

UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i INF3470/4470 — Digital signalbehandling

Eksamensdag: 19. desember 2017

Tid for eksamen: 09.00 – 13.00

Oppgavesettet er på 16 sider.

Vedlegg: Ingen

Tillatte hjelpemidler: Ingen

Kontroller at oppgavesettet er komplett før
du begynner å besvare spørsmålene.

Merknad 1: Alle størrelser og figurakser skal benevnes.

Merknad 2: Les gjennom hele oppgavesettet før du begynner!

Svar:

Forslag til fasit, versjon-01:

Oppgave 1 Midlingsfilter (15 p.)

Et system kan beskrives ved dens impulsrespons, $h[n]$, slik at utsignalet er gitt som $y[n] = h[n] * x[n]$.

- a) Et system har $h[n] = \{1, 2, 3, 3\}$. Skisser $h[n]$ og uttrykk $h[n]$ ved hjelp av enhetssprang (unit step) funksjoner. Figurakser skal benevnes. 2 p.
- b) Hva er energien til systemet? Er systemet kausalt? Begrunn svaret. 2 p.
- c) Finn $h[-n + 1]$. 1 p.
- d) Finn $y[n]$ når $x[n] = \{1, 0, 1\}$ og $h[n] = \{1, 2, 3, 4\}$. Vis utregning. 2 p.
- e) Du skal nå designe et system som er et midlingsfilter. For hver n skal $y[n]$ være et gjennomsnitt av nåværende inputsignal $x[n]$ og de to foregående verdiene til inputsignalet.
 - Skriv differensligningen til $y[n]$ gitt $x[n]$. (LCCDE, Linear constant coefficient difference equation) 1 p.
 - Er systemet rekursivt? Begrunn svaret. 1 p.
- f) Bestem og skisser systemets impulserespons. Figurakser skal benevnes. 2 p.

(Fortsettes på side 2.)

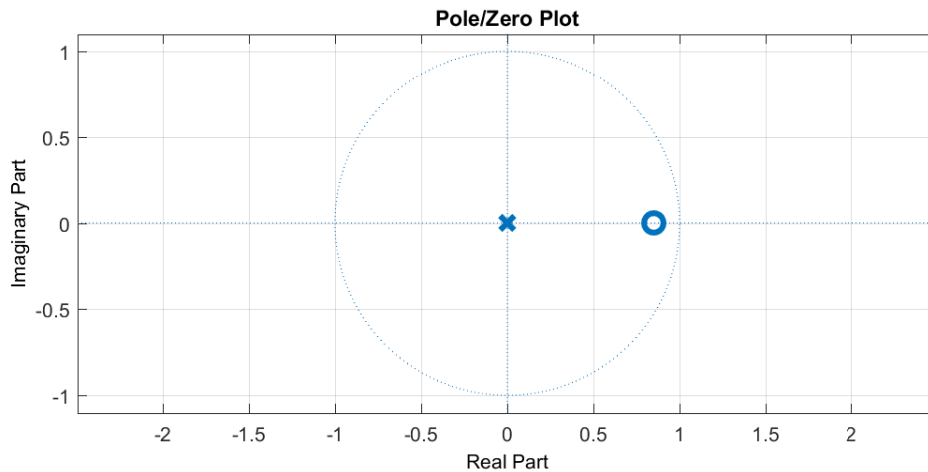
g) Vi at midlingsfiltersystemets transferfunksjon er

$$H(z) = \frac{1}{3z^2}(z^2 + z + 1)$$

1 p.

h) Hva er nullpunktene og polene til systemet? Skisser pol-nullpunktsplottet til systemet.

2 p.



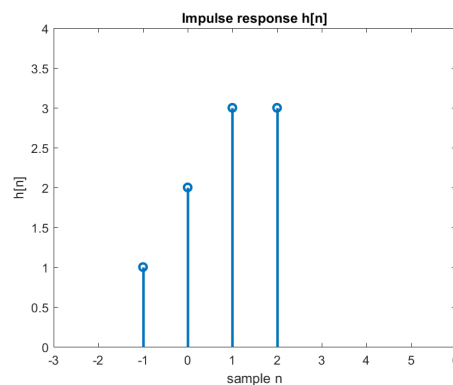
Figur 1: Pol og nullpunktsplott

i) Gitt pol-nullpunktsplottet i Figur 1, skisser magnituderesponsen til LTI systemet. La x-aksen være ω fra $-\pi$ til π . Er dette et lavpass-, båndpass-, allpass- eller høypassfilter? Begrunn svaret.

1 p.

Svar:

a) We have a step of 1 in $n = -1$, a step of 1 in zero, a step 1 in $n = 1$, no step in $n = 2$ and a last step of -3 in $n = 3$. This yields $h[n] = 1u[n+1] + 1u[n] + 1u[n-1] - 3u[n-3]$. See Figure 2.



Figur 2: Impulse response $h[n] = u[n+1] + u[n] + u[n-1] - 3u[n-3]$.

(Fortsettes på side 3.)

