2], \qquad n \in \mathbb{Z}, \\ 0 & \text{for} \quad n = 0, \\ 0 & \text{ellers,} \end{cases}$$

der $\mathbb{Z}$ symboliserer heltall. 1 p.

b) Finn z-transformen (og oppgi ROC) til funksjonen

$$x[n] = n\, 2^{n-1}\, u[n-1].$$

Hint: Noen av z-transformens egenskaper bør her benyttes for å forenkle beregningene. 1 p.

c) Vi har gitt to endelig lange sekvenser $x[n]$ og $h[n]$. Vis at:

$$x[n] * h[n] \overset{Z}{\longleftrightarrow} X(z)\, H(z),$$

der $*$ er konvolusjonsoperatoren. Kan du kort si noe om hvorfor denne egenskapen nyttig? 2 p.

(Fortsettes på side 2.)

Svar:

a)

$$
\begin{aligned}
x[n] &= \{-\tfrac{1}{2} \quad -1 \quad \underline{0} \quad 1 \quad \tfrac{1}{2}\} \\
X(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\, z^{-n} \\
&= \underline{\underline{-\frac{1}{2}z^{2} - z + z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-2}}}
\end{aligned}
$$

<u>ROC: Hele z-planet med unntak av $z = 0$ og $z = \infty$</u>.

b) 1. Vi starter med å finne z-transformen av $f[n] = 2^{n}u[n]$:

$$F(z) = \mathscr{Z}\{f[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f[n]\, z^{-n} \overset{*}{=} \frac{z}{z-2}$$

*med ROC: $|z| > 2$.

2. Så skifter vi denne med ett sampel:

$$G(z) = \mathscr{Z}\{g[n-1]\} = z^{-1}\, F(z) = \frac{1}{z-2}$$

3. Og til slutt multipliserer vi med n:

$$X(z) = \mathscr{Z}\{n\, g[n-1]\} = -z\frac{dG(z)}{dz} = -z\frac{-1}{(z-2)^2} = \underline{\underline{\frac{z}{(z-2)^2}}}$$

Over benyttet vi kjerneregelen for å derivere. Et alternativ kunne vært å f.eks. bruke kvotientregelen:

$$
\begin{aligned}
G(z) &= \frac{1}{z-2} = \frac{b}{a} \\
\frac{dG(z)}{dz} &= \frac{b'a - a'b}{a^2} = \frac{-1}{(z-2)^2} \\
X(z) &= -z\frac{dG(z)}{dz} = \underline{\underline{\frac{z}{(z-2)^2}}}
\end{aligned}
$$

Verken tidsskiftet (2) eller multiplikasjonen med n (3) endrer ROC, så den forblir <u>ROC: $|z| > 2$</u>

Man kunne selvfølgelig også ha brukt denne egenskapen direkte, selv om den ikke har vært nevnt i pensum:

$$n\alpha^{n}u[n] \overset{Z}{\longleftrightarrow} \frac{z}{(z-2)^2}$$

(Fortsettes på side 3.)

c)

$$
\begin{aligned}
Z\{x[n] * h[n]\} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \big(x[n] * h[n]\big) z^{-n} \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \Big(\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[n-k]\, h[k] \Big) z^{-n} \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n-k]\, z^{-n} \qquad\qquad m = n - k \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]\, z^{-m}\, z^{-k} \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]\, z^{-k} \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]\, z^{-m} \\
&= \underline{\underline{H(z)\, X(z)}}
\end{aligned}
$$

Denne egenskapen er først og fremst veldig nyttig med tanke på (det holder å ha nevnt ett av disse):

- **Det regnetekniske**. Manuell regning av konvolusjon er ikke lett, mens multiplikasjon av z-transformerte uttrykk (forskjellige polynomer) og transformering til og fra z-domenet er ofte overkommelig.
- **Beregningsbyrde**. Konvolusjon av to N lange sekvenser i tid gir i størrelsesorden N^2 antall operasjoner, mens å gange sammen to like lange sekvenser i z-/frekvensdomenet gir bare i størrelsesorden N operasjoner. Dette er ikke hele sannheten, da vi også må transformere til og fra z-/frekvensdomenet, men man ender med noe mye mindre beregningstungt alikevel.
- **Filter design og inspeksjon**. All filtering i tid uttrykkes som en konvolusjon av signalet med filterets impulsrespons. Multiplikasjons-egenskapen gjør at vi kan designe slike filtre ved å plassere ut poler og nullpunkt i z-domenet, multiplisere de sammen og invers z-transformere for å finne impulsresponsen til filteret.

