

UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i INF3470 — Digital signalbehandling

Eksamensdag: 9. desember 2011

Tid for eksamen: 14.30 – 18.30

Oppgavesettet er på 4 sider.

Vedlegg: Ingen

Tillatte hjelpemidler: Ingen

Kontroller at oppgavesettet er komplett før
du begynner å besvare spørsmålene.

Oppgave 1 z -transformasjon

- a) Finn z -transformen $X(z)$ til uttrykket $x[n] = \alpha^n u[n] - \alpha^n u[n - 5]$. 1 p.
- b) Finn den kausale sekvensen $h[n]$ med z -transform $H(z) = \frac{z+3}{z-2}$. 1 p.
- c) Et signal $x[n]$ har z -transformen $X(z)$: Vis at dersom $x[n]$ multipliseres med n , så tilsvarer dette å multiplisere $X(z)$ med $-z \frac{d}{dz}$: 2 p.

$$n x[n] \xleftrightarrow{z} -z \frac{d}{dz} X(z)$$

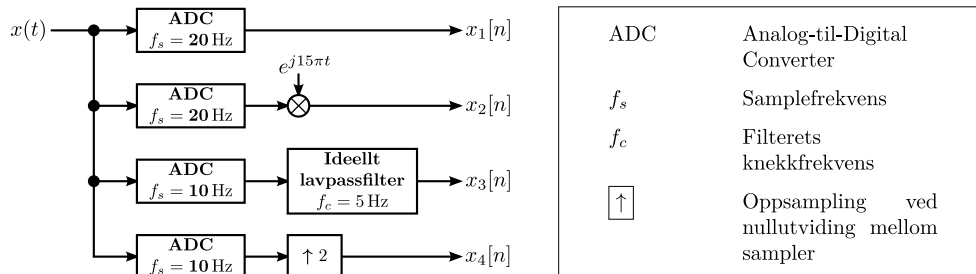
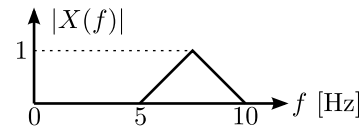
Hvordan påvirkes ROC av dette?

Oppgave 2 Sampling

- a) Forklar kort hva som menes med 2 p.
- Samplingsfrekvens og Nyquistfrekvens
 - Kvantisering og kvantiseringsfeil
 - Uniform og ikke-uniform sampling
 - Frekvensaliasing

(Fortsettes på side 2.)

- b) Et reelt signal $x(t)$ med magnituderespon-
sen $|X(f)|$ som vist til høyre samples og
filtreres på fire forskjellige måter:

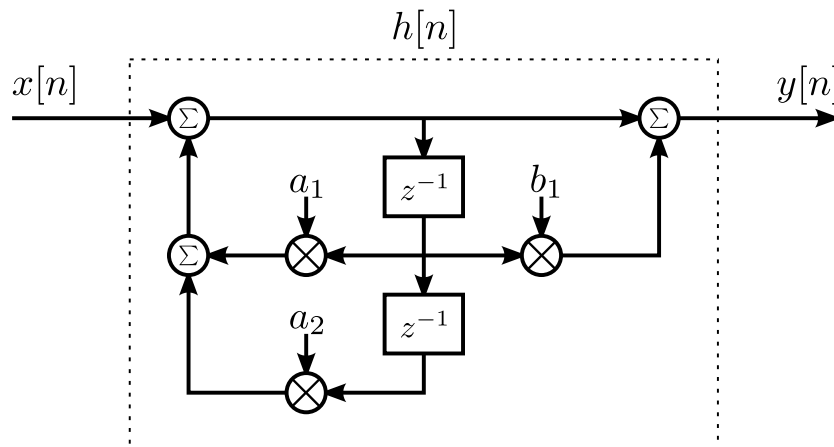


Skissér magnituderesponsene $|X_1(f)|$, $|X_2(f)|$, $|X_3(f)|$ og $|X_4(f)|$ i frekvensområdet -10 Hz til 10 Hz. Du kan anta at oppsamlingen ikke medfører noen amplitudeskalering.