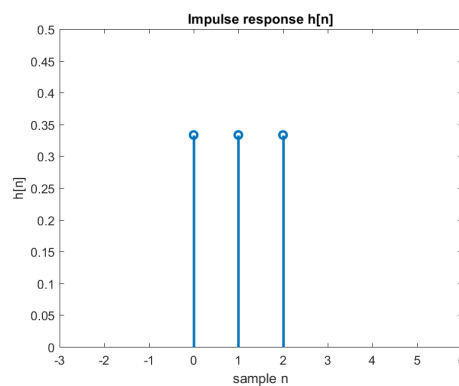
- b)
 - The energy of $h[n]$ is found as $E = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 3^2 = \underline{23}$.
 - No, $h[n] = 1$ for $n = -1$. It is based on future inputs, and thus not causal.
- c) We do shifting and folding: $h[-n + 1] = \{3, \underline{3}, 2, 1\}$.
- d) We zeropad both $x[n]$ and $h[n]$ to length $N = N_1 + N_2 - 1 = 6$, so that we have $h[n] = \{\underline{1}, 2, 3, 4, 0, 0\}$ and $x[n] = \{\underline{1}, 0, 1, 0, 0, 0\}$. Linear convolution gives:

$$y[n] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \\ 6 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

- e)
 - Linear constant coefficient difference equation (LCCDE):

$$y[n] = \frac{1}{3}(x[n] + x[n-1] + x[n-2])$$

- The system is based only on the input signal, not previous values of the output signal. It is therefore not recursive.
- f) The impulse response: $h[n] = \frac{1}{3}[\underline{1}, 1, 1]$. See Figure 3.



Figur 3: Impulse response $h[n] = \frac{1}{3}(u[n] - u[n-3])$.

- g) Z-transform of the LCCDE gives:

$$Y(z) = \frac{1}{3}X(z) + \frac{1}{3}z^{-1}X(z) + \frac{1}{3}z^{-2}X(z) = \frac{1}{3}X(z)(1 + z^{-1} + z^{-2})$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{3}(1 + z^{-1} + z^{-2})$$

$$H(z) = \frac{1}{3z^2}(z^2 + z + 1) \quad \text{qed}$$

(Fortsettes på side 4.)

- h) The zeros can be found by setting the numerator equal to 0. We utilize that $az^2 + bz + c = 0$ has solutions $z_{\pm} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$. This gives the following zeros of the system:

$$z_{\pm} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}j$$

The poles can be found by setting the denominator equal to 0, i.e. $3z^2 = 0$. We therefore have poles in the origin, as shown in the pole/zero plot in Figure 4.

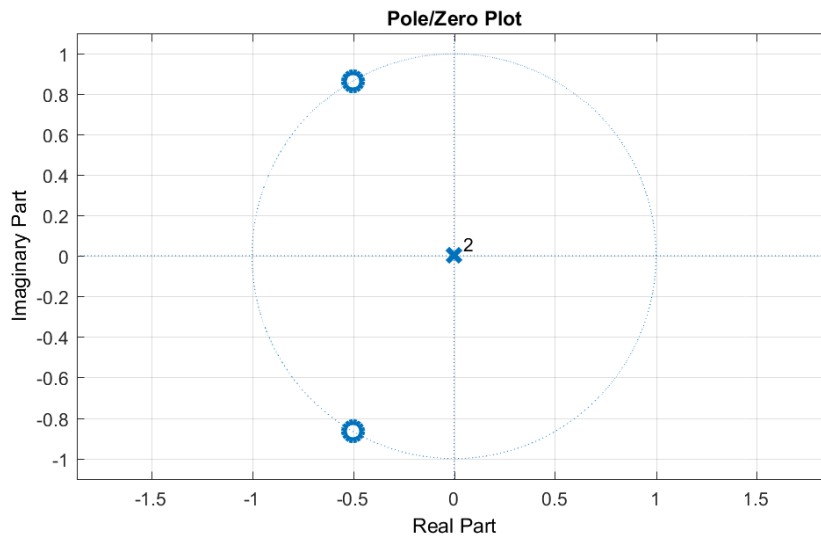


Figure 4: Pole/zero plot of moving average filter.

- i) This is a high pass filter since the low frequencies are suppressed. Figure 5 depicts the magnitude response for normalized frequency from 0 to π , and the response is symmetric.

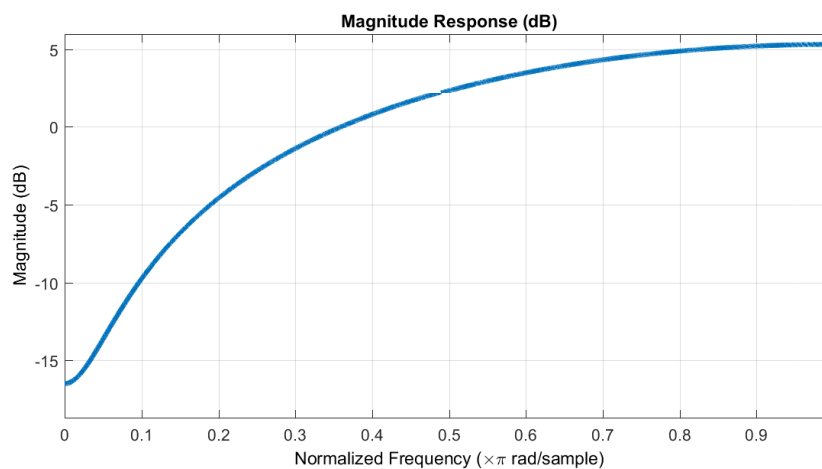


Figure 5: Magnitude response of filter in Figure 1.