Oppgave 2

Vi har to hovedtyper filtre: FIR og IIR.

a) Hva står disse akronymene for, og hvordan er disse filtrene fundamentalt forskjellige? Sammenlign impulsrespons, stabilitet, kausalitet og filterets ytelse mtp. amplitude- og faserespons. 2 p.

(Fortsettes på side 4.)

b) Nevn fire hovedtypene FIR filtre som gir eksakt lineær fase, og skissér magnituderesponsen til de forskjellige typene. Hvilke begrensninger gjelder når vi ønsker å implementere lavpass-, høypass-, båndpass- eller båndstoppfiltre? 1 p.

c) Fire hovedtyper IIR filtre er Butterworth, Chebyshev type 1 og 2, og elliptiske filtre. Hva kjennetegner disse filtrene? Sammenlign magnituderesponsen i passbånd, stoppbånd og transisjonsbånd. Hvilket filter gir raskeste overgang fra transisjonsbånd til stoppbånd? 1 p.

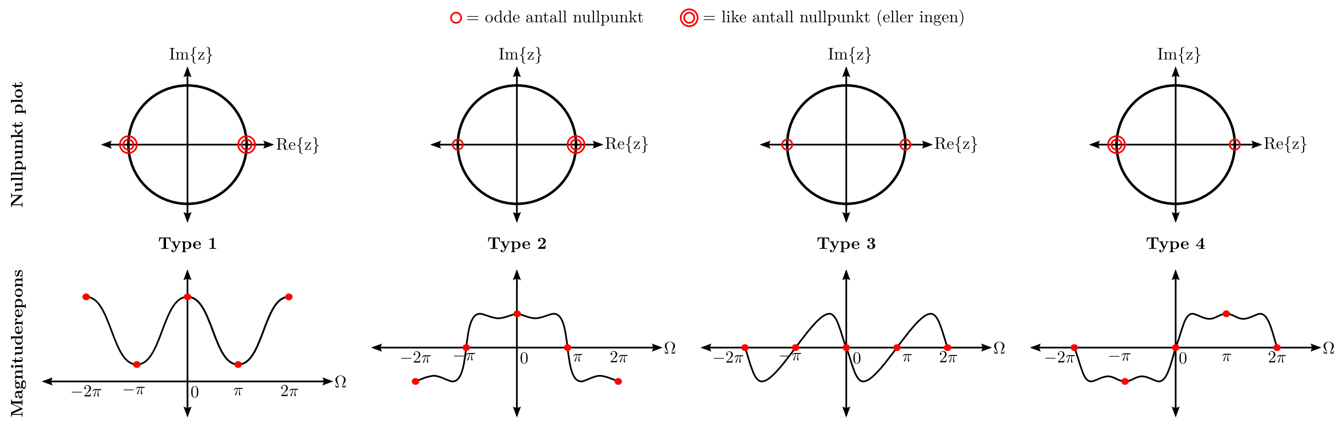
Svar:

