

# UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i                    INF3470 — Digital signalbehandling

Eksamensdag:            12. desember 2013

Tid for eksamen:        14.30–18.30

Oppgavesettet er på 15 sider.

Vedlegg:                    Ingen

Tillatte hjelpemidler:  Ingen

Kontroller at oppgavesettet er komplett før  
du begynner å besvare spørsmålene.

**Svar:**

**Løsningsforslag, 3/1-2014:**

## Oppgave 1    $z$ -transformen

- a) Finn  $z$ -transformen og tilhørende Region of Convergence (ROC) til den tosidede datasekvensen:

$$x[n] = \begin{cases} a^n & \text{for } n \geq 0, \\ -b^n & \text{for } n < 0, \end{cases} \quad n \in \mathbb{Z},$$

der  $n \in \mathbb{Z}$  betyr at  $n$  er heltall.

1 p.

- b) En impulsrespons  $h[n]$  har  $z$ -transformen:

$$H(z) = \frac{1 + z^{-1}}{(1 - 2z^{-1})(1 - 0.5z^{-1})}.$$

Tegn poler og nullpunkt for denne transformen.

1 p.

- c)  $H(z)$  i **b)** kan være kausal, anti-kausal, eller tosidig. Skisser de fire (og ikke tre) mulighetene en da får for ROC, og avgjør hvilke av disse som eventuelt er stabile.

2 p.

- d) Hvorfor er det så viktig at et filter er stabilt?

1 p.

- e) En av  $z$ -transformens egenskaper omhandler tidsreversering:

$$\text{Hvis } x[n] \xleftrightarrow{\mathcal{Z}} X(z) \quad \text{med ROC: } r_1 < |z| < r_2$$

$$\text{så er } x[-n] \xleftrightarrow{\mathcal{Z}} X(z^{-1}) \quad \text{med ROC: } 1/r_2 < |z| < 1/r_1.$$

(Fortsettes på side 2.)

Bruk definisjonen til  $z$ -transformen for å vise at dette stemmer. Hvordan påvirkes  $X(z)$  hvis  $x[n]$  er symmetrisk?

1 p.

**Svar:**

- 1a) Siden  $z$ -transformen er lineær kan vi transformere de to leddene hver for seg:

$$\begin{aligned}
 x[n] &= a^n u[n] - b^n u[-n-1] \\
 X(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] z^{-n} \\
 &= \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n}}_{X_a(z)} + \underbrace{\sum_{n=-1}^{-\infty} b^n z^{-n}}_{X_b(z)} \\
 X_a(z) &= 1 + a^1 z^{-1} + a^2 z^{-2} + \dots &= \begin{cases} \frac{1}{1-az^{-1}} & \text{når } |z| > |a|, \\ \infty & \text{ellers.} \end{cases} \\
 X_b(z) &= -b^{-1}z - b^{-2}z^2 + \dots &= \begin{cases} \frac{-b^{-1}z}{1-b^{-1}z} = \frac{1}{1-bz^{-1}} & \text{når } |z| < |b|, \\ \infty & \text{ellers.} \end{cases} \\
 X(z) &= X_a(z) + X_b(z) = \frac{1}{1-az^{-1}} + \frac{1}{1-bz^{-1}}
 \end{aligned}$$

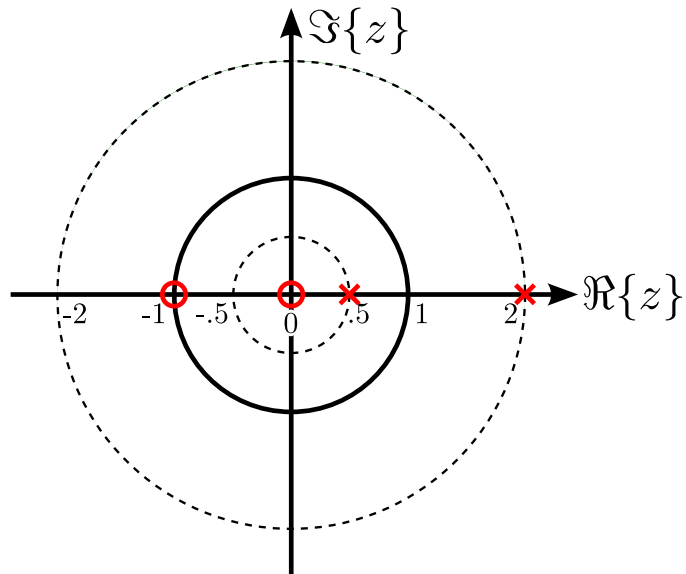
ROC:  $\text{ROC}_a \cap \text{ROC}_b$ :  $|a| < z < |b|$ .

Det er også helt greit om man her gjenkjenner  $X_a(z)$  og  $X_b(z)$  direkte uten å regne de ut.

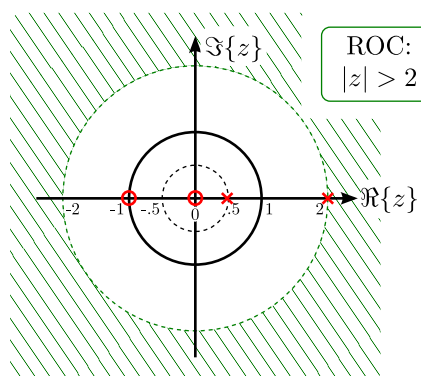
- 1b) Poler og nullpunkt kan vi lese rett fra uttrykket:

$$\begin{aligned}
 H(z) &= \frac{1+z^{-1}}{(1-2z^{-1})(1-0.5z^{-1})} && \left| \cdot \frac{z^2}{z^2} \right. \\
 &= \frac{z(z+1)}{(z-2)(z-0.5)}
 \end{aligned}$$

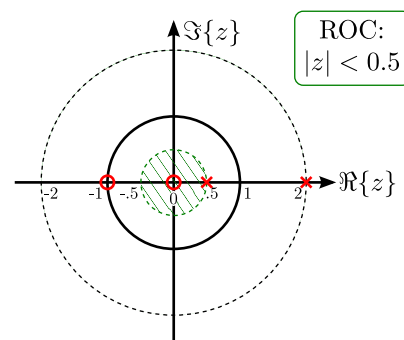
(Fortsettes på side 3.)