(Fortsettes på side 5.)

Svar:

Forslag til fasit, versjon-01:

**Oppgave 2 Notchfilter for “Super Silent Night”
(12 p.)**

Santana Baby prøver å fange oppmerksomheten til en produsent med sin juledemo, men hun har et problem. Da hun spilte inn demoen sin hjemme, begynte røykvarselen å pipe mot slutten av sangen. Hun ber deg om å hjelpe henne med å fjerne lyden. Heldigvis har du nå mye erfaring med signalbehandling og vet hvordan du kan hjelpe Baby!

Når du laster inn sangen ser du at Santana Baby har brukt samplingfrekvens på 15 kHz. Du bruker MATLAB og finner frekvensresponsen ved å bruke *freqz*-funksjonen. Siden du vet at røykvarslere avgir høye, lyse toner leter du etter noen peaks som kan passe. Du ser en tydelig peak for frekvensen 1500 Hz, og bestemmer deg derfor for å prøve å fjerne denne frekvensen med et notch filter.

- a) Du vil designe et notch filter med komplekse poler/nullpunkt i komplekskonjugerte par. Filteret skal bestå av to nullpunkter og to poler.
- Vil magnituderresponsen være symmetrisk eller asymmetrisk? Begrunn svaret. 1 p.
 - Hvilken vinkel i pol-nullpunktsplottet tilsvarer frekvensen 1500 Hz? Vinkelen defineres i forhold til realaksen. 2 p.
- b) Hvor bør du sette nullpunktene dine, $z_k = r_k e^{j\theta_k}$, for å undertrykke frekvensen 1500 Hz? Oppgi r og θ . Marker nullpunktene i et pol-nullpunktsplott og indiker tydelig både radius r og vinkel θ . Begrunn plasseringen. Marker også de to polene i plottet, og begrunn plasseringene. 3 p.
- c) For å lage filteret i MATLAB med *filter*-funksjonen trenger du \vec{a} og \vec{b} som input. De finner du ved å se på den generelle formelen for transferfunksjonen $H(z)$:
- $$H(z) = b_0 \frac{\prod_{k=1}^M (1 - z_k z^{-1})}{\prod_{k=1}^N (1 - p_k z^{-1})} = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}}$$
- hvor nullpunktene er gitt ved z_k og polene p_k . M står for antall nullpunkter og N for antall poler. Finn \vec{a} og \vec{b} (gitt $b_0 = 1$). 2 p.
- d) Tegn en skisse an magnituderresponsen til notchfilteret. La x-aksen være ω fra $-\pi$ til π , og marker ved hvilken ω -verdi vi har valgt som røykvarselfrekvensen. 2 p.

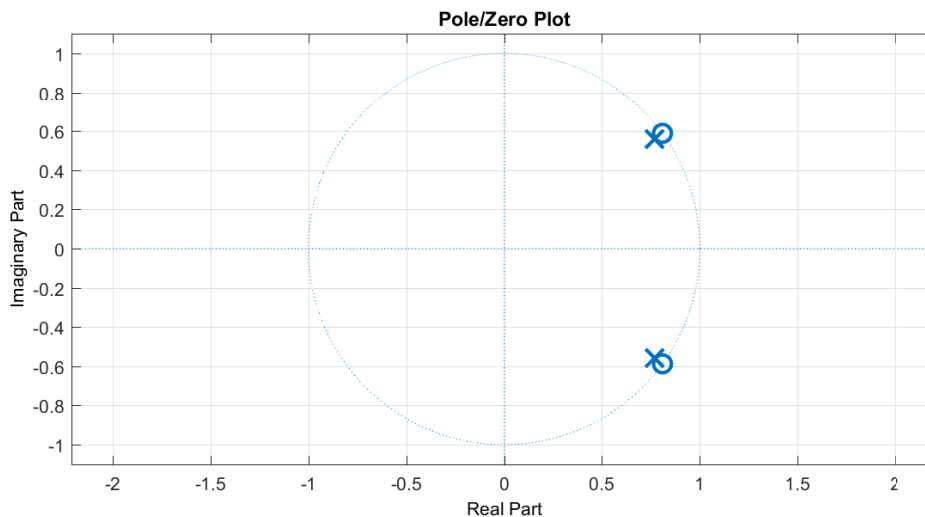
(Fortsettes på side 6.)

- e) Hvordan hadde magnituderesponsen endret seg i nærheten av valgte røykvarselfrekvens hvis du først prøvde å ha polene en avtand 0.85 fra origo og så økte til en avstand på 0.95 isteden? Hvordan vil valget påvirke den filtrerte sangen?