a)
- **Fundamental forskjell**. I et FIR filter er utgangen bare en funksjon av inngangsverdier. I et IIR filter er utgangen en funksjon av både inngangs- og utgangsverdier.
- **Impuls respons**. FIR (finite impulse response) har en impulsrespons av endelig lengde. IIR (infinite impulse response) har en uendelig impulsrespons.
- **Stabilitet**. FIR er alltid stabilt, IIR kan være ustabilt (hvis enhentssirkelen ikke er i ROC).
- **Kausalitet**. Begge filtertyper kan være kausale, anti-kausale, eller begge deler. FIR er kausal hvis $h[n] = 0$ for $n < 0$, antikausal hvis $h[n] = 0$ for $n > 0$, og begge deler ellers. IIR er kausal hvis ROC: $|z| > \alpha$, antikausal hvis ROC: $|z| < \beta$, og begge deler hvis ROC: $\alpha < |z| < \beta$.
- **Filterytelse**. IIR trenger vesentlig færre filterkoeffisienter for å oppnå samme magnituderespons som FIR. FIR kan alltid designes med eksakt lineær fase, det kan det være vanskelig å få til med IIR.

b)
- **Type 1**. Likesymmetri og odde lengde. Ingen begrensninger for $H(0)$ og $H(\pi)$, kan derfor brukes til alle filtre.
- **Type 2**. Likesymmetri og like lengde. Her er $H(\pi) = 0$, så denne kan vi ikke bruke for å lage HP filtre, eller BP/BS filtre med en respons ulik 0 i $\Omega = \pi$.
- **Type 3**. Oddesymmetri og odde lengde. Her er $H(0) = H(\pi) = 0$, så dette passer verken til LP eller HP filtre, kanskje egentlig bare for BP filtre. Den er derimot ofte brukt som båndbegrenset differensiator eller Hilbert filter.
- **Type 4**. Oddesymmetri og like lengde. Her er $H(0) = H(\pi) = 0$, og kan derfor ikke brukes til LP eller som BP/BS med respons ulik 0 i $\Omega = 0$. Denne typen egner seg bra som differensiator eller Hilbert filter.

  Verdt å merke seg er at siden man kan gå fra LP↔HP, og sette disse sammen for å lage BP/BS, så kan man alltids trikse seg til ønsket filterfunksjon uansett hvem av disse typene man bruker.

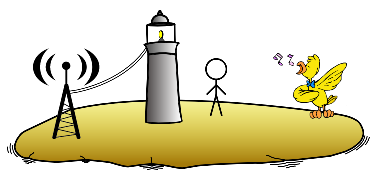
(Fortsettes på side 5.)

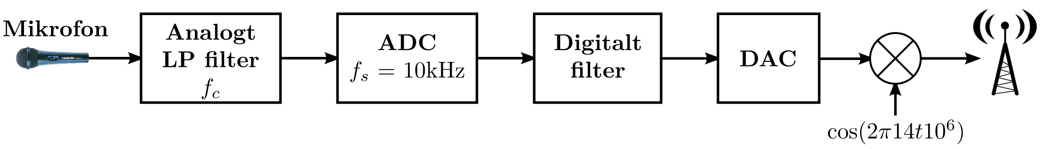


c)
- **Butterworth**. Utledet ved å kreve at alle deriverte til $|H(\Omega)|$ opp til og med orden $2N-1$ skal være 0. Blir derfor "maksimalt flat" i passbåndet, men betaler for dette med stor transisjonsbredde til stoppbånd.
- **Chebyshev type 1/2**. Definert ved hjelp av Chebyshev polynomer. Type 1 tillater lik rippel i passbånd, men ikke i stoppbånd. Type 2 tillater lik rippel i stoppbånd, men ikke i passbånd. Ved å tillate rippel får disse filterne smalere transisjonsbredde enn Butterworth.
- **Elliptiske filtre**. Uttrykkes ved Jacoby elliptiske funksjoner. Har lik rippel i både pass- og stoppbånd (ekvirippel). Har den smaleste transisjonsbredden av samtlige IIR filtre.

Oppgave 3

Du er bosatt i et fyrtårn på en øy. For å kunne kommunisere med folk har du kjøpt en digital amatørradio som byggesett. Vedlagt ligger det en skisse for hvordan delene skal kobles sammen:





der LP står for lavpass, ADC er en analog-til-digital omformer, DAC er en digital-til-analog omformer, f_c er kuttfrekvens og f_s er samplingsfrekvens.

a) Forklar kort hva slags funksjon de forskjellige komponentene har, men ignorér det digitale filteret (dette er tema i oppgave **b**). Hva tror du er mest sannsynlig, at ADC og DAC er 1 bit, 10 bit eller 24 bit? Hvorfor sampler vi på 10 kHz, og ikke på vesentlig høyere (eller lavere) frekvens? Hvilke krav stilles til lavpassfilterets kuttfrekvens f_c, og hva kunne det vært fornuftig å sette denne til i dette tilfellet? 2 p.