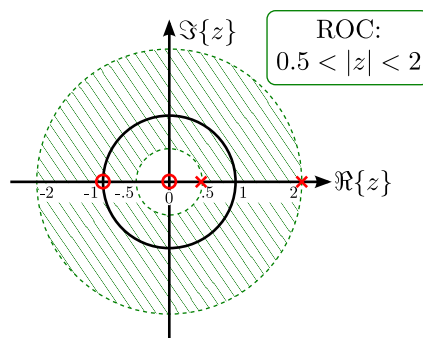
1c) De fire ROC mulighetene vi kan få er skissert under:



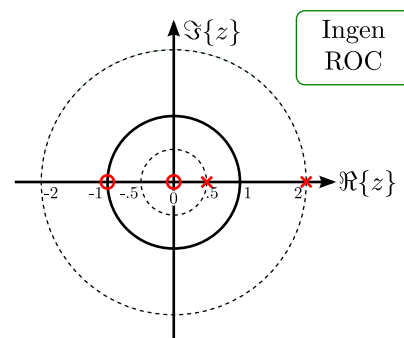
1. Alle poler i  $H(z)$  representerer kausale sekvenser.



2. Alle poler i  $H(z)$  representerer anti-kausale sekvenser.



3. Polen med minst absoluttverdi er kausal, den med størst er anti-kausal.



4. Polen med minst absoluttverdi er anti-kausal, den med størst er kausal.

Av disse er det kun alternativ 3 som er stabil, siden det er bare her vi får enhets sirkelen innhyllt i ROC.

1d) Stabilitet er som regel et krav skal filteret kunne gi reagere på en bestemt måte ved en gitt inngangsverdi. Er det stabilt vil en gitt inngangsverdi

(Fortsettes på side 4.)

gi en gitt utgangsverdi. Dette kalles gjerne bounded-input bounded-output (BIBO) stabilitet. Dette tilsvarer i  $z$ -domenet av enhetssirkelen ikke ligger i ROC, dvs. at frekvensresponsen (DTFTen) ikke finnes (evt. udefinert). Et ustabil filter vil ofte enten bare generere støy eller oscillere helt uavhengig av hva inngangssignalet måtte være. Man kan altså designe ustabile filtre for å generere signaler, men ikke for å filtrere dem.

- 1e) Tidsreversering:** Vi kan vise dette ved å gå fra tid til  $z$ -domenet, men man kunne også gjort motsatt.

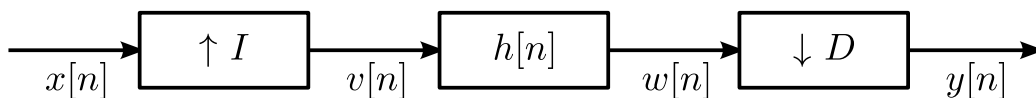
$$\begin{aligned} Z\{x[-n]\} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[-n] z^{-n} & m = -n \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m] (z^{-1})^{-m} = X(z^{-1}) = X\left(\frac{1}{z}\right) \end{aligned}$$

Hvis ROC:  $|z| > \alpha$ , blir den nye ROC:  $|z^{-1}| > \alpha$ , dvs.  $|z| < \alpha$ . Hvis

$$X(z) = \frac{z - z_0}{z - p_0} \quad \text{så er} \quad X(z^{-1}) = \frac{z^{-1} - z_0}{z^{-1} - p_0}.$$

Hvis  $x[n]$  er symmetrisk, altså at  $x[n] = \pm x[-n]$ , får vi også at  $X(z) = \pm X(1/z)$ . Dette gir resiproke par av poler/nullpunkt i  $z$ -domenet.

## Oppgave 2 Konvertering av samplerate



Figur 1: System for ratekonvertering

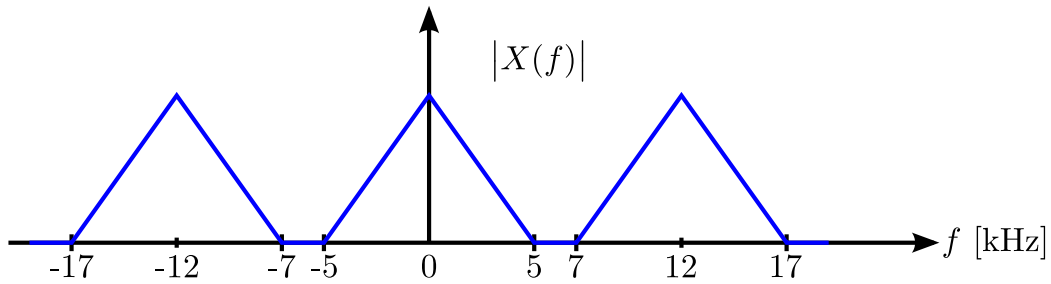
I figuren over er det vist et system for opp- og ned-sampling av diskrete signaler, såkalt ratekonvertering. Vi tenker oss at  $x[n]$  er samplet fra et kontinuerlig signal. Hvis for eksempel  $I = 2$  vil  $v[n]$  inneholde et ekstra null-sampel mellom hvert av samplene i  $x[n]$ .

Filteret  $h[n]$  er et perfekt lavpassfilter med knekkfrekvens  $f_c$  som er så stor som mulig uten at konvolveringsfeil (frekvens-aliasing) oppstår (dette betyr at  $f_c$  avhenger av  $I$ ).

Nedsampling foregår i siste filter. Hvis for eksempel  $D = 3$  vil  $y[n]$  bare inneholde hvert tredje sampel fra  $w[n]$ .