2 p.

Svar:

- a)
- Poles and zeros in complex conjugated pairs make the magnitude response symmetrical.
 - The normalized frequency we want to suppress is $f = \frac{F}{F_s} = \frac{1500\text{Hz}}{15000\text{Hz}} = \frac{1}{10} = 0.1$. This corresponds to $\theta = 2\pi f = \frac{\pi}{5} = 36^\circ$ angle in the pole/zero plot.
- b)
- To suppress a specific frequency, the zeros must be placed on the unit circle at that angle. The zeros are therefore placed at $z_{\pm} = e^{\pm j\theta}$, with $\theta = \frac{\pi}{5}$.
 - Since we want to suppress a specific frequency, but not all frequencies in a large range around 1500 Hz, we add poles to counteract the suppression caused by the zeros. The poles are therefore located at the same angle with radius close to but not quite on the unit circle. The poles are therefore placed at: $p_{\pm} = re^{\pm j\theta}$, where r is for example chosen as 0.9 and $\theta = \frac{\pi}{5}$. Anything between 0.8-0.99 for the radius is ok, but the placement must be explained and justified.



Figur 6: Pole/zero plot of the notch filter.

- c) We have

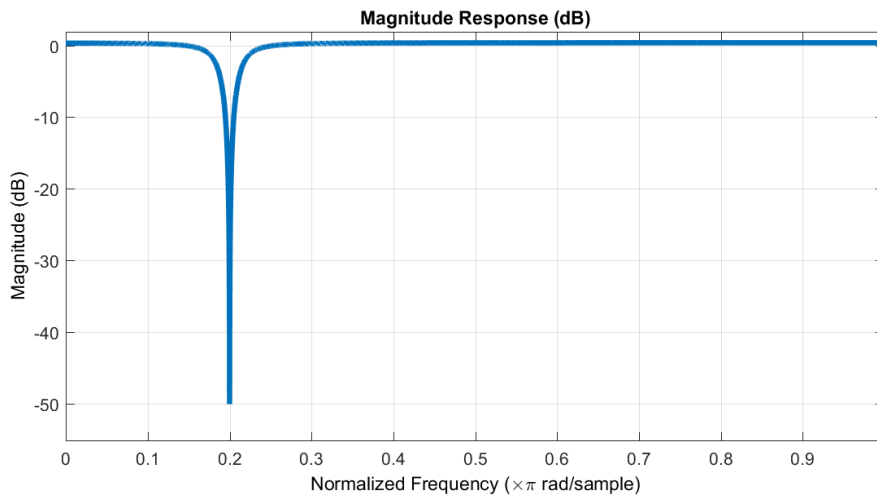
$$H(z) = \frac{(1 - z_1 z^{-1})(1 - z_2 z^{-1})}{(1 - p_1 z^{-1})(1 - p_2 z^{-1})} = \frac{1 - z_1 z^{-1} - z_2 z^{-1} + z_1 z_2 z^{-2}}{1 - p_1 z^{-1} - p_2 z^{-1} + p_1 p_2 z^{-2}}$$

(Fortsettes på side 7.)

$$H(z) = \frac{1 - e^{j\theta}z^{-1} - e^{-j\theta}z^{-1} + z^{-2}}{1 - re^{j\theta}z^{-1} - re^{-j\theta}z^{-1} + r^2z^{-2}} = \frac{1 - 2\cos(\theta)z^{-1} + z^{-2}}{1 - 2r\cos(\theta)z^{-1} + r^2z^{-2}}$$

We can thus determine $\vec{b} = [1, -2\cos(\theta), 1]$ and $\vec{a} = [1, -2r\cos(\theta), r^2]$.

- d) Figure 7 shows the magnitude response for the normalized frequency multiplied by π . The response is symmetrical. The suppression is found at value $\omega = \pm 2\pi f = \pm 0.2$, corresponding to the chosen smoke detector frequency.



Figur 7: Magnitude plot of the notch filter.

- e) Increasing the radius of the poles will decrease the suppression of the frequencies near 1500 Hz, thus *tightening* the notch filter. A wider notch filter might suppress too much of the frequencies close to 1500 Hz, while a tight filter will remove just the smoke detector's sound.

Svar:

Forslag til fasit, versjon-01:

Oppgave 3 Sampling av cosinussignal (9 p.)

Siri eier en fasjonabel klesbutikk og er ekstremt lei ungdommene som pleier å henge rett utenfor butikken og skremme bort kundene med sin dårlige oppførsel. Hun spør om du kan hjelpe henne. Siden Siris kunder som regel er over 40 år gamle, vil du prøve å spille veldig høyfrekvente toner like utenfor butikken slik at kun ungdommer vil høre lyden og ikke orke å stå der. Du bestemmer deg for å lage en irriterende "sang" bestående av en 17 kHz-tone.

- a) Hva er den laveste samplingsfrekvensen F_s du kan ha for å avspille en cosinus på 17 kHz? Begrunn svaret.