(Fortsettes på side 6.)

På øya er det en fugl som bråker, og som forstyrrer kommunikasjonen med de du snakker med. Derfor implementeres et digitalt Notch-filter som såvidt fjerner alt fuglekvitteret:

$$H(z) = \frac{(z - e^{j\pi/4})(z - e^{-j\pi/4})}{(z - 0.95e^{j\pi/4})(z - 0.95e^{-j\pi/4})}$$

Båndbredden Ω_Δ til Notch-filteret kan her finnes ved å benytte følgende tommelfingerregel: $R = 1 - 0.5\Omega_\Delta$, der R er absoluttverdien til notch-filterets poler.

b) Tegn opp poler og nullpunkter for dette filteret. 1 p.

c) Hva slags senterfrekvens og båndbredde har fuglesangen? Vil filteret påvirke talekvaliteten nevneverdig? 1 p.

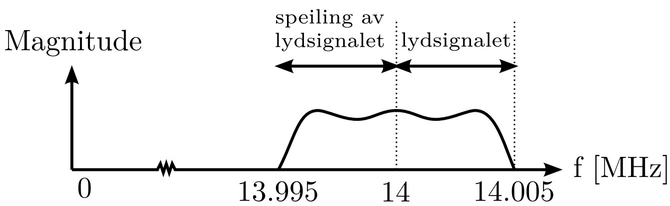
Svar:

a)
- **Lavpassfilter**. Nå vi skal sample lyden fra en mikrofon må vi overholde Nyquist-/samplingsteoremet - dvs. sample på mer enn 2 ganger den høyeste frekvensen i lydsignalet (evt. 2 ganger båndbredden i signalet). Dette sørger vi for ved å filtrere lyden fra mikrofonen med et lavpassfilter der kuttfrekvensen $f_c < \frac{f_s}{2}$.
- **ADC**. Sampler det analoge signalet med en frekvens lik f_s og kvantiserer disse samplene med en eller annen nøyaktighet. 1-bits kvantisering gir en nøyaktighet på $2^1 = 2$ mulige nivåer, 10 bits gir $2^{10} = 1024$ mulige nivåer og 24 bit gir $2^{24} \approx 16 \cdot 10^6$ mulige nivåer. I praksis holder 10 bit for å gjengi bra talekvalitet, og 16 bit er musikkvalitet på CD. 24 bit er høyoppløselig musikkvalitet for f.eks. studio, og er derfor litt overdrevet for denne anvendelsen.
- **DAC**. Tar det kvantiserte - og evt. digitalt filtrerte - signalet og gjenskaper et analogt signal som vi kan sende ut i verden. Vi velger gjerne en DAC med samme antall bit som ADC-en.
- **Modulering** (bonus spørsmål). Når vi ganger sammen to komplekse signaler så multipliseres amplitudene og frekvensene adderes. I denne oppgaven har vi reelle signaler så da får vi imidlertid et symmetrisk frekvensbånd, dvs. at i tillegg til å få summert frekvensene så får man også differansen mellom dem ("beat frekvens"). Dette kan vi vise matematisk (bare for moro skyld), f.eks. kan vi kalle lydsignalet $s(t) = A_s \cos(\omega_s t)$ og moduleringssignalet $m(t) = \cos(\omega_m t)$. Når vi ganger dem sammen får vi:

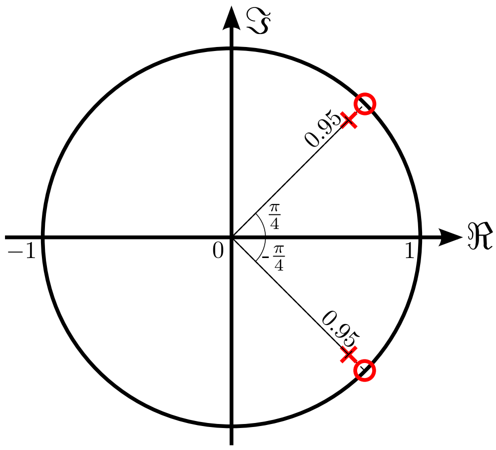
$$\begin{aligned}
\mathrm{s}(t)\,\mathrm{m}(t) &= A_s \cos(\omega_s t)\cos(\omega_m t) \\
&= A_s \frac{1}{2}\left(e^{j\omega_s t} + e^{-j\omega_s t}\right)\frac{1}{2}\left(e^{j\omega_m t} + e^{-j\omega_m t}\right) \\
&= A_s \frac{1}{4}\left(e^{j(\omega_s+\omega_m)t} + e^{-j(\omega_s-\omega_m)t}\right) \\
&= A_s \cos(\omega_s + \omega_m) + A_s \cos(\omega_s - \omega_m)
\end{aligned}$$

(Fortsettes på side 7.)

Hvis vi valgte lavpassfilterets kuttfrekvens lik $f_c = \frac{f_s}{2} = 5\text{kHz}$, så ender vi opp med noe slikt:



b)



c) Senterfrekvensen til Notch-filteret - og dermed også fuglesangen - finner vi ut fra vinkelen der poler og nullpunkt ligger:

$$\Omega = 2\pi F = 2\pi \frac{f}{f_s} = \frac{\pi}{4} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{f = \frac{f_s}{8} = 1.25\,\text{kHz}}}.$$

Båndbredden finner vi fra nevnte formel:

$$R = 1 - 0.5\Omega_\Delta$$
$$\Downarrow$$
$$\Omega_\Delta = -\frac{R-1}{0.5} = -\frac{0.95-1}{0.5} = \frac{0.05}{0.5} = \underline{\underline{0.1 \text{ [rad/sample]}}}$$
$$= 2\pi \frac{f_\Delta}{f_s} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{f_\Delta = 159\,\text{Hz}}} \text{ (ikke forventet nøyaktig uten kalkulator)}$$

Siden det her ikke var spesifisert om båndbredden gitt av Ω_Δ var relativ (dvs. gitt i forhold til f_s) eller absolutt (dvs. gitt i [rad/sampel]) så godkjennes begge svar.

Notchfilteret fjerner altså et 159 Hz frekvensbånd sentrert i 1.25 kHz. Selv om dette er midt i talebåndet så er det et såpass smalt frekvensbånd at det ikke bør påvirke talesignalet mye. Spørsmålet er bare hva som er verst, fuglekvitteret eller tap av talekvalitet?

(Fortsettes på side 8.)

Oppgave 4

Vi har gitt et kausalt filter som er beskrevet av differensligningen:

$$y[n] = c\,y[n-1] + (1-c)\,x[n] \qquad c \in \mathbb{R} \quad \text{og} \quad 0 < c < 1.$$

a) Tegn flytdiagram for filteret direkte etter denne ligningen. 1 p.

b) Vis at systemfunksjonen til filteret er gitt ved

$$H(z) = \frac{1-c}{1-c\,z^{-1}}.$$

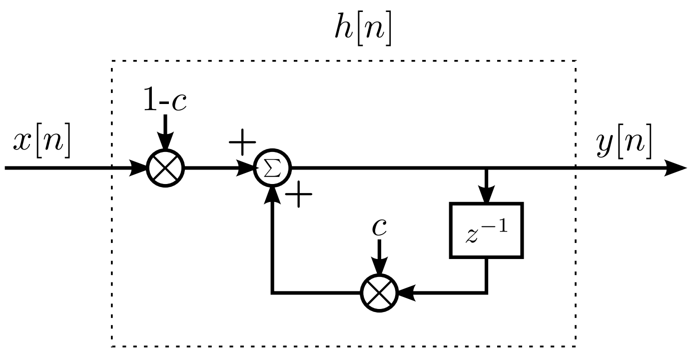
1 p.

