UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

Eksamen i	IN 227 — Numerisk lineær algebra
Eksamensdag:	5. desember 2001
Tid for eksamen:	9.00 – 15.00
Oppgavesettet er på 3 sider.	
Vedlegg:	Ingen
Tillatte hjelpemidler:	Alle trykte og skrevne

Kontroller at oppgavesettet er komplett før
du begynner å besvare spørsmålene.

Alle 12 delspørsmål vektlegges likt.

Oppgave 1 Gauss-Seidel

I denne oppgaven skal vi anvende Gauss-Seidels metode på ligningssystemet $Ax = b$ hvor

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & -2 \\ -2 & 5 & -3 \\ -2 & -3 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

1a

Utfør en iterasjon når du starter med $x^{(0)} = 0$.

1b

Det kan vises at Gauss-Seidels metode kan skrives $x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + c$ hvor

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 2/5 & 2/5 \\ 0 & 4/25 & 19/25 \\ 0 & 32/125 & 77/125 \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Beregn $||B||_\infty$ og forklar hvorfor Gauss-Seidels metode anvendt på problemet (1) konvergerer uansett valg av startverdi.

1c

Vis at $x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + c$ hvor B er gitt ved (2).

(Fortsettes på side 2.)

Oppgave 2 Oppdatering av invers

La $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ være en ikkesingulær matrise med invers $C = A^{-1}$ og la $a \in \mathbb{R}^n$ være en søylevektor. La $1 \le i \le n$ og definer $B \in \mathbb{R}^{n,n}$ som matrisen som fremkommer ved å bytte ut i-te rad i A med a^T. Vi kan uttrykke B på formen

$$B = A - e_i(e_i^T A - a^T)$$

hvor $e_i \in \mathbb{R}^n$ er i-te søyle i identitetsmatrisen I. Vi skal i denne oppgaven komme frem til et kriterium for når B er ikkesingulær og deretter bestemme den inverse $F = B^{-1}$ til B uttrykt ved den inverse C til A.

2a

Forklar hvorfor $B = (I - uv^T)A$ for passelige valg av søylevektorer $u, v \in \mathbb{R}^n$.

2b

Vis at dersom

$$\alpha = a^T C e_i \neq 0 \tag{3}$$

så har B en invers gitt ved

$$F = B^{-1} = C(I + \frac{1}{\alpha} e_i(e_i^T - a^T C)). \tag{4}$$

Hint: Dersom $v^T u \neq 1$ har matrisen $I - uv^T$ en invers på formen $I + \frac{1}{\alpha} uv^T$ for en $\alpha \in \mathbb{R}$.

2c

La $B^{-1} = F = (f_1, \ldots, f_n)$ og $A^{-1} = C = (c_1, \ldots, c_n)$ være partisjonert ved søyler. Finn en formel for f_i uttrykt ved c_i og for f_j uttrykt ved c_j og f_i for $j \neq i$. Er det noen fordel å beregne F på denne måten fremfor å invertere B direkte? Begrunn svaret.

2d

Skriv et matlab *function F=oppdater(C,i,a)* som tester om kravet (3) er oppfylt og bruker formlene du fant i oppgave **2c** til å beregne F dersom $\alpha \neq 0$.

Oppgave 3 En iterativ metode

I denne oppgaven er $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ en positiv definitt matrise og $f \in \mathbb{R}^n$ en søylevektor. Vi skal studere en iterative metode for å løse ligningssystemet $Ax = f$. Metoden har formen

$$x_{k+1} = x_k + \alpha r_k, \quad \text{hvor} \quad r_k = f - Ax_k \tag{5}$$

(Fortsettes på side 3.)

er residualet i k'te iterasjon. Videre er α en positiv konstant som vi skal bestemme slik at metoden får gode konvergensegenskaper. Vi betegner egenverdiene til A med $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ og antar at

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_n.$$

Vi setter også

$$B = I - \alpha A.$$

3a

Vis at $x_{k+1} = Bx_k + c$ for en vektor c og at $r_{k+1} = Br_k$ for $k \geq 0$.

3b

Skisser en algoritme som starter med $x_0 = 0$ og til gitt $\epsilon > 0$ bestemmer antall iterasjoner K og tilhørende approksimasjon x_K slik at $||r_K||_2^2/||r_0||_2^2 \leq \epsilon^2$.

3c

Anta at vi anvender metoden på matrisen A_p fra det diskrete Poisson problemet. Med $n = m^2$ er elementene $a_{i,j}$ i A_p gitt ved

$$\begin{aligned} a_{i,i} &= 4, && i = 1, \ldots, n \\ a_{i+1,i} = a_{i,i+1} &= -1, && i = 1, \ldots, n-1, \quad i \neq m, 2m, \ldots, (m-1)m \\ a_{i+m,i} = a_{i,i+m} &= -1, && i = 1, \ldots, n-m \\ a_{i,j} &= 0, && \text{ellers.} \end{aligned}$$

Omtrent hvor mange flops vil hver iterasjon i algoritmen kreve dersom n er stor?

La nå igjen A være en vilkårlig positiv definitt matrise.

3d

Bestem egenverdiene $\mu_1, \ldots, \mu_n$ til B uttrykt ved egenverdiene til A og vis at metoden konvergerer dersom $0 < \alpha < 2/\lambda_n$.

3e

La nå $\alpha = \frac{2}{\lambda_1 + \lambda_n}$. Vis at

$$\frac{||x_k - x||_2}{||x_0 - x||_2} \leq \left(\frac{\kappa - 1}{\kappa + 1} \right)^k, \quad k \geq 0$$

hvor $\kappa = \text{cond}_2(A) = \frac{\lambda_n}{\lambda_1}$.

Lykke til!