1 p.

(Fortsettes på side 8.)

- b) Hva blir Fouriertransformen, $X_c(j\Omega)$, av en *kontinuerlig* cosinus $x_c(t) = \cos(2\pi F_0 t)$ med $F_0 = 17$ kHz? Begrunn svaret og skisser med frekvens i kHz som x-akse. 2 p.
- c) For å lage en cosinus-tone du kan gi til Siri, lager du en tidsvektor med tidsintervall T og lar $x[n] = x_c(nT)$, der x_c er gitt i b). Hvilket tidsintervall T mellom hver sampling er det største du kan tillate? 1 p.
- d) Når du sampler i tid, hva medfører det i frekvensdomenet? Hva blir Fouriertransformen av ditt samplede signal $x[n]$ på form som i c) når $F_s = 47$ kHz? Skisser den. La x-aksen være frekvens fra -80 til 80 kHz. Oppgi tydelig x- og y-akseverdier. 2 p.
- e) Dessverre programmerte du litt for fort og klarte å skrive inn feil samplingsfrekvens. Du satte F_s til 27 kHz.
- Hva blir Fouriertransformen $X(e^{j2\pi FT})$ for det samplede signalet ($x[n]$ gitt i c)) når $F_s = 27$ kHz? Skisser og la x-aksen være frekvens fra -60 til 60 kHz. Oppgi tydelig x- og y-akseverdier. 1 p.
 - Du lavpassfiltrerer $X(e^{j2\pi FT})$ fra $-F_s/2$ til $F_s/2$ og finner det rekonstruerte signalet $y_r(t)$. Hvilken frekvens har cosinussignalet du har laget? Begrunn svaret. 2 p.

Svar:

- a) According to the Nyquist-Shannon sampling theorem, you need at least a sampling frequency F_s greater than twice the maximum frequency. This means we need $F_s \geq 2F_0 = 34$ kHz.
- b) We rewrite $x_c(t) = \cos(\Omega_0 t) = \cos(2\pi F_0 t) = \frac{1}{2}(e^{j2\pi F_0 t} + e^{-j2\pi F_0 t})$. The Fourier transform of $x_c(t)$ is therefore

$$X_c(j\Omega) = \frac{1}{2}\delta(\Omega - \Omega_0) + \frac{1}{2}\delta(\Omega + \Omega_0)$$

which is the same as $X_c(j2\pi F) = \frac{1}{2}$ for $|F| = F_0$ and 0 otherwise. It is shown in Figure 8. It is symmetrical since we have real coefficients.

- c) The time interval $T = 1/F_s$. With $F_s \geq 2F_0$ according to the sampling theorem, the maximum sampling interval we can allow is $T = \frac{1}{34} \cdot 10^{-3}$ s = $2.9412 \cdot 10^{-5}$ s = 0.0294 ms.
- d) Sampling in time gives periodization in frequency. You get scaled copies of $X_c(j\Omega)$ with placement depending on the sampling frequency. $\omega = \Omega T = 2\pi FT$.

$$X(e^{j2\pi FT}) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_c(j2\pi(F - kF_s))$$

(Fortsettes på side 9.)

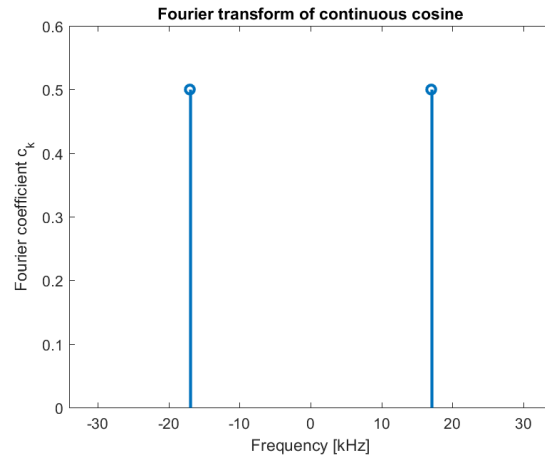


Figure 8: Fourier transform of continuous cosine signal.