Kort sagt så vil systemet vist i Figur 1 endre samplingsfrekvensen fra  $f_s$  til  $(I/D)f_s$  der  $f_s$  er gitt i Hz. Anta at magnituderesponsen til inngangssignalet  $x[n]$  er som vist i Figur 2 (merk at spekteret ikke er angitt med normalisert frekvens) og at  $f_s = 12$  kHz.

(Fortsettes på side 5.)



Figur 2: Magnituderesponden til  $x[n]$

**2a**

Skisser frekvensspektra for  $v[n]$ ,  $w[n]$  og  $y[n]$ , samt magnituderesponden (inklusive knekkfrekvens) for  $h[n]$  i følgende to tilfeller:

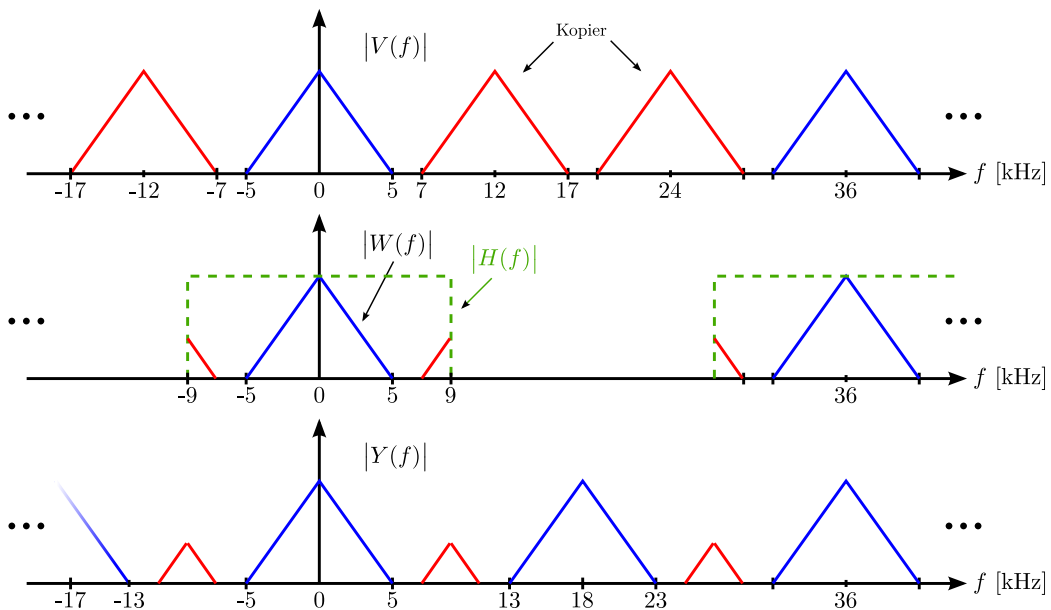
1.  $I = 3, D = 2$ . 1 p.
2.  $I = 2, D = 3$ . 1 p.

**2b**

Hvordan må forholdet  $I/D$  være for at  $x[n]$  skal kunne gjenvinnes eksakt fra  $y[n]$ ? 1 p.

**Svar:**

**2a) 1.  $I = 3, D = 2$ :**

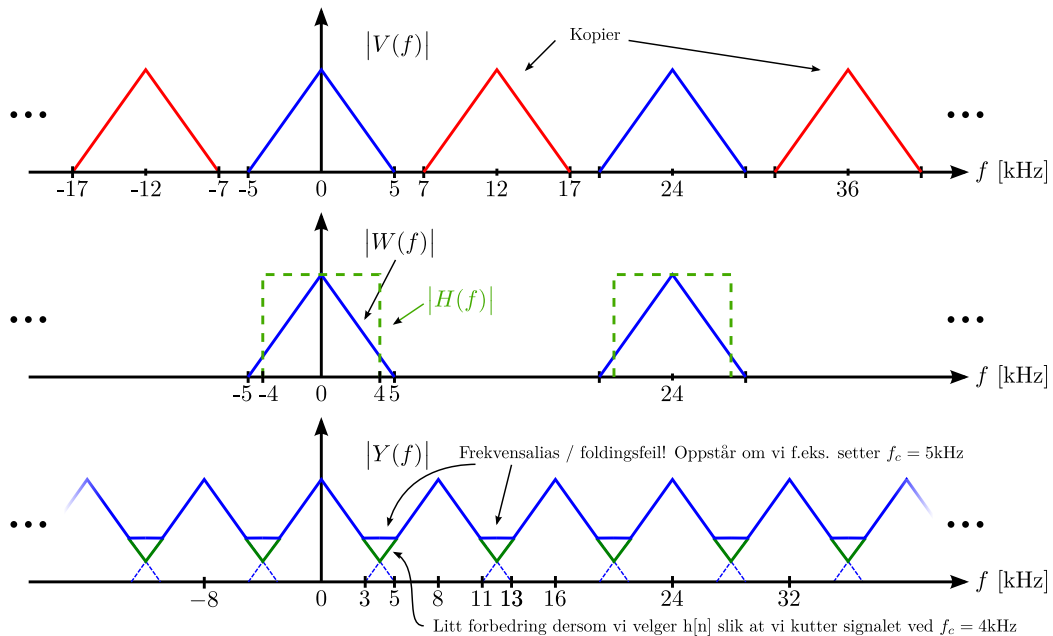


I oppgaven burde spesifikasjonen av  $f_c$  vært noe tydeligere. "Så stor som mulig uten aliasing" er vist i figuren over, men om det

(Fortsettes på side 6.)

velges en kutfrekvens som helt fjerner “kopiene” så er dette også et godt svar. Det er for så vidt også mulig å velge  $9 < f_c \leq 13$  og tillate aliasing i frekvensområdet  $f \in [5, 9]$ , dvs. der vi ikke har noe signal...