c) Anta at vi påtrykker et enhetssprang, $x[n] = u[n]$. Finn først z-transformen $Y(z)$ til utgangssignalet $y[n]$, for så å finne $y[n]$ ved hjelp av delbrøksoppspalting og invers z-transform. 1 p.

d) Vis at $\lim\limits_{n\to\infty} y[n] = 1$. Kan du finne dette svaret også direkte fra $H(z)$? 1 p.

Svar:

a)



b)

$$y[n] = c\,y[n-1] + (1-c)\,x[n]$$
$$\updownarrow z$$
$$Y(z) = c\,Y(z)\,z^{-1} + (1-c)\,X(z)$$
$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \underline{\underline{\frac{1-c}{1-c\,z^{-1}}}}$$

c) Vi starter med å finne uttrykket for $Y(z)$:

$$X(z) = U(z) = \frac{z}{z-1} = \frac{1}{1-z^{-1}}$$
$$Y(z) = H(z)\,X(z) = \frac{1-c}{(1-c\,z^{-1})(1-z^{-1})} = \frac{z^2(1-c)}{(z-c)(z-1)}$$

(Fortsettes på side 9.)

Deretter delbrøksoppspalter vi. For å kunne gjøre dette må vi redusere orden i teller med 1 slik at den blir mindre enn orden i nevner:

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{z(1-c)}{(z-c)(z-1)} = \frac{A}{z-c} + \frac{B}{z-1} \qquad \Big| \cdot (z-c)(z-1)$$

$$z(1-c) = A(z-1) + B(z-c)$$

Siden dette er et ryddig ligningssett med kun to ukjente, kan vi finne den ene ved å "nulle ut" den andre:

$$\text{Innsatt } z = c: \quad c(1-c) = A(c-1) + B(c-c) \quad \Rightarrow A = \frac{1-c}{c-1} = -c$$

$$\text{Innsatt } z = 1: \quad 1(1-c) = A(1-1) + B(1-c) \quad \Rightarrow B = \frac{1-c}{1-c} = 1$$

Så vi har altså at:

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{z(1-c)}{(z-c)(z-1)} = \frac{-c}{z-c} + \frac{1}{z-1} = \frac{z^{-1}}{1-z^{-1}} - \frac{cz^{-1}}{1-cz^{-1}}$$

med tilhørende kjente invers transform:

$$y[n] = u[n] - c\,c^n\,u[n] = \underline{\underline{(1-c^{n+1})\,u[n]}}$$

d) Her skulle oppgaven egentlig spesifisert at fortsatt så var $x[n] = u[n]$. Derfor blir den ikke bedømt, men de som har gjort et godt forsøk får en bonus.

Siden $|c| < 1$ har vi at:

$$\lim_{n\to\infty} y[n] = \lim_{n\to\infty} (1-c^{n+1})\,u[n] = \underline{\underline{1}}$$

Her kunne vi også brukt sluttverditeoremet til z-transformen:

$$\begin{aligned} y[\infty] &= \lim_{z\to 1} (z-1)\,Y(z) \\ &= \lim_{z\to 1} (z-1)\,\frac{z^2(1-c)}{(z-c)(z-1)} \\ &= \lim_{z\to 1} \frac{z^2(1-c)}{(z-c)} \\ &= \underline{\underline{1}} \end{aligned}$$

Alternativt vet vi at $\lim_{n\to\infty} x[n] = \lim_{n\to\infty} u[n] = 1$, så er dette en DC. Systemets respons til en DC verdi får vi når vi evaluerer $H(z)$ i $z = 1$. Altså:

$$H(z=1) = \frac{1-c}{1-c} = \underline{\underline{1}}$$

Asymptotisk blir utgangen produktet av de to, altså 1.

(Fortsettes på side 10.)