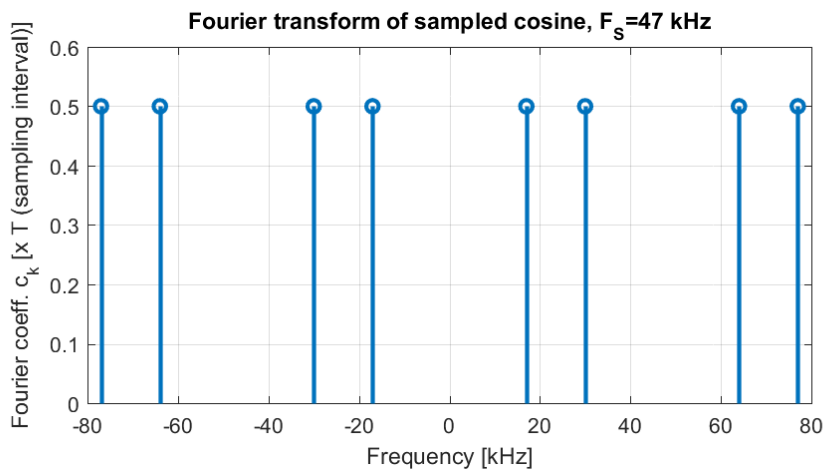


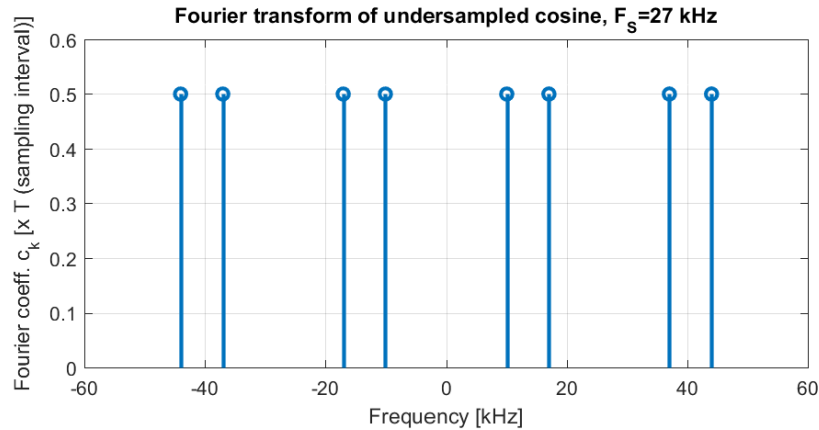
Figure 9: Fourier transform of sampled cosine signal.

This means that $X(e^{j2\pi FT}) = \frac{1}{2T}$ at the following frequencies: $F = kF_s \pm F_0$, where $k = 0, 1, 2, \dots$, and 0 otherwise. It is shown in Figure 9, and the frequencies are $\{\pm 17, \pm 30, \pm 44, \pm 77\}$ kHz.

- e)
- Figure 10 shows the Fourier transform of the undersampled signal. We have scaled copies of $X_c(j2\pi F)$ centered at every multiple of F_s . This gives the following frequencies: $\{\pm 17, \pm 10, \pm 44, \pm 37\}$ kHz.
 - Since $F_s < 2F_0$ we will have aliasing. The folding frequency is $F_s/2 = 13.5$ kHz. From Figure 10, we see that the alias frequency F_a will be 10 kHz. $F_a = F_s - F_0 = 27 - 17 = 10$ kHz. This will give an annoying “song” for most ages, and Siri will not be happy with your work.

Svar:

(Fortsettes på side 10.)

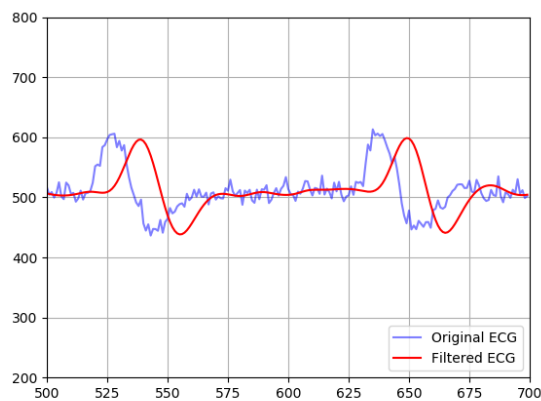


Figur 10: Fourier transform of undersampled cosine signal.

Forslag til fasit, versjon-01:

Oppgave 4 EKG 0-fase filtrering (10 p.)

Du har fått jobb hos et firma som driver med medisinsk utstyr, og din første jobb var å designe et filter for å få bort støy på et elektrokardiogram (EKG) signal. Du har brukt et Butterworth filter og har fått resultatet vist i Figur 14. Sjefen din sier det ikke er greit med så stor faseforsinkelse på det filtrerte signalet. Du har hele signalet tilgjengelig (ikke en sanntidsapplikasjon), og du husker vagt at det i slike tilfeller var mulig å filtrere uten faseforsinkelse. Var det noe med Matlab *filtfilt*? Det opprinnelige filteret ditt har impulsrespons $h[n]$.



Figur 11: EKG signal med støy og filtrert signal med stor forsinkelse.

a) Gitt at z -transformen til $x[n]$ er $X(z)$ med ROC R_x

- Vis at z -transformen til $x[-n]$ da er $X(1/z)$
- Gitt at $R_x = \{r_1 < |z| < r_2\}$, hva blir ROC for $X(1/z)$?

(Fortsettes på side 11.)

2 p.