2.  $I = 2$ ,  $D = 3$ :



Her får vi aliasing, med mindre vi velger  $f_c \leq 4$  kHz men da kutter vi også i signalet vårt.

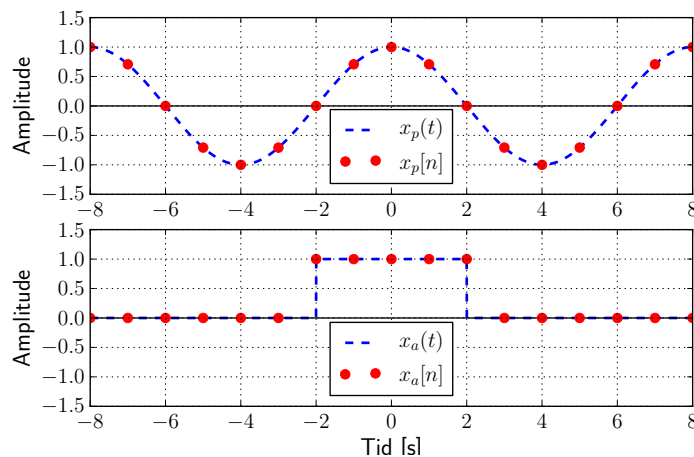
2b) Siden det er uutnyttet plass i frekvensspekteret fra 5 til 7 kHz er det rom for en liten nedsampling uten at det blir (frekvens) aliasing. Samplingsraten må uansett minst være 2x høyeste frekvens i signalet vårt, altså  $f_s \geq 2 \cdot 5 \text{ kHz} = 10 \text{ kHz}$ . Dette gir et forhold mellom  $I$  og  $D$  som må være:

$$\frac{I}{D} \geq \frac{10 \text{ kHz}}{12 \text{ kHz}} = \underline{\underline{\frac{5}{6}}}$$

### Oppgave 3 Signaler i tid og frekvens

Vi sampler et periodisk signal  $x_p(t)$  og får  $x_p[n]$ , og sampler et ikke-periodisk signal  $x_a(t)$  og får  $x_a[n]$ . Samplingsfrekvensen er 1 Hz. Alle signalene er vist i Figur 3:

(Fortsettes på side 7.)



Figur 3: To analoge signaler samples.

- a) Skisser magnituderesponsen til disse fire signalene, og sett minst en størrelse på både frekvensaksen og magnitudoaksen (i tillegg til 0 i origo). Hvilket symbol og hvilken enhet vil det være fornuftig å bruke på frekvensaksen i hvert tilfelle?

2 p.

I dette kurset har vi i hovedsak snakket om 3 transformer for digitale tids-signaler:

$$z\text{-transform: } X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] z^{-n}$$

$$\text{Diskret-tid Fourier transform (DTFT): } X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\Omega n}$$

$$\text{Diskret Fourier transform (DFT): } X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j2\pi \frac{k}{N} n}$$

- b) Hvilke(n) transform(er) ville du brukt i disse tilfellene (begrunn svaret!):

1 p.

1. Du har samlet et signal fra en mikrofon og ønsker å finne frekvensinnholdet til dette signalet. En datamaskin er tilgjengelig.
2. Du må designe et infinite impulse response (IIR) filter, mangler datamaskin, men har penn og papir?
3. Du ønsker å analytisk finne frekvensresponsen til en vindu.

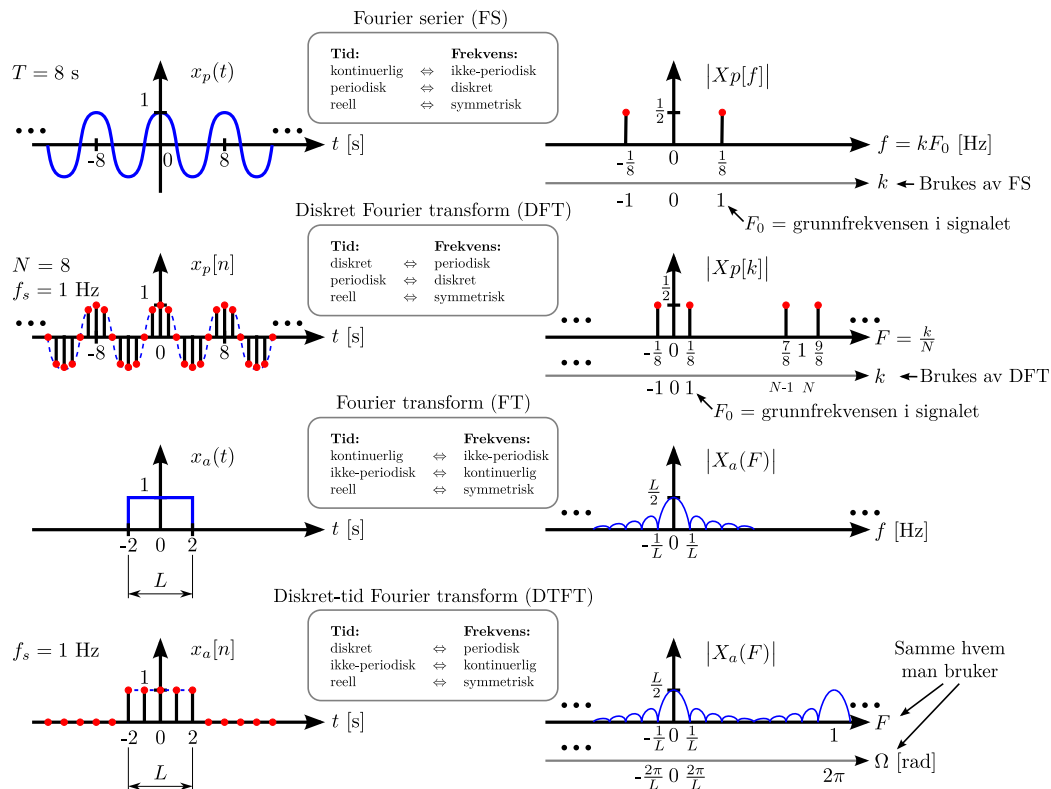
- c) Hvordan kan man finne DTFTen hvis man allerede har et uttrykk for  $z$ -transformen?