2 p.

Oppgave 3 Systemanalyse

Et filter er beskrevet som:



der Σ betyr sum og \otimes betyr multiplikasjon.

- a) Finn systemfunksjonen $H(z)$.

1 p.

Bruk heretter at $H(z) = \frac{1+z^{-1}}{1-z^{-1}+0.5z^{-2}}$:

- b) Tegn opp pol/nullpunkt plasseringer, og avgjør hvorvidt filteret er stabilt og/eller kausalt.

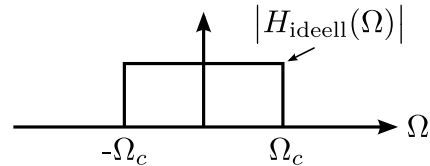
2 p.

(Fortsettes på side 3.)

- c) Finn uttrykkene for filterets magnituderespons $|H(\Omega)|$ og faserespons $\Theta_H(\Omega)$. Det eneste kravet til sluttuttrykkene er at de ikke skal inneholde komplekse tall. Ikke bruk tid på å prøve å forenkle dem. 2 p.

Oppgave 4 FIR filterdesign

Amplituderesponsen til et ideellt lavpassfilter er gitt som:



- a) Finn impulsresponsen $h_{\text{ideell}}[n]$ når fasen er 0, og skisser den. 1 p.
- b) Dette filteret kan ikke realiseres. Hvorfor ikke? Hva må vi gjøre med impulsresponsen for å få et realiserbart filter, og hvilke konsekvenser får dette for frekvensresponsen? 1 p.
- c) Frekvenssamplingsmetoden og vindusmetoden er to vanlige måter å designe FIR filtre på. Forklar hva metodene går ut på, og nevnt fordeler og ulemper. 2 p.

Oppgave 5 Filtre

Gitt systemfunksjonen:

$$H(z) = (1 - 1.25e^{j0.8\pi}z^{-1})(1 - 1.25e^{-j0.8\pi}z^{-1})$$

- a) Finn poler og nullpunkter og plott dem. 1 p.
- b) Finn det minimum-fase filteret $H_{\text{MF}}(z)$ som har samme frekvensrespons:

$$H_{\text{MF}}(\Omega) = H(\Omega) \quad 1 \text{ p.}$$

- c) Finn det allpass filteret $H_{\text{AP}}(z)$ som transformerer mellom dem, altså

$$H_{\text{MF}}(\Omega) = H_{\text{AP}}(z) H(\Omega),$$

- og avgjør om dette filteret er stabilt. 1 p.

(Fortsettes på side 4.)

Formelsamling

Grunnleggende sammenhenger:

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$$

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$$

$$\cos \alpha = \frac{1}{2}(e^{j\alpha} + e^{-j\alpha})$$

$$\sin \alpha = \frac{1}{2j}(e^{j\alpha} - e^{-j\alpha})$$

$$\sum_{n=0}^{N-1} a^n = \begin{cases} N & \text{for } a = 1 \\ \frac{1-a^N}{1-a} & \text{ellers} \end{cases}$$

$$ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow x_{\pm} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Diskret konvolusjon:

$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[n-k]h[k] = h[n] * x[n]$$

Diskret-tid Fouriertransformasjon (DTFT):

$$\text{Analyse: } X(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\Omega n}$$

$$\text{Syntese: } x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(\Omega)e^{j\Omega n} d\Omega$$

Diskret Fouriertransformasjon (DFT):

$$\text{Analyse: } X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-j2\pi kn/N}, \quad 0 \leq k \leq N-1$$

$$\text{Syntese: } x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k]e^{j2\pi kn/N}, \quad 0 \leq k \leq N-1$$

z-transformasjonen:

$$\text{Analyse: } X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n}$$