Oppgave 5

Et allpass-system har formen:

$$H(z) = \frac{z^{-1} - a}{1 - a\,z^{-1}} \qquad\qquad a \in \mathbb{R}$$

a) Finn poler og nullpunkter for $H(z)$. 1 p.

b) Vis at $|H(\Omega)| = 1$ for alle Ω. 1 p.

c) Vis at $\angle H(\Omega) = \pm\pi$ når $\Omega = \pi$. 1 p.

d) Vis at for $0 < a < 1$ så er $\angle H(\Omega)$ negativ for alle Ω. 1 p.

Svar:

a) Ved å skrive om $H(z)$ litt ser vi at $\underline{\underline{p_1 = a}}$ og $\underline{\underline{z_1 = \frac{1}{a}}}$:

$$H(z) = \frac{z^{-1} - a}{1 - a\,z^{-1}} = \frac{1 - a\,z}{z - a} = \frac{a(\frac{1}{a} - z)}{z - a}$$

b) Hvis $|H(e^{j\Omega})| = 1$ så må også $|H(e^{j\Omega})|^2 = 1$:

$$\begin{aligned}
|H(e^{j\Omega})|^2 &= H(e^{j\Omega})\,H^*(e^{j\Omega}) \\
&= \frac{1 - a\,e^{j\Omega}}{e^{j\Omega} - a}\,\frac{1 - a\,e^{-j\Omega}}{e^{-j\Omega} - a} \\
&= \frac{1 - a\,e^{j\Omega} - a\,e^{-j\Omega} + a^2}{1 - a\,e^{j\Omega} - a\,e^{-j\Omega} + a^2} = \underline{\underline{1}} \qquad\qquad \text{Q.E.D.}
\end{aligned}$$

c) Å kunne litt kompleks tallteori holder her:

$$\begin{aligned}
H(e^{j\pi}) &= \frac{1 - a\,e^{j\pi}}{e^{j\pi} - a} = -\frac{1 + a}{1 + a} = -1 \\
\angle H(e^{j\pi}) &= \angle -1 = \underline{\underline{\pm\pi}}
\end{aligned}$$

d) Denne oppgaven utgår (men bonus utdeles til de som har prøvd) da fasen her slettes ikke alltid er negativ, bare for positive frekvenser. Den enkleste måten å se dette på er å innse at for allpass filtre er teller og nevner komplekskonjugerte størrelser:

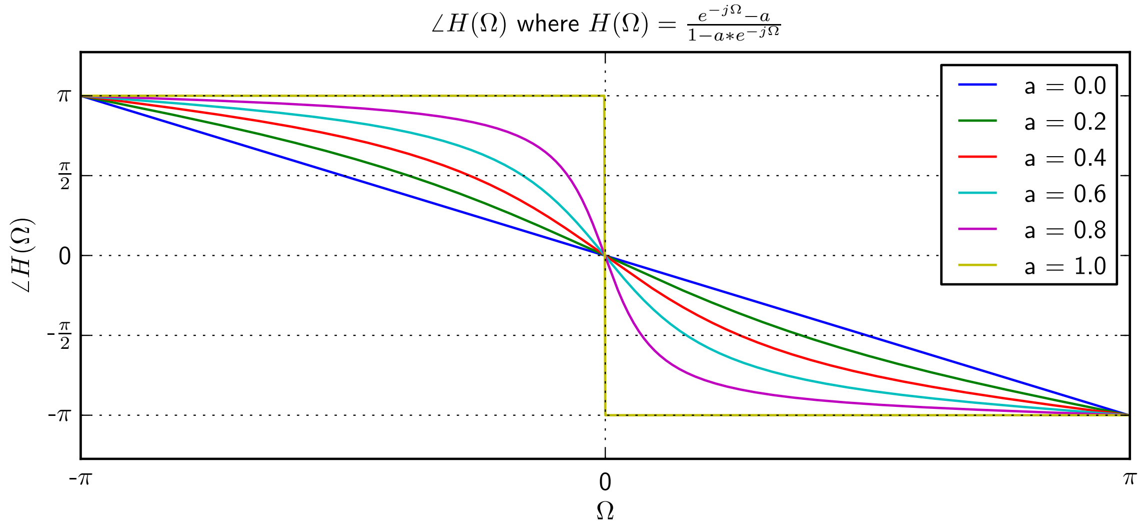
$$H(e^{j\Omega}) = \frac{1 - a\,e^{j\Omega}}{e^{j\Omega} - a} = \frac{\left(e^{-j0.5\Omega} - a\,e^{j0.5\Omega}\right)e^{j0.5\Omega}}{\left(e^{j0.5\Omega} - a\,e^{-j0.5\Omega}\right)e^{j0.5\Omega}} = \frac{e^{-j0.5\Omega} - a\,e^{j0.5\Omega}}{e^{j0.5\Omega} - a\,e^{-j0.5\Omega}}$$