1 p.

**Svar:**

(Fortsettes på side 8.)

3a) Magnituderesponsene ser ut omtrent som de til høyre i figuren under:



Det er her en del valgfrihet rundt hva slags symbol og enhet man skal sette på aksene. Det mest fornuftige er likevel å bruke normaliserte frekvenser når man snakker om digitale frekvenser i tid, og absolutte frekvenser når man snakker om kontinuerlige signaler i tid. Når frekvensdomenet er diskret kan man også bruke heltall.

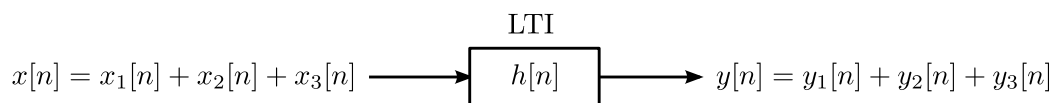
- 3b)
1. Et samplet signal fra en mikrofon vil typisk inneholde veldig mange sampler. For å analysere dette må vi bruke en datamaskin, og den eneste Fourier transformen en datamaskin kan håndtere er DFTen siden denne er definert for diskret tid og frekvens).
  2. Ved design av et IIR filter ville vi brukt  $z$ -transformen. Ved å plassere ut poler og nullpunkt i  $z$ -domenet kan vi designe ønsket(?) respons samt fortløpende sørge for at filteret er stabilt. Kan også brukes sammen med DTFTen.
  3. En vindusfunksjon er aperiodisk, noe både  $z$ -transformen og DTFTen kan håndtere. Er det frekvensresponsen man er ute etter kommer man raskest(?) til svaret med DTFT.
- 3c) Hvis man har et uttrykk for  $z$ -transformen og ønsker å finne DTFTen kan man bare substituere  $z = e^{j\Omega} = e^{j2\pi F}$ . Dette er det samme som å evaluere  $z$ -transformen langs enhets sirkelen i  $z$ -domenet.

(Fortsettes på side 9.)



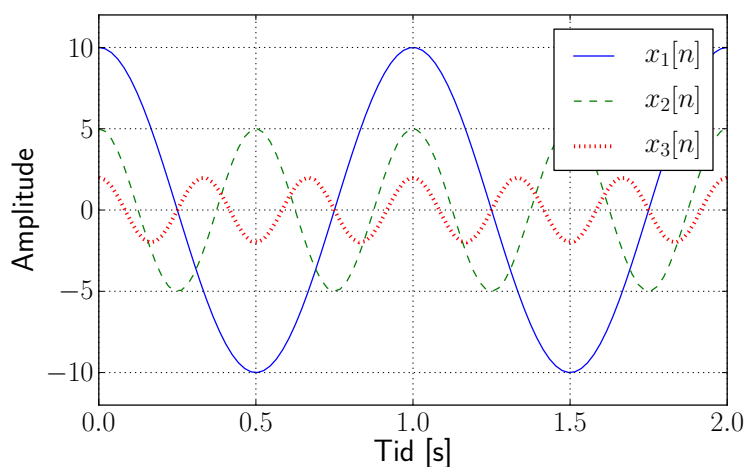
## Oppgave 4 Filtre

Et lineært og tidsinvariant (LTI) system filtrerer en sum av tre sinus-signaler:

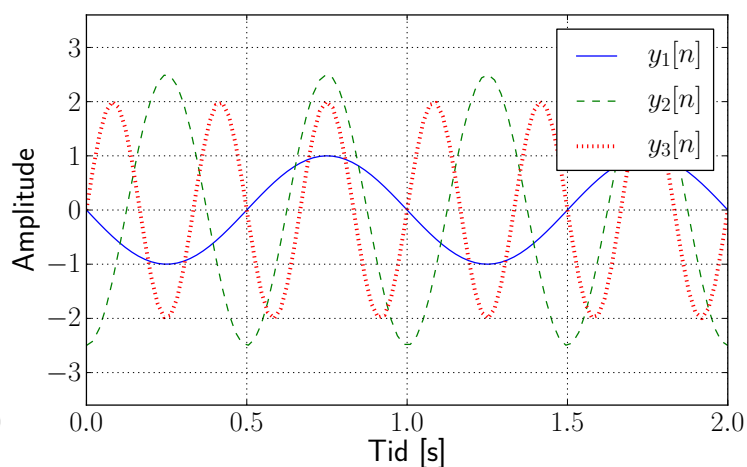


Figur 4: Et LTI system.

Hvordan disse signalene ser ut før og etter de har passert gjennom filteret er vist i Figur 5 og 6:



Figur 5: Plot av  $x_1[n]$ ,  $x_2[n]$ , og  $x_3[n]$ .