- b) Gitt $y[n] = x[R - n]$, der $x[n]$ er en reell sekvens. Vis at $Y(z)$ kan skrives som

$$Y(z) = z^{-R}X(1/z). \quad (1)$$

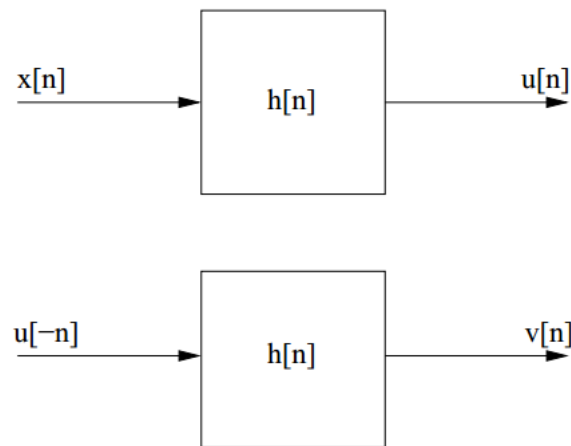
2 p.

- c) La nå $y[n] = v[-n]$ hvor $v[n]$ er illustrert i Figur 12. Hva blir den samlede impulsresponsen h_{tot} til systemet ($y[n] = h_{tot} * x[n]$)?

4 p.

- d) Vis at et filter $h_{zp}[n] = g[n] * g[-n]$ har null fase.

2 p.



Figur 12: Blokkdiagram av null-fase filteret. $x[n]$ filtrert med $h[n]$ gir $u[n]$. Foldet $u[n]$ filtrert med $h[n]$ gir $v[n]$

Svar:

- a) This follows directly from the definition of the z-transform using a simple variable substitution:

$$\begin{aligned} Z(x[n]) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n} = X(z) \\ Z(x[-n]) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[-n]z^{-n} \\ Z(x[-n]) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^n \\ Z(x[-n]) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n](1/z)^{-n} = X(1/z) \end{aligned}$$

If the ROC of $X(z)$ is given as $R_x = \{r_1 < |z| < r_2\}$, the ROC of $X(1/z)$ is simply $\{1/r_2 < |z| < 1/r_1\}$.

(Fortsettes på side 12.)

b) Using helper variable $m = R - n$.

$$\begin{aligned} Y(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[R-n]z^{-n} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]z^{-(R-m)} \\ &= z^{-R} \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m] \left(\frac{1}{z}\right)^{-m} = z^{-R} X(1/z) \end{aligned}$$

c) We use that $Y(z) = z^{-R}X(1/z)$ and write:

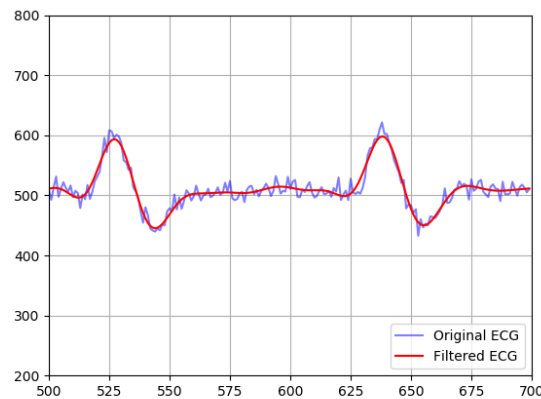
$$U(z) = H(z)X(z)$$

$$V(z) = H(z)U(1/z) = H(z)H(1/z)X(1/z) \quad (2)$$

$$Y(z) = V(1/z) = H(1/z)H(z)X(z) \quad (3)$$

This yields $H_{tot}(z) = H(1/z)H(z)$ or in time/sample domain $h_{tot}[n] = h[n] * h[-n]$.

d) We see that $H_{zp}(e^{j\omega}) = G(e^{j\omega})G(e^{-j\omega}) = G(e^{j\omega})G^*(e^{j\omega}) = |G(e^{j\omega})|^2$
This expression, which surprise-surprise also corresponds to H_{tot} , is always real, meaning the phase is zero. Your boss will be happy again.



Figur 13: Zero-phase filtered ECG signal.

Svar:

Forslag til fasit, versjon-01:

Oppgave 5 FIR filter design (9 p.)

Anta et FIR filter med orden M , hvor $h[n] = h[M - n]$, M er et like tall og $h[n]$ er reell for alle n .

a) Hva kan du allerede ut fra dette si om faseresponsen til filteret?

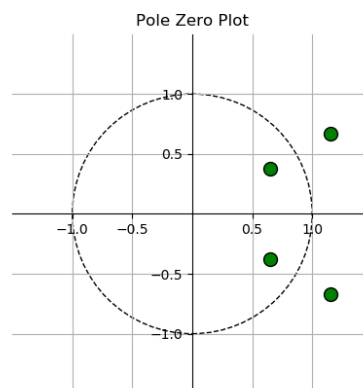
1 p.

(Fortsettes på side 13.)