(Fortsettes på side 11.)

Dermed må fasen hele uttrykket være lik 2 ganger fasen til telleren:

$$
\begin{aligned}
\angle H(e^{j\Omega}) &= \angle\left[\frac{e^{-j0.5\Omega} - a\,e^{j0.5\Omega}}{e^{j0.5\Omega} - a\,e^{-j0.5\Omega}}\right] \\
&= 2\angle\left[e^{-j0.5\Omega} - a\,e^{j0.5\Omega}\right] \\
&= 2\angle\left[(1-a)\cos 0.5\Omega - j(1+a)\sin 0.5\Omega\right]
\end{aligned}
$$

Her kan man se at $(1-a) < 0$ og at $(1+a) > 0$ for $a \in [0,1]$. Dette gir negativt imaginær-ledd og dermed negativ fase for alle positive frekvenser ($\Omega \in [0,\pi]$), men positiv fase for negative frekvenser. Et plott bekrefter dette:



Se for øvrig side 256 i læreboka der dette allpass filteret er diskutert i større detalj (eneste forskjellen fra det eksempelet er at $a = -\alpha$).

Formelsamling

Grunnleggende sammenhenger:

$$\begin{aligned}
\sin(\alpha \pm \beta) &= \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta \\
\cos(\alpha \pm \beta) &= \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta \\
\sin 2\alpha &= 2\sin\alpha\cos\alpha \\
\cos 2\alpha &= \cos^2\alpha - \sin^2\alpha \\
\sin\alpha + \sin\beta &= 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \\
\sin\alpha - \sin\beta &= 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2} \\
\cos\alpha + \cos\beta &= 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \\
\cos\alpha - \cos\beta &= -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2} \\
\cos^2\alpha + \sin^2\alpha &= 1 \\
\cos\alpha &= \frac{1}{2}(e^{\jmath\alpha} + e^{-\jmath\alpha}) \\
\sin\alpha &= \frac{1}{2\jmath}(e^{\jmath\alpha} - e^{-\jmath\alpha}) \\
\sum_{n=0}^{N-1} a^n &= \begin{cases} N & \text{for } a = 1 \\ \frac{1-a^N}{1-a} & \text{ellers} \end{cases} \\
ax^2 + bx + c = 0 &\Leftrightarrow x_{\pm} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}
\end{aligned}$$

Diskret konvolusjon:

$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[n-k]h[k] = h[n] * x[n]$$

Diskret-tid Fouriertransformasjon (DTFT):

$$\begin{aligned}
\text{Analyse:} \qquad X(\Omega) &= = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-\jmath\Omega n} \\
\text{Syntese:} \qquad x[n] &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(\Omega)e^{\jmath\Omega n}d\Omega
\end{aligned}$$

Diskret Fouriertransformasjon (DFT):

$$\begin{aligned}
\text{Analyse:} \qquad X[k] &= \sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-\jmath 2\pi kn/N}, \quad 0 \le k \le N-1 \\
\text{Syntese:} \qquad x[n] &= \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X[k]e^{\jmath 2\pi kn/N}, \quad 0 \le k \le N-1
\end{aligned}$$

z-transformasjonen:

$$\text{Analyse:} \qquad X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n}$$