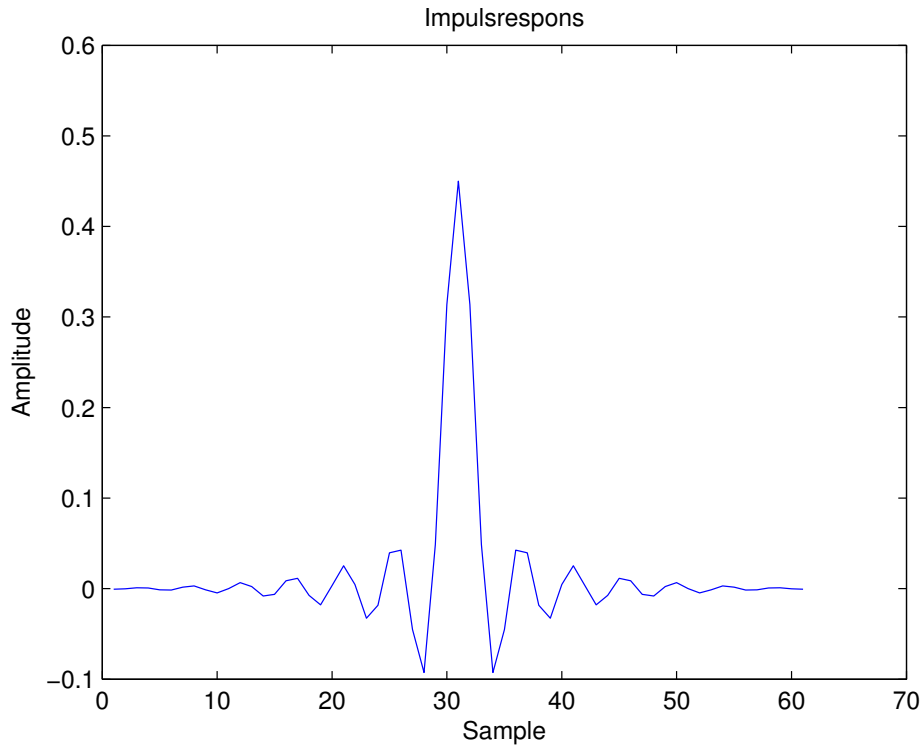
Figur 6: Plot av  $y_1[n]$ ,  $y_2[n]$ , og  $y_3[n]$ .

- a) Skisser magnitude- og faseresponsen til dette filteret. 1 p.
- b) Forklar forskjellen på fase- og gruppeforsinkelse, gjerne ved å bruke Figur 5 og 6 som eksempel. Finn også gruppeforsinkelsen til dette filteret: 1 p.

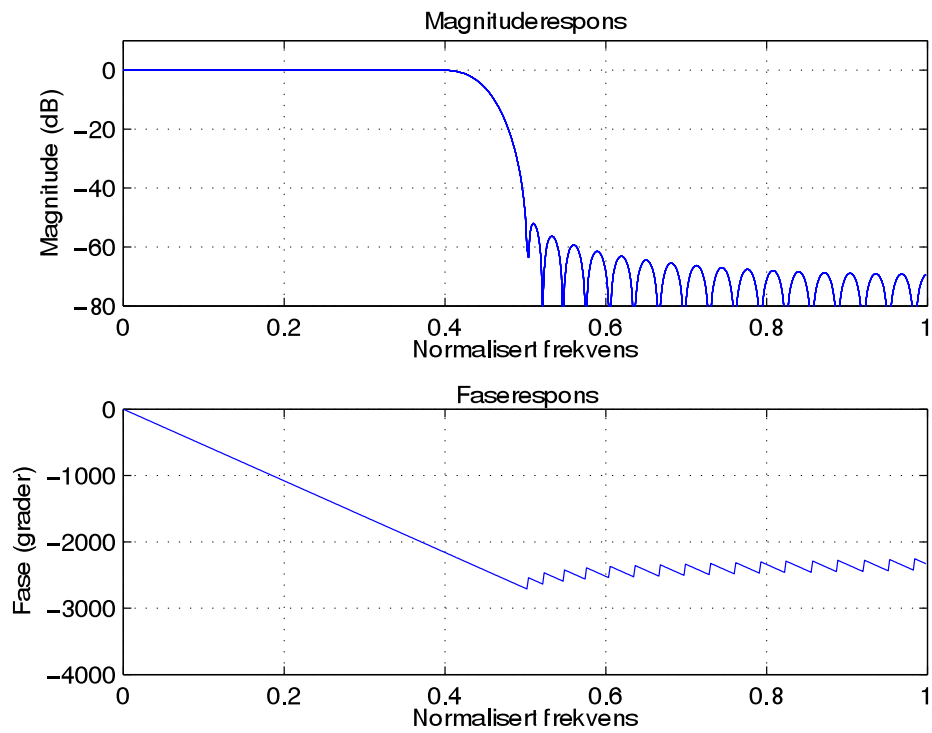
$$H(z) = \frac{\frac{1}{2}z + 1 + \frac{1}{2}z^{-1}}{z}$$

- c) Et annet filter har en impulsrespons som vist i Figur 7 og en frekvensrespons som vist i Figur 8. Er dette et FIR eller IIR filter? Argumenter godt for svaret ditt. 1 p.

(Fortsettes på side 10.)



Figur 7: Filterets impulsrespons.



Figur 8: Filterets frekvensrespons.

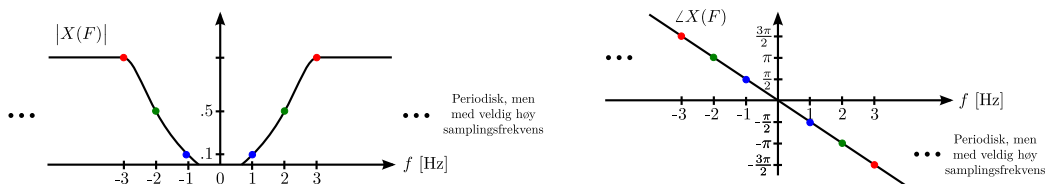
(Fortsettes på side 11.)

**Svar:**

- 4a) Det viktige å vite i denne oppgaven er at dersom vi har et LTI filter, og inngangssignalet et sinussignal, så vil vi ha at:

$$y[n] = H(F) x[n].$$

Dette betyr at den amplitudeforandringen som en sinus med en gitt frekvens får gjennom et filter må være lik filterets magnituderrespons ved denne frekvensen. Tilsvarende har vi at faseforandringen vil kunne fortelle oss noe om faseresponsen til filteret. Hvis vi f.eks. ser på 1 Hz sinusen (blå), så ser vi at denne dempes med en faktor 10, og den forskyves  $-\frac{\pi}{2}$ . Tilsvarende kan vi lese ut verdier for de andre frekvensene og får sampler i frekvensresponsen. Så gjetter vi på resten:



- 4b) Faseforsinkelse er den faseforskyvningen en frekvens får når den passerer gjennom et filter. Grupperforsinkelse er nesten det samme; det er et uttrykk for faseforsinkelsen til en vilkårlig (gruppe av) frekvens(er). Faseforsinkelsen er altså lik gruppeforsinkelsen innsatt en gitt frekvens.