- b) Hva slags FIR filter er dette (I, II, III, IV)? Begrunn svaret. 1 p.
- c) Du vet at $z_0 = re^{j\theta}$ er et nullpunkt for filteret. Det vet også at det er komplekst tall som verken er på enhetssirkelen eller imaginæraksen.
- Bruk informasjonen du har om filteret og at $H(z) = z^{-M}H(z^{-1})$ til å finne uttrykk for tre andre nullpunkter. 2 p.
 - Skisser de fire nullpunktene i et pol-nullpunktsplott. Anta f.eks. $r = 0.75$ og $\theta = \pi/6$. 2 p.
- d) Har dette filteret minste mulige gruppeforsinkelse for gitt magnituderespons? Begrunn svaret. 1 p.
- e) Du skal designe et FIR lineær fase høypassfilter ved hjelp av vindusmetoden og vil bruke et justerbart Kaiservindu. Du bruker Matlab/Python-funksjonen *kaiserord()* og får filterorden $M = 7$. Når du videre bruker dette for å finne filterkoeffisientene (Matlab: *fir1()*, Python: *firwin()*) får du en feilmelding. Hva tror du har gått galt? Begrunn svaret og foreslå en løsning på problemet. 2 p.

Svar:

- a) Symmetric filter coefficients = linear phase FIR.
- b) Even order and even symmetry implies a FIR type I filter.
- c) Using $H(z) = z^{-M}H(z^{-1})$, it is clear that if $z_0 = re^{j\theta}$ is a zero, then $1/z_0 = r^{-1}e^{-j\theta}$ also has to be a zero. Also, since $h[n]$ is real, any poles or zeros not on the real axis have to come in complex-conjugate pairs. Thus, if $z = z_0$ is complex, $z = 1/z_0$, $z = z_0^*$ and $z = 1/z_0^*$ are also zeros. If z_0 is on the real axis, you will not get the conjugates. If z_0 is on the unit circle, you will not get mirrored zeros.



Figur 14: Pole zero plot of the four zeros in question c.

(Fortsettes på side 14.)

- d) In general, no. Minimum group delay implies minimum phase. Because of the mirrored zeros, this filter will typically have zeros outside the unit circle, causing it to not have a stable inverse.
- e) The explanation is that *fir1()* and *firwin()* design filters with even symmetry (FIR type I or II). Odd filters with even symmetry (type II) have a fixed zero at $\omega = \pi$ and are thus not applicable to highpass filter designs. That is why these functions throw an error when you try to use odd filter order for a highpass filter. The easiest way to work around the problem is just to increment the filter order by 1 to get a Type I filter.

(Fortsettes på side 15.)

Formelsamling

Grunnleggende sammenhenger:

$$\begin{aligned}
 \sin(\alpha \pm \beta) &= \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta \\
 \cos(\alpha \pm \beta) &= \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta \\
 \sin 2\alpha &= 2 \sin \alpha \cos \alpha \\
 \cos 2\alpha &= \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \\
 \sin \alpha + \sin \beta &= 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \\
 \sin \alpha - \sin \beta &= 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \\
 \cos \alpha + \cos \beta &= 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \\
 \cos \alpha - \cos \beta &= -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \\
 \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha &= 1 \\
 \cos \alpha &= \frac{1}{2}(e^{j\alpha} + e^{-j\alpha}) \\
 \sin \alpha &= \frac{1}{2j}(e^{j\alpha} - e^{-j\alpha}) \\
 \sum_{n=0}^{N-1} a^n &= \begin{cases} N & \text{for } a = 1 \\ \frac{1-a^N}{1-a} & \text{ellers} \end{cases} \\
 ax^2 + bx + c = 0 &\Leftrightarrow x_{\pm} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}
 \end{aligned}$$

Lineær konvolusjon:

$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[n-k]h[k] = h[n] * x[n]$$

Sirkulær konvolusjon:

$$y[n] = x[n] \circledast h[n] = \sum_{k=0}^{N-1} x[k]h[\langle n-k \rangle_N] = \sum_{k=0}^{N-1} x[\langle n-k \rangle_N]h[k] = h[n] \circledast x[n]$$

Kontinuerlig-tid-fouriertransformasjon (CTFT):

$$\begin{aligned}
 \text{Analyse: } X(j\Omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\Omega t} dt \\
 \text{Syntese: } x(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\Omega)e^{j\Omega t} d\Omega
 \end{aligned}$$

Kontinuerlig-tid-fourierrekke (CTFS):

$$\begin{aligned}
 \text{Analyse: } c_k &= \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t)e^{-jk\Omega_0 t} dt \\
 \text{Syntese: } x(t) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\Omega_0 t}
 \end{aligned}$$

(Fortsettes på side 16.)

Diskret tid-fourierrekke (DTFS):

$$\begin{aligned} \text{Analyse: } c_k &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} \\ \text{Syntese: } x[n] &= \sum_{k=0}^{N-1} c_k e^{j\frac{2\pi}{N}kn} \end{aligned}$$

Diskret tid-fouriertransformasjon (DTFT):

$$\begin{aligned} \text{Analyse: } X(e^{j\omega}) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\omega n} \\ \text{Syntese: } x[n] &= \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega \end{aligned}$$

Diskret fouriertransformasjon (DFT):

$$\begin{aligned} \text{Analyse: } X[k] &= \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j2\pi kn/N}, \quad 0 \leq k \leq N-1 \\ \text{Syntese: } x[n] &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] e^{j2\pi kn/N}, \quad 0 \leq n \leq N-1 \end{aligned}$$

z-transformasjonen:

$$\text{Analyse: } X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] z^{-n}$$