Faseforsinkelse:

$$\tau_f(\Omega) = -\frac{\angle H(\Omega_0)}{\Omega_0}$$

Grupperforsinkelse:

$$\tau_g(\Omega) = -\frac{\angle H(\Omega)}{d\Omega}$$

For å finne gruppeforsinkelsen til nevnte filter finner vi først DTFTen:

$$\begin{aligned} H(\Omega) &= H(z) \Big|_{z=e^{j\Omega}} = \frac{\frac{1}{2}e^{j\Omega} + 1 + \frac{1}{2}e^{-j\Omega}}{e^{j\Omega}} \\ &= \frac{1 + \cos \Omega}{e^{j\Omega}} \\ &= \underbrace{(1 + \cos \Omega)}_{|H(\Omega)|} \cdot e^{-j\Omega} \quad \uparrow \quad \angle H(\Omega) \end{aligned}$$

Her kan vi lese rett ut hva faseresponsen er:

$$\angle H(\Omega) = -\Omega$$

(Fortsettes på side 12.)

Fasen til filteret er direkte proporsjonal med frekvensen! Det er dette som kalles eksakt lineær fase. Regner vi ut gruppeforsinkelsen nå ser vi at denne blir konstant:

$$\begin{aligned}\tau_g(\Omega) &= -\frac{d\angle H(\Omega)}{d\Omega} && \frac{[\text{rad}]}{[\text{rad/sampel}]} \\ &= -\frac{d}{dF}(-\Omega) \\ &= \underline{\underline{1}} && [\text{sampel}]\end{aligned}$$

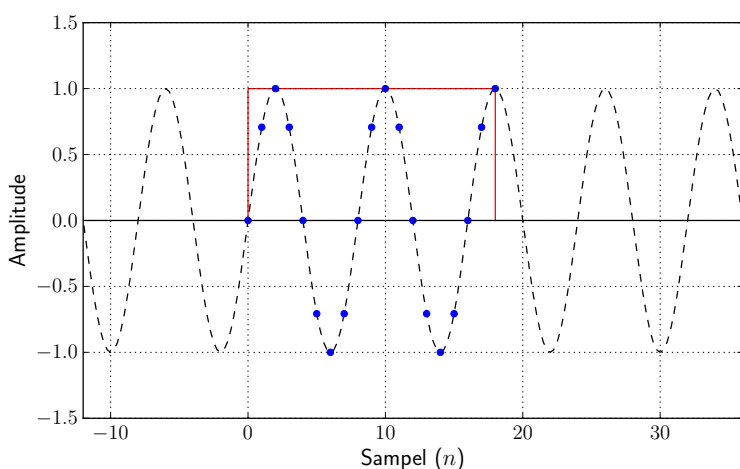
Til høyre har vi ført opp enhetene til faseresponsen (radianer) og til den normaliserte vinkelfrekvensen (radianer/sampel), så blir det litt lettere å se at gruppeforsinkelsen her er målt i antall sampler. I dette tilfellet blir altså alle frekvenser forsinket med nøyaktig ett sampel.

4b) Dette er et FIR filter, som vi kan se ut fra følgende:

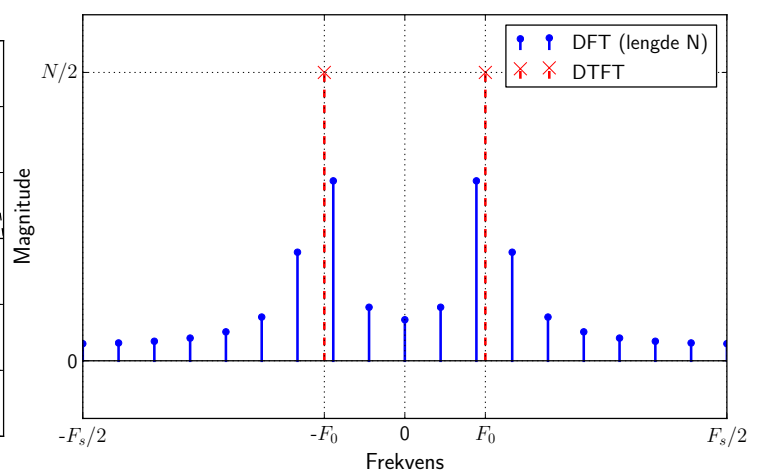
- Endelig lengde på impulsresponsen. Selve definisjonen på FIR.
- Symmetrisk impulsrespons. En nødvendighet for lineær fase. IIR kan ikke lages perfekt symmetriske, det bryter med kausalitet-sprinsippet.
- Eksakt lineær fase. Kun FIR kan ha eksakt lineær fase. Noen IIR filtre har tilnærmet lineær fase i visse deler av faseresponsen, men man ser fortsatt lett at det bare er tilnærmet.

Disse faktorene henger nært sammen; har man gitt en av disse så er de andre også gitt. Det holder derfor å argumentere for en av disse.

## Oppgave 5 DFT og DTFT



Figur 9: Et samplet datasignal.



Figur 10: Magnituden til DFT og DTFT av signalet i Figur 9.

(Fortsettes på side 13.)

Vi forsøker å benytte DFT for å beregne magnituderresponsen til det stiplede signalet i Figur 9. Resultatet er vist i Figur 10, der DTFTen også er tegnet inn (gir riktig resultat).

- a) Hvorfor gir ikke DFTen riktig magnituderrespons når DTFTen gjør det? 1 p.
- b) I Figur 9 er det valgt et rektangulært vindu. Hva hadde skjedd med DFTens resultat hvis vi i stedet hadde brukt et trekantet vindu med samme lengde? 1 p.
- c) Vi antar at vinduet i Figur 9 har lengde  $L$  og kan da beskrive det slik:

$$w[n] = u[n] - u[n - L]$$

Finn DTFTen  $W(\Omega)$  til dette vinduet. Hva skjer med hovedlobe-bredden og sidelobene når vinduets lengde  $L$  går mot uendelig? 1 p.

### Svar:

- a) På grunn av hvordan DFTen er definert vil den kun gi (helt) riktig resultat dersom man velger  $N$  slik DFTen summerer et helt antall perioder av signalet:

$$X_{\text{DFT}}[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j2\pi \frac{k}{N}n}$$

Det er ikke tilfellet i Figur 9 og det gir spektral lekkasje og glatting. DTFTen forutsetter imidlertid ikke at signalet må være periodisk; den summerer vilkårlig lange tidsserier:

$$X_{\text{DTFT}}(F) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j2\pi Fn}$$

- b) Hvis vi hadde brukt et triangulært vindu i stedet for the rektangulære, og disse hadde samme lengde, ville vi fått et mindre lekkasje/støy i magnituderresponsen, men også mindre oppløsning/detaljer. Dette er fordi vinduer som avtar mot kantene fjerner litt av problemet med at signalet ender brått midt i en periode, men gjør vinduet effektivt også litt mindre. DTFTen til et triangulært vindu har bredere hovedlobe men bedre undertrykkelse av sidelober enn det rektangulære vinduet.

(Fortsettes på side 14.)

c) Vi beregner DTFTen av vinduet:

$$\begin{aligned}
 W_{\text{DTFT}}(\Omega) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} w[n] e^{-j\Omega n} \\
 &= \sum_{n=0}^{L-1} e^{-j\Omega n} \\
 &= \frac{1 - e^{-j\Omega L}}{1 - e^{-j\Omega}} \\
 &= \frac{(e^{j\Omega \frac{L}{2}} - e^{-j\Omega \frac{L}{2}}) e^{-j\Omega \frac{L}{2}}}{(e^{j\Omega \frac{1}{2}} - e^{-j\Omega \frac{1}{2}}) e^{-j\Omega \frac{1}{2}}} \\
 &= \frac{2j \sin\left(\Omega \frac{L}{2}\right) \cdot e^{-j\Omega \frac{L}{2}}}{2j \sin\left(\Omega \frac{1}{2}\right) \cdot e^{-j\Omega \frac{1}{2}}} \\
 &= \underbrace{\frac{\sin\left(\Omega \frac{L}{2}\right)}{\sin\left(\Omega \frac{1}{2}\right)}}_{|W(\Omega)|} \cdot \underbrace{e^{-j\Omega \frac{L-1}{2}}}_{\angle W(\Omega)}
 \end{aligned}$$

Hvis lengden av vinduet  $L$  øker så vil  $|W(0)|$  øke, og hovedloben vil bli smalere. De første sidelobene forblir like høye, men de presses sammen mot  $\Omega = 0$ . Når  $L \rightarrow \infty$  vil magnituderesponsen til slutt ligne en impuls.

Det var her ikke nødvendig å vise hvorfor, men vi kan gjøre det nå ut fra fra uttrykket vi akkurat fant for  $|W(\Omega)|$ . Høyden til hovedloben finner vi slik:

$$\begin{aligned}
 |W(0)| &= \lim_{\Omega \rightarrow 0} \frac{\sin\left(\Omega \frac{L}{2}\right)}{\sin\left(\Omega \frac{1}{2}\right)} \\
 &\stackrel{*}{=} \lim_{\rightarrow 0} \frac{\Omega \frac{L}{2}}{\Omega \frac{1}{2}} \quad * \text{ siden } \sin x \approx x \text{ for små } x. \\
 &= \underline{\underline{L}},
 \end{aligned}$$

og avstanden til første nullpunkt får vi når:

$$\begin{aligned}
 |W(\Omega)| &= \left| \frac{\sin\left(\Omega \frac{L}{2}\right)}{\sin\left(\Omega \frac{1}{2}\right)} \right| = 0, \\
 &\Downarrow \text{ dette skjer når "telleren" blir 0:} \\
 \sin\left(\Omega \frac{L}{2}\right) &= 0, \\
 &\Downarrow \text{ som skjer når fasen blir } \pi: \\
 \Omega \frac{L}{2} &= \pi \\
 \Omega &= \underline{\underline{\frac{2\pi}{L}}} \quad \text{eller evt. } F = \underline{\underline{\frac{1}{L}}}
 \end{aligned}$$

(Fortsettes på side 15.)

## Formelsamling

### Grunnleggende sammenhenger:

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$$

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$$

$$\cos \alpha = \frac{1}{2}(e^{j\alpha} + e^{-j\alpha})$$

$$\sin \alpha = \frac{1}{2j}(e^{j\alpha} - e^{-j\alpha})$$

$$\sum_{n=0}^{N-1} a^n = \begin{cases} N & \text{for } a = 1 \\ \frac{1-a^N}{1-a} & \text{ellers} \end{cases}$$

$$ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow x_{\pm} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

### Diskret konvolusjon:

$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[n-k]h[k] = h[n] * x[n]$$

### Diskret-tid Fouriertransformasjon (DTFT):

$$\text{Analyse: } X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\Omega n}$$

$$\text{Syntese: } x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(\Omega)e^{j\Omega n} d\Omega$$

### Diskret Fouriertransformasjon (DFT):

$$\text{Analyse: } X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-j2\pi kn/N}, \quad 0 \leq k \leq N-1$$

$$\text{Syntese: } x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k]e^{j2\pi kn/N}, \quad 0 \leq k \leq N-1$$

### z-transformasjonen:

$$\text{Analyse: } X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n}$$